



## تخمین و مقایسه مدل‌های تعادلی نرخ سود کوتاه‌مدت اسناد خزانه اسلامی

مسلم پیمانی<sup>۱</sup>

زهرة هوشنگی<sup>۲</sup>

تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۷/۱۵

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۲/۲۷

### چکیده

در این پژوهش، نرخ سود کوتاه مدت با استفاده از مدل‌های تعادلی تک عاملی مدل‌سازی شده و عملکرد این مدل‌ها با یکدیگر مقایسه شده است. بدین منظور با استفاده از اطلاعات روزانه بازده تا سررسید اسناد خزانه اسلامی طی سال‌های ۱۳۹۴ و ۱۳۹۵، پارامترهای مدل‌های مورد بررسی با کمک روش گشتاورهای تعمیم یافته تخمین زده شده است. سپس با مقایسه توان برازش مدل‌های تخمینی، مشخص گردید عملکرد مدل CKLS و برنان-شوارتز بهتر بوده و بر اساس توان قدرت پیش‌بینی مدل برنان-شوارتز نسبت به سایر مدل‌ها قابلیت بیشتری داشته است. بعلاوه نتایج این پژوهش نشان داد که نرخ سود اسناد خزانه اسلامی دارای خاصیت بازگشت به میانگین در بلندمدت است که میزان آن نیز برآورد گردید. از سوی دیگر اگرچه کلیه مدل‌ها توان ضعیفی در برازش نوسانات نرخ سود داشتند، اما از این بین مدل‌هایی که در آنها نوسانات تابع درجه بالاتری از نرخ سود بودند، برازش مناسبتری نشان دادند.

**واژه‌های کلیدی:** نرخ سود کوتاه مدت، روش گشتاورهای تعمیم یافته، مدل‌های تعادلی، نوسانات نرخ بهره.

۱- استادیار و عضو هیات علمی دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. m.peymany@atu.ac.ir

۲- کارشناسی ارشد مدیریت مالی، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران (نویسنده مسئول) zohreh.hooshangi@gmail.com

## ۱- مقدمه

نرخ بهره یا سود بدون ریسک یکی از عوامل اساسی موثر بر ابزارها و بازارهای مالی است. این نرخ از یکسو از عناصر اصلی تشکیل دهنده نرخ تنزیل مورد استفاده در مدل‌های قیمت‌گذاری مانند مدل تنزیل جریان‌های نقدی است و از سوی دیگر در فرآیندهای مدیریت ریسک نقش بسزایی دارد. همچنین از آنجایی که نرخ بهره از ابزارهای اصلی سیاست‌گذاری اقتصادی در هر کشور است، توان پیش‌بینی این نرخ می‌تواند به سیاست‌گذاران در بهبود نتایج سیاست‌های خود کمک موثری کند. لذا شناسایی و تخمین مدل‌هایی که بتواند رفتار نرخ بهره را مدل‌سازی و پیش‌بینی نماید کاربرد فراوانی دارد. از جهتی، رشد بالای ارزش معاملات اسناد خزانه در بازار سرمایه ایران و نقش مهم فعلی این اوراق در تامین مالی دولت، حاکی از ضرورت توجه بیشتر به این اوراق و رفتار قیمتی آن در تحقیقات علمی است تا بتوان نتایج این تحقیقات را در عمل هم در عرصه سیاست‌گذاری و هم سرمایه‌گذاری به کار برد.

علی‌رغم موارد عنوان شده در خصوص اهمیت بررسی نحوه رفتار نرخ بهره بدون ریسک و نرخ سود اسناد خزانه، در حال حاضر در تحقیقات انگشت‌شماری به این موضوع در ایران پرداخته شده است که در مقایسه با حجم بالای پژوهش‌های مشابه در دیگر کشورها، ضرورت انجام چنین تحقیقاتی را در ایران به خوبی روشن می‌سازد. بر این اساس در این تحقیق به مدل‌سازی تعادلی رفتار نرخ بازده تا سررسید اسناد خزانه اسلامی به عنوان سنج‌های از نرخ بهره کوتاه مدت در ایران پرداخته شده است تا از بین مدل‌های مورد بررسی، مناسب‌ترین مدل (بر اساس معیارهای توان برازش، توان پیش‌بینی و تایید محدودیت‌های اعمالی از سوی هر مدل) انتخاب گردد. همانطور که عنوان شد، مدل‌های مورد بررسی در این پژوهش در زمره مدل‌های تعادلی جای می‌گیرند. منظور از مدل‌های تعادلی، مدل‌هایی است که در آن کلیه اوراق بهادار اعم از اوراق پایه و مشتقه با استفاده از معادله نرخ بهره قیمت‌گذاری می‌شود. دسته دیگر مدل‌های غیرآربیتراژی است. در مدل‌های غیرآربیتراژی، ساختار زمانی نرخ بهره با کمک اطلاعات یک دسته از اوراق بهادار مانند اوراق با درآمد ثابت موجود استخراج می‌شود و از این اطلاعات برای قیمت‌گذاری دسته دیگر مانند اوراق مشتقه استفاده می‌گردد (ووک، ۲۰۰۸).

تخمین ضرایب مدل‌های تعادلی نرخ بهره به مانند سایر مدل‌ها، نیازمند وجود داده‌های ورودی است، چرا که در این مدل‌ها نیز فرض می‌شود که حداقل یک متغیر حالت<sup>۱</sup> وجود دارد که حاوی کلیه اطلاعات مربوطه است. این فرض نشأت گرفته از خاصیت مارکوفی این مدل‌ها است. این خاصیت، یکی از ویژگی‌های فرایندهای تصافی است که در آن احتمال شرطی رخداد آینده فقط به آخرین رخداد موجود یعنی رخداد کنونی وابسته است. این خاصیت موجب می‌شود تا

اطلاعات جاری برای تعیین کامل وضعیت مدل در هر لحظه از کفایت لازم برخوردار باشد (مانک، ۲۰۱۱). نرخ بهره کوتاه مدت<sup>۲</sup> به عنوان متغیر حالت مدل‌های تعادلی، نرخ بهره بدون ریسک در یک بازه زمانی مشخص محسوب می‌شود. ولی از آنجایی که این نرخ به صورت مستقیم قابل مشاهده نیست، استفاده از سنجه‌هایی برای جایگزینی این نرخ ضروری است. یکی از رایج‌ترین این سنجه‌ها، نرخ بازده اسناد خزانه دولتی است زیرا این اوراق ریسک نکول نداشته و لذا مدل-سازی نرخ بازده تا سررسید آنها می‌تواند مناسب‌ترین جایگزین برای مشاهده و مدل‌سازی نرخ بهره بدون ریسک به شمار رود. در این پژوهش نیز نرخ بازدهی تا سررسید اسناد خزانه اسلامی به عنوان سنجه بازده بدون ریسک در نظر گرفته شده است.

همچنین برای برآورد پارامترهای مدل نرخ بهره، روش‌های متعددی از قبیل روش گوسین توسط نومن (۱۹۹۷) روش بیژین توسط ژانگ، چن و لی (۲۰۱۷) و گشتاورهای تعمیم یافته توسط چان و همکاران (۱۹۹۲) وجود دارد. در این مقاله از روش گشتاورهای تعمیم یافته استفاده می‌شود. دلیل استفاده از این روش فراهم شدن امکان مقایسه میان مدل‌های نرخ بهره است چراکه در این روش الزامی بر یکسان بودن تابع توزیع تغییرات نرخ بهره در مدل‌های مورد بررسی وجود ندارد (چان و همکاران ۱۹۹۲).

پس از تخمین پارامترهای هر مدل، عملکرد مدل‌ها بر اساس معیارهای مختلف مقایسه شده است. بدین منظور در ادامه و در بخش دوم مقاله مبانی نظری و پیشینه پژوهش ارائه شده و در بخش سوم و چهارم پرسش‌ها و روش پژوهش توضیح داده شده است. در بخش پنجم و ششم به ترتیب، داده‌های مورد استفاده و نتایج بدست آمده ارائه و تحلیل شده است. سپس در بخش هفتم جمع‌بندی و پیشنهادات کاربردی و پژوهشی مطرح خواهد شد.

## ۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

### ۲-۱- معرفی مدل‌های مورد بررسی در پژوهش

تاکنون نظریات مختلفی برای توضیح رفتار نرخ بهره ارائه شده است. مهم‌ترین آنها عبارتند از نظریه انتظارات، بخش‌بندی بازار و فرضیه ترجیح نقدشوندگی. بعلاوه در سال‌های اخیر استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی بعنوان رویکردی نوین برای مدل‌سازی نرخ بهره مورد استفاده محققین قرار گرفته است. استفاده از این روش مستلزم فرضیاتی است. اول اینکه نرخ بهره و قیمت اوراق به متغیرهای تصادفی وابسته است که در طول زمان از یک فرآیند تصادفی فرضی استنتاج می‌شود. ثانیاً فرض می‌شود نرخ بهره و نیز ارزش اوراق به گونه‌ای تعیین می‌شود که امکان آربیتراژ وجود

ندارد (ووک، ۲۰۰۸). معادله دیفرانسیل تصادفی برای تحلیل رفتار دینامیک نرخ بهره کوتاه مدت در حالت کلی به صورت معادله (۱) بیان می‌شود:

$$dr = u(r, t) + w(r, t)dZ \quad (1)$$

که در این رابطه،  $dZ$  فرآیند وینر استاندارد،  $u(r, t)$  و  $w(r, t)$  اجزای پیشران<sup>۳</sup> و نوسانات فرآیند هستند. لازم به توضیح است مدل مذکور نسبت به زمان همگن است. به این معنا که پارامترهای مدل تنها به نرخ بهره بستگی دارند و نه زمان.

اولین مدل پیوسته زمانی نرخ بهره توسط مرتون (۱۹۷۳) پیشنهاد شد. تحت مدل وی نرخ بهره از یک حرکت براونی تحت شرایط خنثی به ریسک تبعیت می‌کند. در این مدل  $u(r, t)$  و  $w(r, t)$  همواره ثابت هستند که البته این فرض در شرایط واقعی کارایی زیادی ندارد. چنین مدلی که در آن نرخ بهره توزیعی نرمال دارد، مدل گوسین<sup>۴</sup> نامیده می‌شود. لذا متغیر تصادفی با تابع توزیع نرمال هرمقداری را می‌تواند به خود بگیرد که این مقدار می‌تواند با احتمال بالای صفر، عددی منفی باشد که این موضوع نیز در اقتصاد واقعی پذیرفته شده نیست (مانک، ۲۰۱۱). یکی از ویژگی‌های نامناسب مدل مرتون، ثابت بودن جزء پیشران مدل است. این نقص مدل توسط واسیچک (۱۹۷۷) برطرف گردید. بدین صورت که او با توسعه مدل مرتون، تغییرات نرخ بهره را تحت فرآیند اورنشتین-اولنیک مدل‌سازی کرد:

$$dr = k(\varphi - r)dt + \rho dZ, \alpha > 0 \quad (2)$$

به این رابطه گاهی گام تصادفی الاستیک نیز گفته می‌شود.  $\rho dZ$  که جزء نوسان نرخ بهره است، در مدل واسیچک ثابت در نظر گرفته شده است. عبارت  $k(\varphi - r)$ ، جزء پیشران است که ویژگی بازگشت نرخ بهره به میانگین بلندمدت، یعنی  $\varphi$  را نشان می‌دهد.  $k$  نیز سرعت بازگشت به میانگین نرخ بهره می‌باشد. پدیده بازگشت به میانگین با واقعیات اقتصادی نیز قابل توضیح است. به طور مثال زمانی که نرخ بهره افزایش می‌یابد، میزان تقاضا برای استقراض کاهش یافته و به طور طبیعی نرخ بهره نیز کاهش می‌یابد (مانک، ۲۰۱۱).

بزرگترین مشکل مدل واسیچک در این است که نرخ بهره می‌تواند مقادیر منفی به خود بگیرد. کاکس، اینگرس و راس (۱۹۸۵) مدل تعادلی پیشنهادی خود را که اختصاراً CIR نامیده می‌شود، با افزودن ریشه دوم نرخ بهره به جزء نوسان مدل پیشنهاد دادند و با این کار مشکل نرخ بهره منفی

مدل واسیچک نیز مرتفع شد. مدل به شرح رابطه (۳) است و از فرآیند ریشه دوم<sup>۵</sup> پیروی کرده و خاصیت بازگشت به میانگین دارد.

$$dr = k(\varphi - r)dt + \rho\sqrt{r}dZ, \quad \alpha, \gamma > 0 \quad (3)$$

مدل CIR فرض می‌کند که هر سرمایه‌گذار درباره میزان مصرف در زمان حال و یا موکول کردن آن به آینده تصمیم‌گیری می‌کند. به عبارتی هر سرمایه‌گذار یک بده‌بستان میان مصرف و سرمایه‌گذاری انجام می‌دهد. لذا نرخ بهره به تعادلی در بازار می‌رسد که هیچ‌کس تمایلی برای قرض دادن یا قرض گرفتن نخواهد داشت. مدل CIR می‌تواند تغییرات نرخ بهره را بر حسب ترجیحات فردی برای سرمایه‌گذاری و مصرف استخراج نماید (پینتو و همکاران ۲۰۱۵).

دوئان (۱۹۷۸) رابطه‌ای برای قیمت‌گذاری اوراق با درآمد ثابت و نرخ بدون ریسک ارائه کرد. انگیزه مدل جدید در این بود که منطق شرایط بدون آربیتراژ برای ارزش‌گذاری اوراق بدون ریسک، نمی‌تواند مانع از استقلال ارزش‌گذاری از ترجیحات سرمایه‌گذاران شود. او نشان داد که استفاده از مدل CAPM زمان پیوسته با تابع مصرف لگاریتمی، می‌تواند وابستگی ارزش به انتظارات را نشان دهد. در مدل پیشنهادی دوئان، تغییرات نرخ بهره به صورت پیوسته و با رابطه شماره (۴) نشان داده می‌شود. نرخ بهره تابع توزیع لگاریتم-نرمال داشته و تغییرات نرخ بهره از فرآیند وینر هندسی<sup>۶</sup> پیروی می‌کند.

$$dr = prdZ \quad (4)$$

مدل CIR VR توسط کاکس، اینگرسول و راس (۱۹۸۰) برای ارزش‌گذاری قراردادهای وام با نرخ بهره متغیر ارائه شده است. انگیزه ارائه این مدل، شرایط هیجانی و متغیر اقتصاد دهه ۸۰ بوده که متعاقب آن نرخ تورم و نرخ بهره دائماً دچار تغییرات فراوان شده و تأثیر بالایی بر ارزش اوراق با درآمد ثابت داشتند. لذا تلاش شد تا مدلی ارائه گردد تا ارزش برآوردی اوراق را نسبت به این تغییرات تثبیت یا ایمن نماید. در این مدل فرض بر این بوده که منحنی مصرف کلیه سرمایه‌گذاران تابع برنولی است.

برنان و شوارتز (۱۹۸۰) مدلی برای قیمت‌گذاری اوراق بدهی قابل تبدیل (به سهم) ارائه کردند که در این مدل ارزش اوراق وابسته به قیمت بنگاه و نیز نرخ بهره‌ای است که برای محاسبه ارزش اوراق بدهی استفاده می‌شود. نرخ بهره و نیز ارزش بنگاه (سهام) از فرآیندی تصادفی پیروی می‌کند. این مدل بعدتر توسط کورتادون (۱۹۸۲) برای قیمت‌گذاری اختیار اوراق بدهی مورد استفاده قرار گرفت:

$$dr = k(\varphi - r)dt + \rho r dZ, \quad \alpha > 0 \quad (5)$$

مدل  $GBM^Y$  همان رابطه‌ای است که توسط بلک و شولز (۱۹۷۳) به عنوان مدل تشریح‌کننده قیمت دارایی پایه استفاده شد. این مدل توسط مارش و روزنفلد (۱۹۸۳) برای مدل‌سازی تغییرات نرخ بهره توسعه پیدا کرد. این پژوهشگران با اعمال تغییراتی در جزء بازمانده و پارامترهای نوسان، مدل را تکامل داده و خواص آن را با استفاده از داده‌های اوراق قرضه دولتی بین سال‌های ۱۹۵۳ تا ۱۹۸۱ بررسی کردند.

$$dr = kr dt + \rho r dZ \quad (6)$$

علاوه بر مدل‌های فوق، مدل‌های متعدد دیگری نیز در ادبیات معرفی شده است اما مقایسه‌ای میان عملکرد آنها انجام نگرفته بود تا اینکه چان و همکارانش (۱۹۹۲) به منظور مقایسه مدل‌های تعادلی تک عاملی، یک معادله اقتصادسنجی ارائه دادند. این معادله که برای تحلیل رفتار دینامیک نرخ بهره کوتاه مدت و به شرح رابطه (۷) است، به گونه‌ای است که کلیه مدل‌های تعادلی مطرح شده می‌توانند برحسب پارامترهای آن بیان شوند. معادله دیفرانسیل تصادفی پیشنهادی که از این پس مدل CKLS نامیده می‌شود عبارت است از:

$$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t \quad (7)$$

در این رابطه  $r_t$  نرخ بهره کوتاه مدت بدون ریسک،  $dt$  بازه زمانی کوتاه مدت و  $dW_t$  حرکت براونی استاندارد است.  $\alpha + \beta r$  جزء پیشران،  $\sigma$  فاکتوری برای نوسان نرخ بهره است و  $\gamma$  میزان حساسیت یا کشش نرخ بهره به نوسان با توجه به میزان نرخ بهره را نشان می‌دهد که از آن بعنوان اثر سطح نام برده می‌شود. بعلاوه پارامتر  $\beta$  سرعت تعدیل نرخ بهره به میانگین بلندمدت را تنظیم می‌نماید. مدل‌های موجود در ادبیات موضوع با اعمال محدودیت‌های مختلف بر روی پارامترهای  $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$  تعریف شده‌اند. در جدول شماره ۱ ویژگی‌های این مدل‌ها نشان داده شده است.

جدول شماره ۱- پارامترهای مدل‌های نرخ بهره کوتاه مدت

نام مدل	مدل	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
Merton (1973)	$dr_t = \alpha dt + \delta dw_t$		۰	۰
Vasicek (1977)	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \delta dw_t$			۰
CIR SR (1985)	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \delta r_t^{0.5} dw_t$			۰,۵
Dothan (1978)	$dr_t = \delta r_t dw_t$	۰	۰	۱
GBM (1983)	$dr_t = \beta r_t dt + \delta r_t dw_t$	۰		۱
Brennan-Schwartz (1980)	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \delta r_t dw_t$			۱
CIR VR (1980)	$dr_t = \delta r_t^{1.5} dw_t$	۰	۰	۱,۵
CKLS (1992)	$dr_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \delta r_t^\gamma dw_t$			

## ۲-۲- مروری بر مطالعات گذشته در برآورد و مقایسه مدل‌ها

مطالعات متعددی برای بررسی توان مدل‌های تک عاملی در برازش نرخ بهره انجام شده است. برای اولین بار چان و همکاران (۱۹۹۲) رویکرد گشتاورهای تعمیم یافته را برای ارزیابی و مقایسه مدل‌های تک عاملی پیشنهاد دادند که تحول بزرگی در این حوزه محسوب می‌شد. مطالعات آنها در بازه زمانی ۱۹۶۴ تا ۱۹۸۹ بر روی نرخ بازده سالانه اسناد خزانه آمریکا نشان داد که بهترین مدل‌ها آنهایی بوده‌اند که جزء توضیح‌دهنده نوسان در مدل، تابعی از نرخ بهره بوده است. بعلاوه تعداد زیادی از مدل‌های مورد بررسی که محدودیت‌هایی بر روی چهار پارامتر ذکر شده قائل بودند، عملکرد ضعیفی در این مطالعه داشتند. بعد از آنها، پژوهشگران زیادی این تحقیق را ادامه دادند که از آن جمله می‌توان به مطالعات تسه (۱۹۹۵) و دالکویست (۱۹۹۶) اشاره کرد که مدل‌های تعادلی نرخ بهره را در سطح بین‌المللی تخمین زدند. یافته‌های آنها نشان می‌دهد در بسیاری از کشورها رابطه مستقیمی میان سطح نرخ بهره و نوسان نرخ بهره وجود داشته و تنها در تعدادی از کشورها این رابطه معکوس برآورد شده است. در جدیدترین مطالعات صورت گرفته، سیتورس (۲۰۱۴) بر روی داده‌های نرخ بهره بین بانکی انگلستان مابین سال‌های ۲۰۱۰-۱۹۷۵ دریافت که مدل‌های با محدودیت بیشتر ارجحیتی به مدل‌های با محدودیت کمتر ندارند و بعلاوه عامل نوسان نقش مهم‌تری نسبت به عامل بازمانده در توضیح رفتار دینامیک نرخ بهره دارد. همچنین نمونه‌هایی از بکارگیری روش‌های بیزین برای مقایسه مدل‌ها در ادبیات دیده شده است. از آن جمله می‌توان به تحقیق لی، لیو و یو (۲۰۱۵) اشاره کرد. در تحقیق دیگری مانند ژانگ، چن و لی (۲۰۱۶)، از تکنیکی تلفیقی، مرکب از روش بیزین و زنجیره مارکوف شده برای برآورد پارامترها استفاده شده و آماره بیزین برای مقایسه مدل‌ها پیشنهاد شده است. نتایج تحقیق وی که بر روی نرخ سپرده یک

ماهه یورو دلار انجام پذیرفته، نشان دهنده این است که پارامترها در بیشتر مدل‌ها به لحاظ آماری معنی‌دار نبودند اما مدل‌های دوئان، برنان-شوارتز و GBM عملکرد بهتری داشتند.

بررسی خاصیت بازگشت به میانگین با آزمون معناداری پارامتر  $\beta$  که در واقع سرعت بازگشت به میانگین در مدل‌های تک عاملی است، توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده است. با بکارگیری روش گشتاورهای تعمیم یافته شواهد متنوعی از خاصیت بازگشت به میانگین در مطالعات موجود دیده شده است. در جدیدترین یافته‌ها مانند مدل‌سازی نرخ بهره بین بانکی در انگلستان توسط سیتورس (۲۰۱۴) و مطالعه بر روی نرخ سود سپرده یورو دلار توسط ژانگ، چن و لی (۲۰۱۷) خاصیت بازگشت به میانگین رد شده است. در بخشی از تحقیق دالکوئیست (۱۹۹۶) که بر اساس اطلاعات نرخ بهره اسناد خزانه دولتی انجام گرفته، این ویژگی در سوئد و دانمارک به لحاظ آماری معنادار بوده اما در انگلستان و آلمان ضعیف گزارش شده است. آنها این ویژگی را با کاربرد توابع مومنتوم جایگزین پایدار گزارش کرده‌اند. بعلاوه بررسی نرخ سود قراردادهای ریپو در چین، خاصیت بازگشت به میانگین نرخ سود بلندمدت دیده شده است هونگ و همکاران (۲۰۱۰).

محققان مختلف از جمله هانگ و همکاران (۲۰۰۴) در مطالعات خود دریافتند میزان نوسان نرخ بهره زمانی که سطح نرخ بهره بالاتر است، افزایش می‌یابد. به این پدیده اثر سطح گفته می‌شود. برای توضیح اثر نرخ بهره بر نوسان آن از پارامتر  $\gamma$  در مدل‌ها استفاده می‌شود. در مدل‌های اولیه،  $\gamma$  ثابت در نظر گرفته می‌شد (مانند مدل‌های واسیچک (۱۹۷۷))، اما در مطالعات بعدی این پارامتر به صورت منعطف و تابعی از نرخ بهره مدل‌سازی شد. در مطالعات اخیر، شواهدی از وجود خواص ناهمسانی واریانس در داده‌های نرخ بهره مشاهده شده است، لذا پژوهشگران، خانواده مدل‌های گارچ<sup>۸</sup> را برای حذف خواص ناهمسانی واریانس نرخ بهره مناسب دانستند. اندرسن و لاند (۱۹۹۷) نشان دادند که استفاده از مدل‌های گارچ می‌تواند اثر سطح را در مدل‌های نرخ بهره کاهش دهد. این دو پژوهشگر مدل CIR را توسعه داده و عامل نوسان تصادفی را به آن اضافه کردند که یافته‌های آنها نشان می‌دهد مدل CIR با اضافه شدن عامل نوسان تصادفی که آن را تبدیل به مدلی دو عاملی می‌کند توان بالاتری در توضیح ویژگی‌های نرخ بهره دارد.

در خصوص مناسب بودن مدل‌های تک عاملی در مدل‌سازی نرخ بهره، جمع‌بندی‌های متفاوتی در مطالعات مختلف بیان شده است. در برخی از مطالعات مانند آیت ساهالیا (۱۹۹۶) و سوروار (۲۰۱۱) شواهدی از وجود اجزای بازمانده<sup>۹</sup> غیرخطی دیده شده است در حالی که در عموم مدل‌های تک عاملی اجزای بازمانده رابطه خطی با نرخ بهره داشته‌اند. با این حال پریسکر (۱۹۹۸) نشان داد علیرغم اینکه شواهدی از خواص غیرخطی در مطالعات آیت ساهالیا (۱۹۹۶) دیده می‌شود اما به لحاظ آماری با اهمیت نیست. بعلاوه بررسی نوسان نرخ بهره در سری‌های زمانی نشان



می‌داد که در برخی بازه‌های زمانی نوسان به طرز معناداری تغییر می‌کند. این امر انگیزه تحقیق بر روی مدل‌هایی که این پدیده را توضیح دهند افزایش داد. از جمله این تحقیقات می‌توان به پژوهش‌های آنژ و بکرت (۲۰۰۲)، داس (۲۰۰۲) و ژوهانس (۲۰۰۴) اشاره کرد که دریافتند مدل‌های  $RS^{10}$  و نیز مدل‌های پرش<sup>۱۱</sup> می‌توانند خواص خوشه‌ای شدن نوسانات را در نظر گرفته و مسایلی چون کشیدگی بیش از حد دنباله و دنباله‌های پهن نرخ بهره را متعادل کنند. از سوی دیگر بدلیل مشکلاتی که مدل‌های تک عاملی در مدل‌سازی نوسانات نرخ بهره خصوصاً در تلاطم‌های شدید بازار دارند، مدل‌های نوسان تصادفی پیشنهاد شده‌اند. مزیت این مدل‌ها در برازش مناسب نوسانات نرخ بهره است چرا که برای تخمین نوسانات دوره بعد، میزان نرخ بهره فعلی و نیز جزء پیشران دینامیک را مورد استفاده قرار می‌دهند (لی و ژنگ، ۲۰۱۷).

در مطالعات داخلی، پارامترهای مدل واسیچک با استفاده از نرخ بهره استخراجی از اطلاعات قراردادهای آتی سکه طلای شرکت بورس کالای ایران برای بازه سال‌های ۹۱ و ۹۲ و با به کارگیری روش بیشینه بزرگمائی، توسط شناسا، پاکیزه و رستگار (۱۳۹۴) تخمین زده شده است. اگرچه فقدان ابزارهای مالی با درآمد ثابت در کشور مانعی بر مطالعه نرخ بهره در قالب مدل‌های تصادفی بوده است، اما کاربردهایی از بکارگیری مدل‌های دیفرانسیل تصادفی در مدل‌سازی قیمت سهام مشاهده شده است. از آن جمله می‌توان به پژوهش خالوزاده و صدیق (۱۳۸۴) اشاره کرد که پیش-بینی قیمت سهام یک شرکت را با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی و نیز روش ARIMA انجام داده و نتیجه‌گیری کردند که مدل‌های تصادفی نتیجه قابل قبول‌تری دارد. بعلاوه در مطالعه دیگری که توسط نیسی و بیمانی (۱۳۹۳) انجام شده، شاخص کل بورس تهران بر اساس داده‌های واقعی و با کمک مدل تصادفی هستون مدل‌سازی شده است که نتایج حاکی از عملکرد بهتر مدل هستون نسبت به حرکت براونی هندسی بر اساس تکنیک‌های پس‌آزمون و شبیه‌سازی ارزش در معرض خطر بوده است. این دو محقق با گسترش دامنه مدل‌های مورد بررسی خود به دیگر مدل‌های تصادفی در سال ۱۳۹۴، دریافتند که استفاده از مدل‌های دارای جمله جهش مانند مدل مرتون نیز می‌تواند در بهبود عملکرد معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی و اندازه‌گیری ریسک موثر واقع شود.

### ۳- پرسش‌های پژوهش

پرسش اصلی که در این پژوهش در پی پاسخ آن هستیم، تخمین مدل‌های تعادلی برای نرخ بهره کوتاه‌مدت است تا پس از آن از بین این مدل‌ها، مناسب‌ترین مدل مورد انتخاب قرار گیرد.

در این راستا می‌توان به پرسش‌های فرعی دیگری نیز پاسخ داد. این پرسش‌ها مربوط به مقایسه قدرت برازش مدل‌ها، توان پیش‌بینی هر مدل و تایید یا عدم تایید محدودیت‌های اعمالی از سوی هر یک از مدل‌ها است. همچنین بررسی وجود خاصیت بازگشت به میانگین نرخ بهره و مقدار تعادلی این نرخ در بلندمدت نیز قابل بررسی است.

#### ۴- روش شناسی پژوهش

این پژوهش، از حیث هدف، کاربردی و از نظر روش اجرا، توصیفی و از نوع همبستگی و رگرسیون است. گام‌های اجرایی این تحقیق، شامل مطالعات کتابخانه‌ای، جمع‌آوری داده‌ها، تخمین پارامترها به روش گشتاورهای تعمیم‌یافته و مقایسه مدل‌ها بر اساس سه معیار توان برازش، قدرت پیش‌بینی و تایید یا عدم تایید محدودیت‌های اعمالی از سوی هر مدل است.

همانطور که عنوان شد، جهت تخمین پارامترها از روش گشتاورهای تعمیم یافته<sup>۱۲</sup> استفاده شده است. روش گشتاورهای تعمیم‌یافته که از این پس GMM نامیده می‌شود، یک روش عام برای تخمین پارامتر در مدل‌های آماری می‌باشد. مزیت این روش نسبت به روش بیشینه درست‌نمایی و نیز روش بیزین در این است که این دو روش نیاز به مفروضات محدودکننده‌ای درباره تابع توزیع متغیرها دارند، اما روش گشتاورها با تکیه بر نظریه حد مرکزی الزامی بر نرمال بودن تابع توزیع تغییرات نرخ بهره ندارد و تنها می‌بایست متغیر  $\Delta r_t$  ایستا<sup>۱۳</sup> و درونزا<sup>۱۴</sup> باشد. دومین ویژگی مهم روش، پایداری تخمین زنده‌ها و انحراف معیار آنها حتی در شرایطی است که اجزای اخلاص،  $\varepsilon_t$  دارای ناهمسانی واریانس هستند. این مشکل در زمان استفاده از داده‌های گسسته و تقریب ناشی از تبدیل فرآیند پیوسته به گسسته ایجاد می‌شود (چان و همکاران ۱۹۹۲).

برای برآورد پارامترهای مدل‌های نرخ بهره معادله (۷) در حالت پیوسته، ابتدا فرآیند گسسته کردن با استفاده از روابط ۸ و ۹ انجام می‌پذیرد. فرآیند گسسته‌سازی خطای جزئی در برآورد پارامترها ایجاد می‌نماید. لذا برای کاهش میزان خطا، بازه زمانی  $dt$  تا حد امکان کوچک در نظر گرفته می‌شود تا میزان خطای ناشی از گسسته‌سازی حداقل شود.

$$r_{t+dt} - r_t = (\alpha + \beta r_t)dt + \varepsilon_{t+dt} \quad (۸)$$

$$E[\varepsilon_{t+dt}] = 0 \quad \text{و} \quad E[\varepsilon_{t+dt}^2] = \sigma^2 r_t^{2\gamma} dt \quad (۹)$$

حال با فرض عدم وجود همبستگی میان متغیر توصیفی و متغیر خطا، تابع گشتاور به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f_t(\theta) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ r_t \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}) r_t \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{t+1} \\ r_t \varepsilon_{t+1} \\ \varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma} \\ (\varepsilon_{t+1}^2 - \sigma^2 r_t^{2\gamma}) r_t \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $\theta$  برداری از پارامترهای  $\alpha, \beta, \delta^2, \gamma$  است. پارامترهای  $\theta$  با توجه به داده‌های موجود، به گونه‌ای انتخاب می‌شود که برای نمونه با اندازه  $T$  داشته باشیم:

$$g_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T f_t(\theta) \quad (11)$$

روش تعیین پارامترهای  $\theta$  بگونه‌ای است که تابع هدف مسأله به شرح (۱۲) کمینه شود.

$$J_T = g_T'(\theta) W_T g_T(\theta) \quad (12)$$

در مدل‌های دارای محدودیت که تعداد پارامترها کمتر از تعداد معادلات گشتاور است، مدل اصطلاحاً فرامشخص<sup>۱۵</sup> است و لذا برای تعیین ماتریس بهینه از روش هنسن (۱۹۸۲) استفاده می‌شود. او نشان داد انتخاب ماتریس وزنی برابر با معادله (۱۳) به گونه‌ای که در شرایط معادله (۱۴) صدق کند منجر به انتخاب مقادیر  $\theta$  با کوچکترین ماتریس کواریانس تقریبی<sup>۱۶</sup> خواهد شد.

$$W_T(\theta) = S^{-1}(\theta) \quad (13)$$

$$S(\theta) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E[f_t(\theta) f_{t-j}'(\theta)] \quad (14)$$

#### ۴-۱- آزمون معنی‌داری پارامترها و مدل

برای آزمون معنی‌داری پارامترها، ماتریس تقریبی کواریانس که برای برآورد آماره خطای تخمین به شرح ذیل استفاده می‌شود محاسبه می‌گردد:

$$(d' S^{-1} d)^{-1} \quad (15)$$

که ماتریس  $d$  ماتریس ژاکوبین بردار گشتاور جامعه آماری  $E[f_t(\theta)]$  است. از این ماتریس برای آزمون معناداری پارامترها استفاده می‌شود.

$$\sqrt{T}(\theta^* - \theta) \xrightarrow{d} N(0, (d'S^{-1}d)^{-1}) \quad (۱۶)$$

در مدل‌های فرامشخص، برای اطمینان از اینکه محدودیت‌های مزاد به قدر کافی به صفر نزدیک هستند، از آزمونی به صورت رابطه (۱۷) استفاده می‌شود که در آن  $m$  تعداد شرایط گشتاور و  $p$  تعداد پارامترهای مدل است.

$$T \times J_T(\theta) = T \times g_T(\theta^*) W_T(\theta^*) g_T(\theta^*) \xrightarrow{d} \chi_{m-p}^2 \quad (۱۷)$$

بدین ترتیب، مقدار بالای آماره کای دو بیانگر برازش نامناسب مدل خواهد بود.

#### ۵- داده های پژوهش

برای مدل‌سازی نرخ بهره کوتاه مدت در ابتدا باید سری زمانی داده‌ها را استخراج کرد. برای بدست آوردن سری زمانی، نرخ بازده سالانه یعنی  $r_t$  برای هر روز محاسبه می‌شود. لذا نرخ بازده تا سررسید اسناد خزانه اسلامی در هر روز محاسبه و به بازدهی سالانه تبدیل گردیده است. برای تعیین نرخ بازده سالانه اوراق از رابطه شماره (۱۸) استفاده شده است.

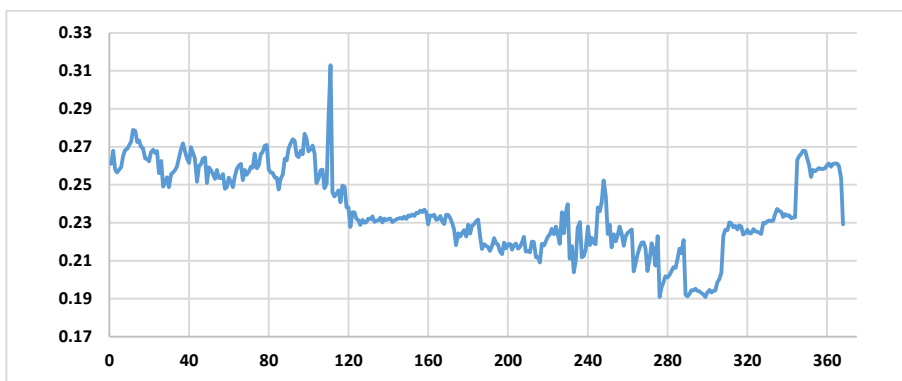
$$r_t = \left( \frac{100000}{P} \right)^{t/365} - 1 \quad (۱۸)$$

که در آن،  $P$  قیمت پایانی اوراق در هر روز معاملاتی،  $t$  تعداد روزهای باقیمانده تا سررسید و  $r_t$  نرخ بازده تا سررسید سالانه اسناد خزانه اسلامی است. لازم به ذکر است، از آنجایی که در هر روز معاملاتی معمولاً بیش از یک نوع اسناد خزانه اسلامی معامله می‌شود و لذا از میانگین بازدهی‌ها در هر روز به عنوان داده روزانه  $r_t$  استفاده شده است. بدین ترتیب از تیرماه سال ۹۴ تا پایان سال ۹۵، تعداد ۳۶۸ داده به عنوان نرخ سود بدون ریسک استخراج گردید.

## ۶- نتایج پژوهش

### ۱-۶- آمار توصیفی

در شکل شماره ۱ روند نرخ بازده سالانه استخراجی ارائه شده است. با مشاهده این روند می‌توان مشاهده نمود که اگرچه این نرخ رفتاری نوسانی داشته است، با این حال، روندی کلی نزولی یا صعودی در رفتار این متغیر مشاهده نشده و پس از مدتی صعود یا نزول، این نرخ به سمت میانگین خود بازگشت داشته است. این موضوع را می‌توان شواهدی اولیه دال بر رفتار بازگشت به میانگین در این متغیر دانست که در بخش‌های بعدی بررسی دقیق‌تری در این خصوص خواهد شد.



شکل شماره ۱- سری زمانی نرخ بهره سالانه در سالهای ۹۴ و ۹۵

در جدول شماره ۲ آمار توصیفی (میانگین، واریانس، بیشینه، کمینه و خودهمبستگی) بازده سالانه اسناد خزانه اسلامی و تغییرات آن نمایش داده شده است.

جدول ۲- آمار توصیفی متغیرها

متغیر	تعداد	میانگین	انحراف معیار	کمینه	بیشینه	ضریب خودهمبستگی			
						p1	p2	p5	p10
$r_t$	۳۶۸	۰,۲۳۷	۰,۰۲۲	۰,۱۹	۰,۳۰	۰,۹۴	۰,۹۰	۰,۸۵	۰,۷۷
$r_{t+1} - r_t$	۳۶۷	-۰,۰۰۰۰۸	۰,۰۰۷	-۰,۰۶۷	۰,۰۳۵	-۰,۱۶	-۰,۱۵	۰,۰۲	-۰,۰۶

همانطور که مشاهده می‌شود متوسط نرخ سود سالانه این اوراق برابر ۲۳/۷ درصد بوده و بین ۱۹ درصد تا ۳۰ درصد در نوسان بوده است. همچنین اگرچه ضریب خودهمبستگی بازده سالانه

کاهش می‌دهد و در سطح پایینی است. این موضوع شواهدی از ایستادگی نرخ بهره را نشان می‌دهد که پیش فرض استفاده از روش GMM است.

### ۲-۶ - تخمین پارامترها

با اجرای روش گشتاورهای تعمیم یافته در محیط نرم افزار MATLAB و تخمین پارامترها، نتایج حاصل به همراه آماره کای-دو و سطح معنی داری هر یک (در داخل پرانتز) در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۳ - نتایج برآورد پارامترهای مدل‌های مورد بررسی

مدل	$\alpha$	$\beta$	$\sigma^2$	$\gamma$	آزمون $\chi^2$	درجه آزادی	$R_1^2$	$R_2^2$	$\mu$
مرتون	۰,۰۸۱۳ (۰,۴۴)	۱	۰,۱۲۳ (۰,۰۰)	۰	۶,۷ (۰,۳۵)	۲	۰,۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰	-
واسیچک	۳,۳ (۰,۰۱۲)	۱۳,۹- (۰,۰۱۶-)	۰,۱۲ (۰,۰۰)	۰	۰,۹۸ (۰,۳۲)	۱	۰,۰۲۹۸	۰,۰۰۰۰	٪۲۳,۷
CIR SR	۳,۵۸ (۰,۰۰۲)	۱۵,۱۷- (۰,۰۰۴-)	۰,۲۵ (۰,۰۰)	۰,۵	۰,۷۸ (۰,۳۷)	۱	۰,۰۲۹۷	۰,۰۰۰۶	٪۲۳,۶
دوئان	۰	۱	۰,۵۴ (۰,۰۰)	۱	۵,۱۶ (۰,۱۶)	۱	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۲۶	-
GBM	۰	۰,۱۹ (۰,۷۲)	۰,۵۳ (۰,۰۰)	۱	۵,۰۱ (۰,۰۸)	۲	۰,۰۰۰۳	۰,۰۰۲۶	-
برنان- شوارتز	۳,۷۷ (۰,۰۰۶)	۱۶,۱- (۰,۰۰۷-)	۰,۵۲ (۰,۰۰)	۱	۰,۶۲ (۰,۴۳)	۱	۰,۰۲۹۶	۰,۰۰۲۶	٪۲۳,۴
CIR VR	۰	۱	۱,۱ (۰,۰۰)	۱,۵	۵,۶۷ (۰,۱۲)	۳	۰,۰۰۰۱	۰,۰۰۶۲	-
CKLS	۴,۶ (۰,۰۰۷)	۱۹,۴- (۰,۰۰۷-)	۶,۴ (۰,۹۸)	۲,۷ (۰,۲۳)	---	---	۰,۰۲۷	۰,۰۱۸	٪۲۳,۵

بر اساس نتایج جدول شماره ۳ و سطح معنی داری آماره کای دو، مدل مرتون در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل پذیرش نمی‌باشد. مدل GBM نیز آماره کای دو برابر ۵ دارد و در سطح اطمینان ۹۰ درصد رد می‌گردد. سایر مدل‌ها قدرت توضیح‌دهندگی مناسبی دارند. بر اساس سطح

آماره کای دو که براساس مقدار تابع هدف GMM محاسبه می‌شود، می‌توان مدل‌ها را رده‌بندی کرد که بر اساس آن مدل برنان- شوارتز از دیگر مدل‌های دارای محدودیت، عملکرد بهتری داشته است. بررسی پارامتر  $\beta$  نیز نتایج جالبی را روشن می‌سازد. به استثنای مدل GBM، پارامتر  $\beta$  در سایر مدل‌ها قویاً بزرگتر از صفر بوده و از لحاظ آماری معنادار است. از این رو نمی‌توان ویژگی بازگشت به میانگین نرخ بهره را بازار ایران رد کرد.

یافته‌ها نشان می‌دهد که برازش مدل CIR SR با مقدار  $\gamma$  برابر ۰,۵، تفاوت محسوسی با مدل برنان- شوارتز با پارامتر  $\gamma$  برابر ۱ ندارد. همچنین برازش دو مدل دوئان و CIR VR که تنها در مقدار این پارامتر با یکدیگر فرق دارند، تفاوت چندانی ندارد. این موضوع نشان می‌دهد درحالت ثبات سایر پارامترها، تفاوت مقدار این پارامتر تاثیر محسوسی در برازش نرخ بهره ایجاد نمی‌کند. همچنین مقدار  $\gamma$  در مدل بدون محدودیت CKLS حدوداً برابر ۲,۷ برآورد شده که از مقادیر پیشنهادی در ادبیات که حداکثر برابر ۱,۵ بوده بالاتر است ولی به لحاظ آماری معنی دار نیست. یکی از کاربردهای مدل‌های تعادلی استخراج میانگین بلندمدت نرخ بهره است. با مقایسه معادله‌های ۲ و ۷ که دو صورت مختلف برای بیان مدل‌های نرخ بهره می‌باشند، روابط زیر میان پارامترهای این دو مدل حاصل می‌شود. با فرض  $\alpha \neq 0$  داریم:

$$\alpha = k\mu \quad \text{و} \quad \beta = -k \quad (19)$$

و لذا میانگین بلندمدت نرخ بهره به صورت رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu = \frac{\alpha}{-\beta} \quad (20)$$

با محاسبه این رابطه، نرخ بهره بلندمدت برآورد می‌شود که در ستون آخر جدول فوق برای ۴ مدل واسیچک، CIR SR، برنان- شوارتز و CKLS نشان داده شده است. به عبارتی نرخ بهره بلندمدت بر اساس مدل‌های تخمینی بین ۲۳/۴ درصد تا ۲۳/۷ درصد محاسبه می‌شود.

### ۳-۶ - مقایسه توان برازش مدل‌ها

مدل‌ها را از منظر توان آنها در برازش تغییرات و نیز جزء نوسان نرخ بهره نیز می‌توان مقایسه نمود. برای این منظور، دو شاخص به پیشنهاد چان و همکاران (۱۹۹۲) مورد استفاده قرار گرفته است. شاخص اول  $R_1^2$  توان مدل در برازش میزان تغییرات نرخ بهره را می‌سنجد و نشان می‌دهد هر

مدل تا چه میزان تغییرات در نرخ بهره را توضیح می‌دهد. شاخص  $R_2^2$  توان مدل در برازش جزء نوسان نرخ بهره و یا عبارتی مجذور تغییرات را اندازه‌گیری می‌کند.

$$R_1^2 = \frac{\sum((\alpha + \beta r_t) - \sum(r_{t+1} - r_t)/T)^2}{\sum((r_{t+1} - r_t) - \sum(r_{t+1} - r_t)/T)^2} \quad (21)$$

$$R_2^2 = \frac{\sum(\sigma^2 r_t^{2Y} dt - \sum(r_{t+1} - r_t)^2/T)^2}{\sum((r_{t+1} - r_t)^2 - \sum(r_{t+1} - r_t)^2/T)^2} \quad (22)$$

نتایج اندازه‌گیری این دو شاخص در دو ستون انتهایی جدول شماره دو نشان داده شده است. در مدل مرتون بدلیل اینکه جزء پیشران مقداری ثابت دارد و مقدار نوسان نیز ثابت است، دو شاخص  $R_1^2$  و  $R_2^2$  مقداری برابر صفر خواهند داشت. در مدل واسیچک نیز نوسان نرخ بهره مقداری ثابت دارد و لذا شاخص  $R_2^2$  به ازای هر سری دلخواه از داده‌ها، برابر صفر خواهد شد. بهترین نتایج شاخص  $R_1^2$  مربوط به مدل‌های واسیچک، برنان-شوارتز، CIR VR و مدل بدون محدودیت CKLS است که حدود ۲،۹٪ از تغییرات کل را نشان داده‌اند. سایر مدل‌ها عملکرد خوبی نداشته و توان پایینی در برازش تغییرات نرخ بهره از خود نشان دادند.

شاخص  $R_2^2$  نیز برای کلیه مدل‌ها پایین بوده است. مطابق نتایج جدول (۳) مدل‌های با محدودیت به غیر از مدل CIR VR کمتر از ۰،۳٪ تغییرات در مجذور تغییرات نرخ بهره را برازش کردند و لذا از این بابت برتری خاصی به یکدیگر نداشته‌اند. مدل بدون محدودیت CKLS نیز حدوداً ۱،۸٪ از مجذور تغییرات نرخ بهره یا همان نوسان نرخ بهره را برازش کرده و نسبت به کلیه مدل‌های با محدودیت عملکرد قابل قبول‌تری داشته است. اما همچنان این نسبت پایین است و مدل‌ها از این بابت ضعیف بوده‌اند. پارامتر Y در مدل CIR VR برابر ۱،۵ و در مدل CKLS برابر ۲،۷ برآورد شده است و با توجه به نسبت بالاتر شاخص  $R_2^2$  این دو مدل، می‌توان نتیجه گرفت جزء نوسان نرخ بهره تا حدودی به مقدار نرخ بهره وابسته است ولی مدل‌سازی دقیق‌تر آن جای بررسی دارد.

#### ۴-۶- بررسی توان پیش‌بینی مدل‌ها

در این قسمت به بررسی توان پیش‌بینی مدل‌ها و اعتبار هر یک بر اساس این موضوع می‌پردازیم. بدین منظور از مقادیر واقعی نرخ بازده تا سررسید جدیدترین اسناد خزانه اسلامی موجود در زمان انجام پژوهش (اسناد خزانه شماره ۱۱) - که گردش معاملاتی بیشتری نسبت به سایر اسناد خزانه قابل معامله داشته است - استفاده کرده‌ایم. سپس توان پیش‌بینی هر یک از مدل‌ها را برای دوره ۵۰ روز اول معاملاتی سال ۱۳۹۶ مورد بررسی قرار داده و بر اساس معیار جذر

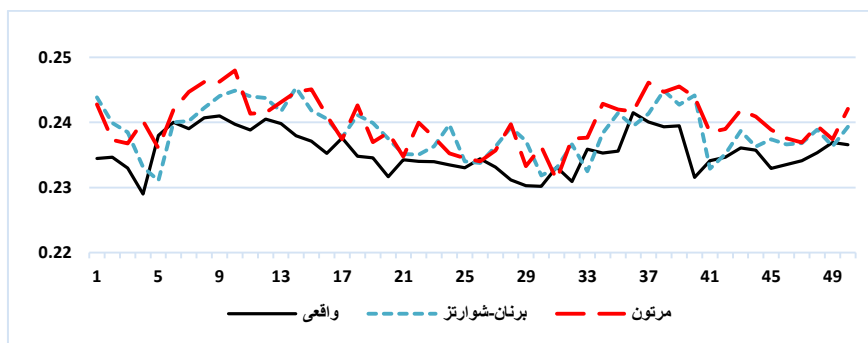


میانگین مجذور خطا<sup>۱۷</sup> (RMSE) بین مقادیر پیش‌بینی شده بازده و مقدار واقعی بازده، مدل‌ها اولویت‌بندی شده‌اند. در جدول زیر نتایج این شاخص برای مدل‌های مورد بررسی ارائه شده است.

جدول ۴- مقدار RMSE بین مقادیر واقعی و برآورد شده بازده تا سررسید

مدل	RMSE
مرتون	٪۰,۵۲۶
واسیچک	٪۰,۴۵۸
CIR SR	٪۰,۴۵۳
دوئان	٪۰,۵۰۳
GBM	٪۰,۴۸۷
برنان-شوارتز	٪۰,۴۴۵
CIR VR	٪۰,۵۲۲
CKLS	٪۰,۴۹۸

همانطور که مشاهده می‌شود مدل برنان- شوارتز بر اساس این معیار بالاترین دقت و مدل مرتون کمترین دقت را داشته‌اند. در شکل زیر نیز مقادیر واقعی و پیش‌بینی شده این دو مدل نشان داده شده است.



شکل شماره ۳- مقایسه مقادیر پیش‌بینی مدل‌های برنان-شوارتز و مرتون با مقادیر واقعی

بر اساس این شکل، ضعف مدل مرتون در پیش‌بینی مقادیر واقعی بازده به دلیل پیش‌بینی بیشتر از نرخ واقعی بازدهی بوده است زیرا عموماً نرخ پیش‌بینی شده به وسیله مدل مرتون بیش از نرخ واقعی است.

## ۵-۶ - مقایسه دو به دو مدل‌ها از جنبه وضع محدودیت‌ها

بعد از برآورد مدل‌ها و مقایسه آنها از منظر برازش و پیش‌بینی، برای مقایسه دقیق‌تر، آزمونی برای بررسی مفروضات مدل‌ها در اعمال محدودیت بر روی پارامترها انجام می‌پذیرد. این مقایسه به صورت دو به دو و میان مدل‌هایی که بر روی پارامتر خاصی محدودیت اعمال کرده‌اند و مدل‌های نظیر آنها که چنین محدودیتی وضع نکرده‌اند، انجام می‌شود. به طور مثال تفاوت مدل واسیچک و مرتون در پارامتر  $\beta$  است. لذا می‌توان مدل مرتون را که پارامتر  $\beta$  را برابر ۱ فرض می‌کند، زیرمجموعه‌ای<sup>۱۸</sup> از مدل واسیچک در نظر گرفت.

بدین منظور از روش آزمون فرض پیشنهادی نوی-وست (۱۹۸۷) استفاده می‌شود. آماره آزمون به صورت تفاضل تابع هدف GMM برای دو مدل با محدودیت و بدون محدودیت تعریف می‌شود، با این شرط که هر دو مدل از ماتریس وزنی مدل بدون محدودیت برای تعیین پارامترهای بهینه استفاده نمایند. این آماره به صورت تقریبی از تابع توزیع کای-دو با تعداد درجه آزادی مساوی با تعداد محدودیت‌های مورد تفاضل دو مدل، پیروی می‌کند.

$$R = T|J(\hat{\theta}) - J(\bar{\theta})| \quad (24)$$

در این رابطه  $J(\bar{\theta})$  تابع هدف مدل بدون محدودیت،  $J(\hat{\theta})$  تابع هدف مدل با محدودیت و T تعداد داده‌های نمونه است. پایین بودن مقدار آماره P برای آماره کای-دو نشان‌دهنده رد شدن فرض مدل در مورد محدود بودن مقدار پارامترهاست. نتایج انجام این آزمون در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۵- مقایسه دو به دو مدل‌ها با مدل نظیر بدون محدودیت آنها

مدل نظیر بدون محدودیت پارامتری	مدل با پارامترهای محدود	فرض صفر	آزمون $\chi^2$	مقدار P
واسیچک	مرتون	$0 = \alpha$	۰,۰۰۰۱	۰,۹۹
GBM	دوئان	$1 = \beta$	۰,۰۶	۰,۸
برنان-شوارتز	دوئان	$0 = \alpha$ $1 = \beta$	۱۲,۶	۰,۰۰۱
برنان-شوارتز	GBM	$0 = \alpha$	۱۱,۷۷	۰,۰۰۰

مطابق نتایج جدول فوق، مدل مرتون را نمی‌توان نسبت به مدل واسیچک رد کرد. یعنی فرض مدل مرتون در برابر بودن پارامتر  $\beta$  با یک، رد نمی‌شود، چراکه مقدار P حدود ۰,۹۹ است. بعلاوه مدل دوئان نیز برتری نسبت به GBM ندارد.

مدل دوئان برخلاف برنان-شوارتز که بدون محدودیت است،  $\alpha$  را برابر صفر و  $\beta$  را برابر ۱ در نظر می‌گیرد. مقدار P در آزمون مربوطه برابر ۱۲,۶ است، لذا برتری مدل دوئان نسبت به مدل برنان-شوارتز قویاً رد می‌شود. بدین معنی که فرض وجود همزمان محدودیت‌های فوق بر روی دو پارامتر  $\alpha$  و  $\beta$  به لحاظ آماری معنادار نیست. مدل GBM را نیز می‌توان در قالب مدل برنان-شوارتز برازش نمود. اما این بار تفاوت دو مدل تنها در مقدار پارامتر  $\alpha$  است. بر اساس نتایج بدست آمده فرض صفر بودن پارامتر  $\alpha$  قویاً رد می‌گردد. لذا مدل GBM که محدودیت در پارامتر  $\alpha$  لحاظ کرده، نسبت به مدل برنان-شوارتز برتری ندارد.

## ۷- نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله رفتار نرخ بهره بدون ریسک در کوتاه‌مدت با استفاده از هشت مدل دیفرانسیل تصادفی و با بهره‌گیری از داده‌های بازده روزانه اسناد خزانه اسلامی بررسی و پارامترهای این مدل‌ها به روش GMM برآورد گردید. برای ارزیابی مدل‌ها، عملکرد آنها در برازش تغییرات نرخ بهره و نوسان نرخ بهره (با استفاده از توزیع کای-دو در روش GMM)، توان پیش‌بینی مدل‌ها (به وسیله معیار RMSE) و آزمون محدودیت‌های اعمالی از سوی هر مدل (با روش نوبی-وست) سنجیده شد. یافته‌ها نشان می‌دهد مدل بدون محدودیت CKLS و برنان-شوارتز بهترین برازش تغییرات و نوسان نرخ بهره را داشته‌اند. همچنین مدل برنان-شوارتز از لحاظ خطای پیش‌بینی توان بالاتری در مدل‌سازی نرخ بهره از خود نشان داد. از منظر محدودیت اعمالی در پارامترها، مدل برنان-شوارتز نسبت به مدل‌های زیرمجموعه خود یعنی GBM و دوئان، عملکرد بهتری داشته ولی سایر مدل‌های مرجع برتری مشهودی نسبت به مدل زیرمجموعه خود نداشته‌اند. بعلاوه نتایج این پژوهش حاکی از آن است که نرخ بهره در بازار ایران تمایل به بازگشت به میانگین بلندمدت خود دارد و بالا بودن پارامتر  $\beta$  بیانگر سرعت بالای بازگشت به میانگین می‌باشد. این نتیجه با تحقیقات هونگ و همکاران (۲۰۱۰) و دالکوئیست (۱۹۹۶) همخوانی دارد اما برخلاف یافته‌های سیتورس (۲۰۱۴) و ژانگ، چن و لی (۲۰۱۷) است. بعلاوه این تحقیق نشان داد مدل‌هایی که جزء نوسان نرخ بهره تابعی درجه بالاتری از نرخ بهره است، یعنی میزان پارامتر  $Y$  بالاتر است، توان بیشتری در برازش نوسان نرخ بهره نشان داده‌اند. مطالعات زیادی مانند چان و همکاران (۱۹۹۲)، سیتورس (۲۰۱۴) و هونگ و همکاران (۲۰۱۰) این خاصیت را تأیید کرده‌اند. اما بررسی دقیق‌تر ویژگی‌های نوسان نرخ بهره مانند خوشه‌ای شدن نوسانات در طول زمان نیاز به داده‌های بیشتری دارد.

بر اساس موارد عنوان شده مدل بدون محدودیت CKLS و برنان-شوارتز برازش بهتری در تشریح رفتار نرخ سود بدون ریسک داشتند و لذا جهت تبیین نتایج سیاست‌گذاری‌های کلان

اقتصادی استفاده از این دو مدل توصیه می‌گردد. همچنین همانطور که گفته شد، مدل برنان-شوارتز، عملکرد بهتری در پیش‌بینی دارد لذا پیشنهاد می‌شود، سرمایه‌گذاران از این مدل جهت پیش‌بینی نرخ سود بدون ریسک در قیمت‌گذاری اوراق بهادار و مدیریت ریسک استفاده نمایند. از دیگر خواص استخراجی نرخ اسناد خزانه بر اساس یافته‌های این پژوهش، بازگشت این نرخ به میانگین بلندمدت خود (بین ۲۳/۴ درصد تا ۲۳/۷ درصد) است که از این ارقام جهت استفاده به عنوان نرخ بلندمدت نرخ بدون ریسک در بازار ایران می‌توان استفاده نمود.

در نهایت پیشنهاد می‌شود در مطالعات بعدی کاربردهایی از قیمت‌گذاری اوراق با درآمد ثابت با کمک مدل‌های این پژوهش مورد بررسی قرار گیرد. بعلاوه می‌توان مدل‌های چندعاملی تعادلی یا مدل‌های غیرآرbitراژی نیز بررسی و مورد مقایسه قرار گیرند.

### فهرست منابع

- \* خالوزاده حمید، خاکی صدیق علی، (۱۳۸۴)، مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، مجله تحقیقات اقتصادی، شماره ۶۹
- \* شناسا فرید، پاکیزه کامران، رستگار علیرضا، (۱۳۹۴)، مدل‌سازی نرخ بازده موردانتظار در بازار ایران با استفاده از قراردادهای آتی سکه طلا، مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره بیست و پنجم.
- \* نیسی عبدالساده، پیمانی مسلم، (۱۳۹۳)، مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هوستون، فصلنامه پژوهشنامه اقتصادی، شماره ۵۲
- \* نیسی عبدالساده، پیمانی مسلم، (۱۳۹۴)، مدل‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی، بورس اوراق بهادار.
- \* Andersen, T.G., Lund, J. (1997) Estimating continuous-time stochastic volatility models of the short-term interest rate, *Journal of Econometrics*, 77, 343–377.
- \* Ang, A., Bekaert, G. (2002) Regime switches in interest rates, *Journal of Business and Economic Statistics*, 20, 163–182.
- \* Aït Sahalia, Y. (1996). Testing continuous-time models of the spot interest rates, *Review of Finance Studies*, 9, 385–426.
- \* Brennan, M. J. and Schwartz, E. S. (1980) Analyzing convertible bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15, 907-929.
- \* Chan, K., Karolyi, A., Longstaff, F., and Sanders, A. (1992). An Empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *Journal of Finance*, 47, 1209-1227
- \* Courtadon, G., (1982), The Pricing of Options on Default-Free Bonds, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17, 75-100
- \* Cox, John, C. Jonathan E. I., and Stephen A. R. (1980). An analysis of variable rate loan contracts, *Journal of Finance*, 35, 389-403
- \* -Cox, John, Jonathan E. I. and Stephen A. R. (1985). A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, 53, 385-407.
- \* -Dahlquist, M. (1996). On alternative interest rate processes, *Journal of Banking and Finance*, 20, 1093-1119.
- \* Das, S.R., (2002). The surprise element: Jumps in interest rates. *Journal of Econometrics* 106, 27-65.
- \* Dothan, U. L. (1978). On the term structure of interest rates, *Journal of Financial Economics*, 6, 59-69.
- \* -Hansen, L. P. (1982). Large sample properties of Generalized Method of Moments Estimators, *Econometrica*, 50, 1029-1054.
- \* Hong, Y., Li, H., Zhao, F., (2004). Out-of-sample performance of discrete-time spot interest rate models. *Journal of Business and Economic Statistics* 22, 457-474.

- \* -Hong, Y, Lin H, Wang, Sh, (2010), Modeling the dynamics of Chinese spot interest rates, *Journal of Banking & Finance* 34, 1047-1061
- \* Johannes, M., (2004). The statistical and economic role of jumps in continuous-time interest rate models, *Journal of Finance* 59, 227-260.
- \* -Kwok, Y-K. (2008), *Mathematical Models of Financial Derivatives*, 381-440, Second edition, Springer
- \* Li, S, Zheng, T., (2017). Modeling spot rate using a realized stochastic volatility model with level effect and dynamic drift, *The North American Journal of Economics and Finance* 40, 200–221.
- \* Li, Y., Lio, X., Yu, J. (2015). A Bayesian chi-squared test for hypothesis testing, *Journal of Econometrics* 189,54-69
- \* Marsh, T. A., Rosenfeld, E.R. (1983), Stochastic process of interest rate and equilibrium bond prices, *Journal of finance* 38, 635-646
- \* Merton, R. C. (1973). An intertemporal capital asset pricing model, *Econometrica*,41, 867–87.
- \* Munk, C. (2011). *Fixed income modeling*, first edition, Oxford university Press
- \* Newey, W. and West, K. (1987) Hypothesis testing with efficient method of moments estimation, *International Economic Review*, 28, 777-787.
- \* Nowman, K.B., 1997, Guassian estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates, *Journal of Finance* 52, 1395-1706.
- \* Pinto J.E. , Petitt B.P. , Pirie W.L. ,(2015), *Fixed income analysis*, 3<sup>rd</sup> edition, 507-510, Wiley Press
- \* Pritsker, M. (1998). Nonparametric density estimation and tests of continuous time interest rate models, *Review of Financial Studies*, 11, 449–487.
- \* Ronchetti, E., Trojani, F., (2001), Robust inference with GMM estimators. *Journal of Econometrics* 101, 37-69.
- \* Tse, Y. K. (1995) Some international evidence of stochastic behavior of interest rates, *Journal of International Money and Finance*, 14, 721-738.
- \* Sitorus R. E., (2014), A Study of Alternative Single Factor Short Rate Models: Evidence from United Kingdom (1975-2010), *Advances in Economics and Business* 2(5): 206-213
- \* Sorwar, G. (2011), Estimating single factor jump diffusion interest rate models, *Applied Financial Economics*, 21.
- \* Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.
- \* Zhang, Y., Chen, Zh., Li, Y (2017), Bayesian testing for short term interest rate models, *Finance Research Letters* 20, 146-152

## یادداشت‌ها

---

- <sup>1</sup> State Variable
- <sup>2</sup> Short rate
- <sup>3</sup> Drift
- <sup>4</sup> Gaussian model
- <sup>5</sup> Square-Root process
- <sup>6</sup> Geometric Wiener process
- <sup>7</sup> Geometric Brownian Motion
- <sup>8</sup> GARCH
- <sup>9</sup> drift
- <sup>10</sup> regime switching
- <sup>11</sup> Jump model
- <sup>12</sup> Generalized method of moments, GMM
- <sup>13</sup> Stationary
- <sup>14</sup> Ergodic
- <sup>15</sup> Over-Identified models
- <sup>16</sup> Asymptotic covariance matrix
- <sup>17</sup> Root-mean-square error (deviation)
- <sup>18</sup> Nested models