مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌وچهارم / بهار ۱۳۹۷

بررسی دنباله بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۸/۲۱ تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۹/۲۳

زهرا شیرازیان[۱]

چکیده

این پژوهش به بررسی دنباله بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران می پردازد. ارزیابی دقیق ریسک در بازارهای مالی به منظور سرمایه گذاری و در نتیجه تخصیص بهینه سرمایه، از اهمیت حیاتی برخوردار است . افزایش نوسانات بازارهای مالی در دهه گذشته، موجب پیشرفت ابزارهای پیچیده مدیریت ریسک شده است. شکلهای صریح دمهای توزیع، اطلاعات مهمی را برای مدیران ریسک و سرمایه گذاران فراهم می کنند. در این پژوهش، یک توریع وقتی دم کلفت به حساب می آید.که دمهای توزیع احتمال به صورت تابعی توانی نزول کنند .وجود رفتار تابع توانی در دم توزیع، عواقب مهمی برای رفتار یک متغیر تصادفی به همراه دارد مثلا، ممکن است، گشتاورهای نامتناهی وجود داشته باشند. در این پژوهش از ۲۴۲۰ مشاهده روزانه شاخص بورس تهران و بازده لگاریتمی آن از ابتدای سال ۸۷ تا مرداد سال ۹۶ استفاده شده است. با استفاده از نرم افزار متلب به منظور بررسی دم های توزیع بازده های شاخص بورس تهران از توزیع های لوی- پایدار، مطالعه رفتار مجانبی (رگرسیون) log-logتابع توزیع تجمع CDF ،تخمین گر هیل و نظریه مقدار مفرط استفاده می شود. نتیجه این توزیع ها نشان میدهد که در توزیع بازده های لگاریتمی شاخص بورس تهران دم کلفتی وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: تابع توزیع تجمع، تخمین‌گر هیل، نظریه مقدار مفرط، رفتار مجانبی (رگرسیون) log-log.

۱- عضو هیات علمی گروه مدیریت واحد ملایر.عضو باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان دانشگاه آزاد اسلامی واحد ملایر. ملایر. ایران. Zahra.shirazian@gmail.com

۱- مقدمه

ارزیابی دقیق ریسک در بازارهای مالی به منظور سرمایه گذاری و در نتیجه تخصیص بهینه سرمایه، از اهمیت حیاتی برخوردار است . افزایش نوسانات بازارهای مالی در دهه گذشته، موجب پیشرفت ابزارهای پیچیده مدیریت ریسک شده است. درمبحث دارایی در معرض خطر[۱] پیش بینی دقیق احتمال یک تغییر مفرط [۲]در ارزش یک سبد، هم برای مدیریت ریسک و هم برای تنظیم بازار، ضروری است. تغییرات مفرط، به دم های توریع داده هایی که برآیند را بوجود می آورند مربوط می شوند. شکلهای صریح دمهای توزیع، اطلاعات مهمی را برای مدیران ریسک و سرمایه گذاران فراهم می کنند. مطالعات تجربی نشان داده است که توزیع‌های سرمایه گرایش دارند، تا دمهایی کلفت‌تر[۳] از دمهای توزیع گاوسی داشته باشند(۱). علاوه بر این، اغلب اوقات معلوم می شود چنین توزیع‌هایی دمهای نامتقارن دارند.

در این پژوهش، یک توریع وقتی دم کلفت به حساب می آید.که دمهای توزیع احتمال به صورت تابعی توانی نزول کنند .وجود رفتار تابع توانی در دم توزیع، عواقب مهمی برای رفتار یک متغیر تصادفی به همراه دارد مثلا، ممکن است، گشتاورهای نامتناهی وجود داشته باشند. مقدار مشخص نمای این تابع توانی، از اهمیت زیادی برخوردار است. در ضمن، بجای آنکه یک توریع منفرد را به کل نمونه تحمیل کرد، ممکن است بتوان تنها دمهای توریع داده ها را با استفاده از قوانین حدی بررسی کرد، به شرط آنکه دمها برای مقاصد عملی با اهمیت باشند. بعلاوه مدلسازی پارامتری دمها برای برونیابی تعیین احتمال صدک[۴] ها حتی بیش از مفرط ترین مشاهده در نمونه، مناسب به نظر می رسد. یکی از این رهیافتها نظریه مقدار مفرط[۵] (EVT) است که چارچوبی رسمی برای مطالعه رفتار دم توزیع های دم کلفت در این پژوهش است .

قوانین لوی - پایدار[۶] یک رده غنی، از توزیعهای احتمالی هستند که در آنها چولگی[۷] و دنباله کلفت مجاز است و ویژگیهای ریاضی جالبی را به نمایش می گذارند دلایل زیادی برای استفاده از قوانین لوی- پایدار برای توصیف سیستم های پیچیده وجود دارد. یک دلیل قضیه تعمیم یافته حد مرکزی است که بیان می کند: تنها حد نابدیهی مجموع های نرمال شده داده های مستقل و یکنواخت توزیع شده، توزیع لوی- پایدار است. صحبت از این است که بعضی از کمیت های مشاهده شده، مجموع بسیاری از داده های کوچکتر، همچون قیمتهای سرمایه هستند. لذا باید از توزیع لوی- پایدار برای توصیف چنین سیستمهایی، استفاده کرد. دلیل دوم برای استفاده از توزیعهای لوی- پایدار تجربی است: بسیاری از مجموعهای بزرگ داده ها دارای چولگی و دم های کلفت در توزیعشان هستند(۲، ۳، ۴). چنین مجموعه داده هایی را به سختی می توان با یک مدل گاوسی تعریف کرد و معمولا یک توزیع لوی -پایدار به خوبی از عهده چنین

کاری بر می آید. در این پژوهش، به منظور بررسی دم های توزیع بازده های شاخص بورس تهـران از توزیـع هـای لـوی- پایـدار، مطالعه رفتار مجانبی (رگرسیون) log-logتابع توزیع تجمع[۸] CDF ،تخمین گر هیل[۹] و نظریه مقدار مفرط استفاده می شود. در این مقاله معلوم می شود که در توزیع بازده های لگاریتمی شاخص بورس تهران دم کلفتی وجـود دارد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

توزیع لوی که در تیوری احتمال و آمار به نام پاول لوی نامگذاری شده ، یک تابع احتمال پیوسته از یک متغیر تصادفی غیرمنفی است.در طیف سنجی، این توزیع بافرکانس (بعنوان متغیر وابسته)بعنوان یک پروفیل ون واروالس معروف است و یک مورد خاصی از تابع گاما معکوس است. برای توصیف توریع لوی ـ پایدار به ۴ پارامتر نیاز داریم: شاخص پایداری $\alpha \in (0,2)$ که می تواند شاخص دم، نمای دم یا نمای مشخصه باشد)، پارامتر چولگی $\beta \in [-1,1]$ پارامتر مقیاس $\sigma > 0$ و پارامتر مکان $\mu \in R$.نمای دم α آهنگ افت دمهای تابع توریع را تعیین می کند .اگر $\alpha = 2$ باشد توزیع گاوسی و اگر ۲ > α واریانس نامتناهی است. همچنین، اگر 1< α باشد، میانگین توزیع موجود و برابر μ می باشد. به طور کلی، گشتاور p ام یک متغیرتصادفی پ لوی – پایدار متناهی است اگر و تنها اگر $p < \alpha$ باشد. اگر پارامتر چولگی B مثبت باشد، توزیع به سمت راست منحرف می شود و اگر منفی باشد به سمت چپ چولگی می یابد. هنگامیکه B= ۰ است، تابع توزیع حول μ متقارن می باشد. وقتی α به ۲ میل می کند Bتاثیر خود را از دست داده و تابع توزیع، علیرغم وجود آن، به تابع توزیع گاوسی نزدیک می شود. دو پارامتر آخر σ و μ همان پارامترهای مقیاس و مکان معمول می باشند. یعنی σ پهنا و μ جابجایی مد توزیع (قله)راتعیین می کند. هیل روشی برای تخمین شاخص دم ارائه کرد که برای کل تابع توزیع یک شکل پارامتری فرض نمی کند و تنها روی رفتار دم متمرکز می شود. از تخمین گر هیل برای تخمین شاخص دم α وقتی که دم بالایی (یا با ضرب نمونه در ۱ -و بعد اقدامی -مشابه با قبل برای دم پایینی) توزیع به شکل $1-F(x)=Cx^{-a}$ استفاده می شود اگر $X1 \geq X2 \geq \ldots \geq XN$ از داده هایی با توزیع F استخراج شوند، آنگاه تخمین گر هیل، تخمینی از α به صورت تابعی از kتا از بزرگترین اعداد مجموعه داده ها بدست می دهد. در واقع اگر توزیع مورد نظر دقیقا پارتو باشد، آنگاه تخمین گر هیل براحتی می تواند به صورت یک تخمین بیشترین احتمال ساخته شود. یکی از مهمترین سوالاتی که در مطالعات دم ظاهر می شود اینست که: تغییرات مفرطی را که باید در بازارهای مالی انتظار داشت کدامند؟ آیا ما بزرگترینشان را قبلا ا مشاهده کرده ایم یا باید انتظار تغییرات باز هم

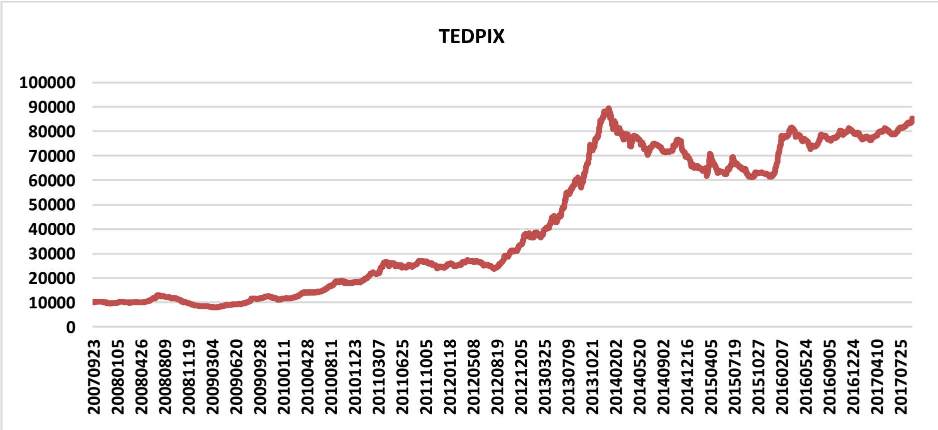
بزرگتری را داشته باشیم؟ آیا فرآیندهای نظری که بتوانند نوع دم کلفت حاصل از تحلیلهای تجربی را مدلسازی کنند، وجود دارند؟ ما در چارچوب نظریه مقدار مفرط می توانیم به این سوالات پاسخ دهیم. نظریه مقدار مفرط چارچوب قابل اعتماد و قدرتمندی برای مطالعه رفتار دم یک توزیع است(۳)در واقع ، مطالعات متعددی درباره مقادیر مفرط در منابع مالی در چند سال اخیر انجام شده است (۱۳و۱۴و۱۵)توزیع نرمال یک توزیع حدی مهم برای مجموعها یا میانگینهای نمونه است، که در قضیه حد مرکزی به آن پرداخته می شود. به طور مشابهی، از خانواده توزیعهای مقدار مفرط برای مطالعه توزیع حدی بیشینه های نمونه استفاده می گردد. این خانواده را می توان در قالب یک پارامتری سازی منفرد که با عنوان توزیع تعمیم یافته مقدار مفرط (GEV) شناخته می شود، ارائه کرد .قضیه فیشر و تیپت که در بطن نظریه مقدار مفرط قرار دارد، سرو کارش با همگرایی بیشینه ها است.

۱) اگر دم به طور نمایی کاهش یابد، آنگاه G از نوع گامبل(Gumble) و $\xi = 0$ است. تابع توزیع دم نازک (نرمال، logنرمال، نمایی، گاما) بوده و همه گشتاورها متناهی خواهند بود .
۲) اگر دم به طور هذلولوی کاهش یابد، آنگاه G از نوع فرچت(Frechet) و $\xi > 0$ است. تابع توزیع دم کلفت (پارتو،کشی، - tاستیودنت) است و در گشتاورهای بزرگتر از $\alpha = 1/\xi$ وجود ندارند.
۳) اگر دم متناهی باشد، آنگاه G از نوع ویبول(Weibull) و $\xi < 0$ خواهد بود. تابع توزیع کراندار(یکنواخت، بتا) و همه گشتاورها وجود دارند.

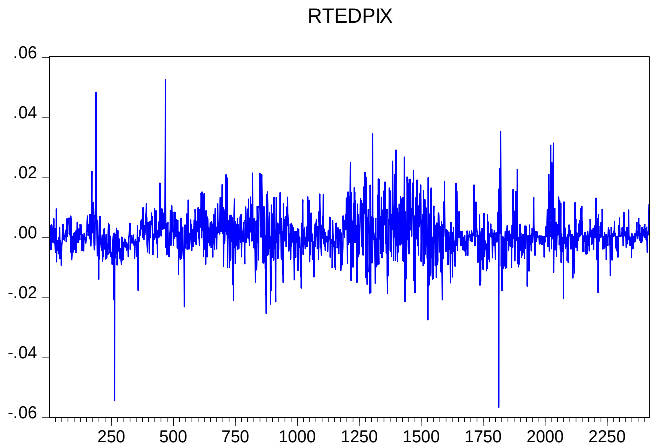
عموما بزرگترین ریسک در بازار سرمایه یا در یک پورتفوی زمانی اتفاق می افتد که تغییرات بزرگ ناگهانی در جهت نامطلوب ان سبد رخ دهد.بنابراین دانستن احتمال رخ دادن چنین مواردی که بسیار نادر هستن و تخمین ضررهای ناشی از آن در مدیریت ریسک مالی ضروری است این مقادیر انتهایی در دنباله تابع توزیع قرار دارند و به آنها مقادیر حدی گفته میشود. در این پژوهش به بررسی دنباله تابع توزیع بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران پرداختیم و وجود دنباله پهن را مورد آزمون قرار دادیم.نتایج تیوری تعمیم یافته شده مقدار حدی نشاندهنده وجود دنباله پهن در تابع توزیع بازده شاخص می باشد.

۳- روش شناسی پزوهش

در این پژوهش از ۲۴۲۰ مشاهده روزانه (قیمتهای بسته شدن) شاخص بورس تهران از ابتدای سال ۸۷ تا مرداد سال ۹۶ استفاده شده است.سری زمانی متناظر با مقادیر روزانه شاخص بورس تهران و بازدهی آن در شکل ۱و۲ نشان داده شده است.



شکل۱- سری زمانی شاخص کل



شکل۲- سری زمانی بازدهی شاخص کل

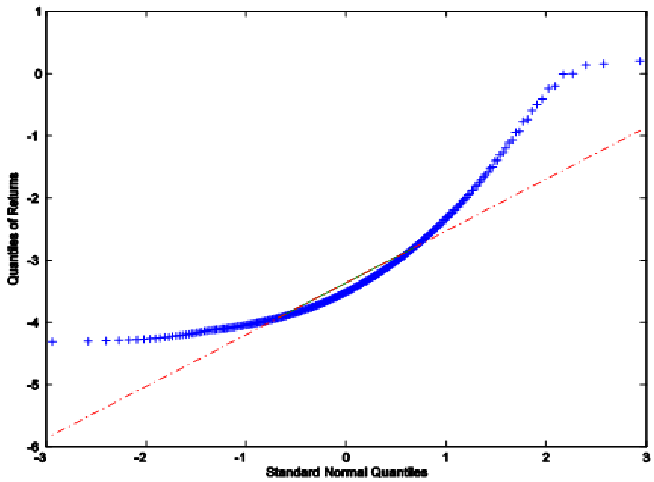
جدول ۱ توصیف آماری ساده ای از بازده های لگاریتمی را نشان می دهد. بازده لگاریتمی R(t)، برای سری زمانیP(t) ، شاخص بورس تهران در روز t ام، به صورت زیر تعریف می گردد:

$$R(t) = Ln\frac{P(t+1)}{P(t)} \approx \frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} \qquad (1)$$

جدول۱- مشخصات آمار توصیفی شاخص بورس (TEDPIX) و بازدهی آن (RTEDPIX)

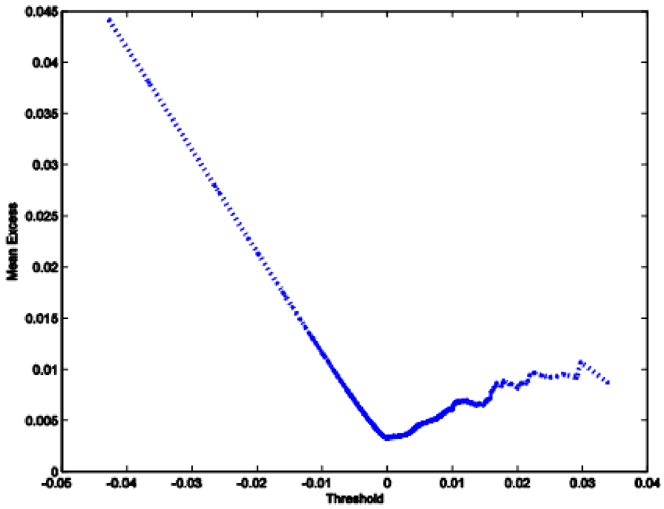
آمار توصیفی	میانگین	میانه	ماکزیمم	مینیمم	انحراف معیار	چولگی	کشیدگی	احتمال
TEDPIX	42066.29	28557.90	89500.60	7955.400	28025.70	0.207351	1.335232	0.000000
RTEDPIX	0.000878	0.000319	0.052608	-0.056703	0.006905	0.273091	10.59614	0.000000

طبق داده های جدول ۱ ، تابع توزیع احتمال، دارای قله بلند و دم های کلفتی نسبت به یک توزیع نرمال است. بنابراین انحراف واضحی از توزیع نرمال وجود دارد.
انحراف از توزیع نرمال را می توان بروشنی در شکل ۲ که در آن یک نمودار صدک-صدک[۱۰] از توزیع R(t)بر حسب یک توریع احتمال گاوسی با همان میانگین و انحراف معیار رسم شده است، دید.



نمودار۲- توزیع صدک-صدک از توزیع R(t)بر حسب تابع توریع احتمال نرمال

در واقع نمودار صدک-صدک و تابع میانگین فزونی ، دو وسیله مهم برای ارزیابی دم کلفت ها می باشند. تابع میانگین فزونی در شکل ۳ ،نشان دهنده دم کلفت برای توریع ضرراست. محور افقی مربوط به آستانه هایی است که میانگین فزونی های نمونه برای آنها محاسبه شده است.مقادیر محور عمودی فزونی های میانگین متناظر را نشان می دهند.روند مثبت آستانه ها نشانه دم کلفتی است.زیرا این نمودار ، نمودار فزونی میانگین برای ضررها می باشد.یک تابع میانگین فزونی با شیب رو به بالا آنطور که در شکل ۳ مشاهده می شود، دلیل دم کلفتی توزیع نمونه است.

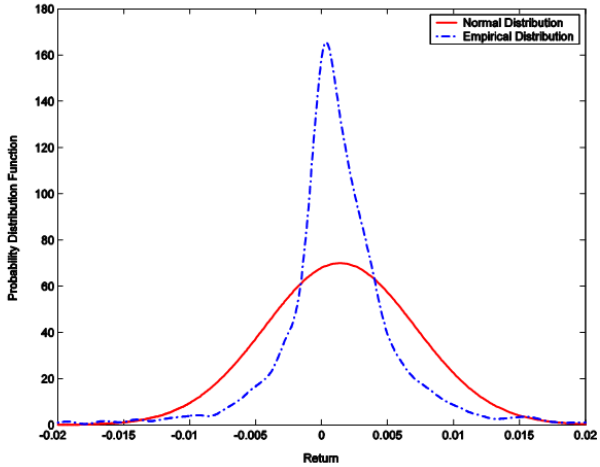


شکل۳- نمودار فزونی میانگین بر حسب آستانه ها

در حدود یک قرن پیش، بشلیه[۱۱] اولین مدل فرآیند حاکم بر بازده ها را پیشتهاد کرد (۵) .مدل او مبتنی بر ولگشت با تابع توریع احتمال گاوسی است. اما تغییرات بزرگ قیمت ها که در سری های زمانی مالی بسیار رایج هستند[۱و۶]و منجر به توزیعهای دم کلفت می شوند را نمی توان با فرآیند گاوسی مدلسازی کرد .

در ابتدا تجزیه و تحلیل تابع توریع بازده های شاخص بورس تهران، میانگین، انحراف معیار، چولگی و کشیدگی[۱۲] سری بازده ها محاسبه شده اند. (جدول ۱ را ببینید) . مقدار مثبت چولگی، λ ۳=1.4 خاصیت نامتقارن تابع توریع بازده که به سمت راست میانگین میل میکند، نشان می دهد ، در واقع مقدار بزرگ کشیدگی با توجه به کشیدگی گاوسی نشان می دهد که دم های توزیع بازده بسیار کلفت تر از دم های یک توزیع گاوسی هستند .

در شکل ۴ ،توزیع احتمال تجربی برای بازده شاخص کل بورس تهران و توزیع گاوسی برازش شده مقایسه شده اند.



شکل۴- مقایسه تابع توزیع احتمال تجربی بازده شاخص کل با تابع توزیع نرمال به روش بیشترین احتمال

۴- یافته های پژوهش

توابع توزیع های لوی ـ پایدار

توابع لوی – پایدار توسط لوی پاول[۱۳] طی تحقیقاتش درباره رفتار مجموعهای متغیرهای تصادفی مستقل در اول دهه 1920،معرفی شدند[۷) تابع توریع لوی – پایدار به صورت زیرنمایش داده می شود[۶)

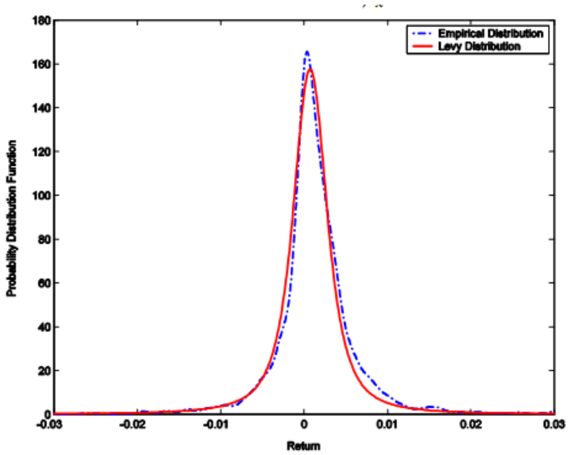
(۲)

$$L_a(N,\Delta t) \equiv \frac{1}{p}\int_0^{\infty} \exp(-s\Delta t q^a)\cos(qN)dq.$$

برای توصیف توریع لوی ـ پایدار به ۴ پارامتر نیاز داریم: شاخص پایداری $\alpha \in (0,2)$ که می تواند شاخص دم، نمای دم یا نمای مشخصه باشد)، پارامتر چولگی $\beta \in [-1,1]$ پارامتر مقیاس $\sigma > 0$ و پارامتر مکان $\mu \in R$ نمای دم α ،آهنگ افت دمهای تابع توریع را تعیین می کند .اگر $\alpha = ۲$ باشد توزیع گاوسی و اگر $\alpha < ۲$ واریانس نامتناهی است. همچنین، اگر $1 < \alpha$ باشد، میانگین توزیع موجود و برابر μ می باشد. به طور کلی، گشتاور p ام یک متغیرتصادفی پ لوی – پایدار متناهی است اگر و تنها اگر $p < \alpha$ باشد. اگر پارامتر چولگی B مثبت باشد، توزیع به سمت راست منحرف می شود و اگر منفی باشد به سمت چپ چولگی می یابد. هنگامیکه B= ۰ است،

تابع توزیع حول μ متقارن می باشد. وقتی α به ۲ میل می کند Bتاثیر خود را از دست داده و تابع توزیع، علیرغم وجود آن، به تابع توزیع گاوسی نزدیک می شود. دو پارامتر آخر σ و μ همان پارامترهای مقیاس و مکان معمول می باشند. یعنی σ پهنا و μ جابجایی مد توزیع (قله)راتعیین می کند.

تابع توزیع بازده های شاخص بورس تهران می تواند با یک لوی برازش شود. در شکل ۵ به منظور مقایسه بهتر تابع توزیع ، بازده یک توزیع لوی – پایدار با تابع توزیع احتمال تجربی مقایسه شده است. برای بدست آوردن چنین توزیع احتمال لوی – پایداری از تخمین بیشترین احتمال پارامترهای پایدار استفاده می شده است. این پارامترهای تخمین زده شده در جدول ۲ ارائه شده اند.



شکل ۵- تابع توزیع احتمال تجربی بازده شاخص با توزیع لوی برازش شده

طبق اشکال۴و۵، تطابق خوبی بین توزیع لوی برازش شده و توزیع تجربی بازده های شاخص بورس تهران وجود دارد. بر خلاف توزیع نرمال برازش شده که در توصیف داده ها ناتوان است.

جدول۲- پارامترهای توزیع لوی برازش شده

∝	B	σ	μ
۱,۲۸۹۳	۰,۱۶۶۳	۰,۰۰۱۹	۰,۰۰۰۸۱

روشهای رایج تخمین شاخص دم نظیر رگرسیون log-log و نمودار هیل (به بخشهای زیر مراجعه کنید). می توانند نماهایی بیش از مقدار حد مجانبی برای a نزدیک به ۲ ،بدست دهند. که

در نمونه های متناهی منجر به تخمین بیش از حد نمای دم می گردند. در واقع مقدار گزارش شده نمای دم a حول ۳ ، ممکن است بیانگر یک توزیع لوی پایدار یا $a \cong 1.8$باشد [8]. طبق مقدار تخمینی a می توان گفت که توزیع بازده به توزیع گاوسی نزدیک می شود و بی تقارنی وجود نخواهد داشت .بنابراین شاخص دم چپ و شاخص دم راست در این رهیافت یکی هستند.

رگرسیون خطیlog-log

ک متغیرتصادفی X در یک توزیع دم کلفت صدق می کند، اگر:

(۳)

$$P[X > x] \sim x^{-\alpha}, x \to \infty, 0 < \alpha < 2$$

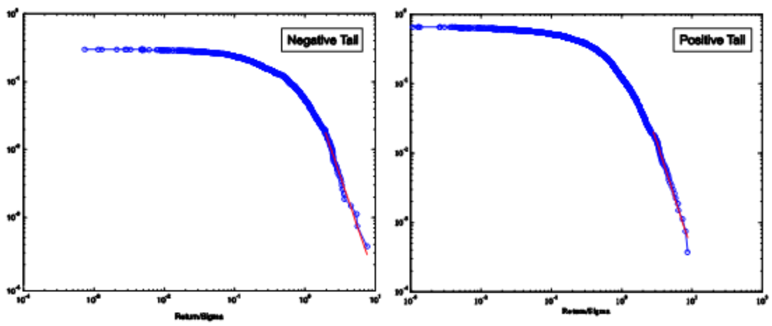
ساده ترین توزیع دم کلفت توزیع پارتو[۱۴] است که تابع توزیع احتمال آن چنین می باشد:

$$P[x] = au^{a}, x^{-a-1}, a, u \rangle 0, x \geq u \quad (۴)$$

و تابع توزیع تجمعی آن عبارتست از:

$$F[x] = P[X \leq x] = 1 - (u/x)^{a} \quad (۵)$$

سر راست ترین و ساده ترین روش تخمین شاخص دم، رسم دم راست (یا چپ) تابع توزیع تجمعی تجربی برروی یک صفحه لگاریتمی دو گانه همچون شکل ۶ است. (۹و۱۱) .



شکل۶- دنباله های مثبت و منفی تابع توزیع تجمعی برازش شده به یک توزیع توانی

(نمودارهای(CDF) توزیع تجمعی متمم $\bar{F}[x]=1-F(x)=P[X\rangle x]$ را روی محورهای log-log نشان می دهند .توزیعهای دم کلفت، به ازای xهای بزرگ دارای خاصیت زیر هستند.

$$\frac{d\log\overline{F}(x)}{d\log x}\sim-\alpha \quad (۶)$$

در واقع شیب رگرسیون خطی، به ازای مقادیر بزرگ x ،تخمینی از شاخص دم α طبق- α =slopeبدست می دهد. اندازه نمونه و انتخاب تعداد مشاهدات مورد استفاده در رگرسیون در این روش از اهمیت زیادی بر خوردارند.

مشاهده شده است که دم راست(CDF) بازده را می توان با یک تابع توانی با نمای۰.1 ± a_R=3.۱۶در ناحیه $\frac{R(t)}{a}\rangle 3$ به شکل ۶ نگاه کنید) برازش کرد.

$$P(X>x)\propto\frac{1}{x^{\alpha_R}} \quad (۷)$$

ضمنا می توان دم راست در ناحیه $\frac{R(t)}{\alpha}>3$ را با یک تابع توانی با نمای $\alpha_L=3.02\pm0.15$ برازش کرد.

$$P(X<x)\propto\frac{1}{x^{\alpha_L}} \quad (۸)$$

این نتایج با مطالعات قبلی راجع به بازارهای سهام و بازارهای ارز خارجی سازگار هستند[۱۰و۱۱)

تخمین گر هیل[۱۵]

هیل روشی برای تخمین شاخص دم ارائه کرد که برای کل تابع توزیع یک شکل پارامتری فرض نمی کند و تنها روی رفتار دم متمرکز می شود. از تخمین گر هیل برای تخمین شاخص دم α وقتی که دم بالایی (یا با ضرب نمونه در ۱ -و بعد اقدامی -مشابه با قبل برای دم پایینی) توزیع به شکل $1-F(x)=Cx^{-a}$ استفاده می شود اگر $X1 \geq X2 \geq \ldots \geq XN$ از داده هایی با توزیع F استخراج شوند، آنگاه تخمین گر هیل، تخمینی از α به صورت تابعی از kتا از بزرگترین اعداد مجموعه داده

ها بدست می دهد. در واقع اگر توزیع مورد نظر دقیقا پارتو باشد، آنگاه تخمین گر هیل براحتی می تواند به صورت یک تخمین بیشترین احتمال ساخته شود. احتمال مشاهده k مقدار X1… Xk عبارتست از:

$$L(X_i,...,X_k;a)=\prod_{i=1}^{k} au^a X_i^{-a-1} \quad (۹)$$

و تابع log -احتمال به شکل زیر خواهد بود:

$$\log L=\sum_{i=1}^{k}(\log(a)+a\log(u)-(a+1)\log(X_i)) \quad (۱۰)$$

بیشینه کردن معادله بالا نسبت به a تخمین گر هیل را نتیجه می دهد:

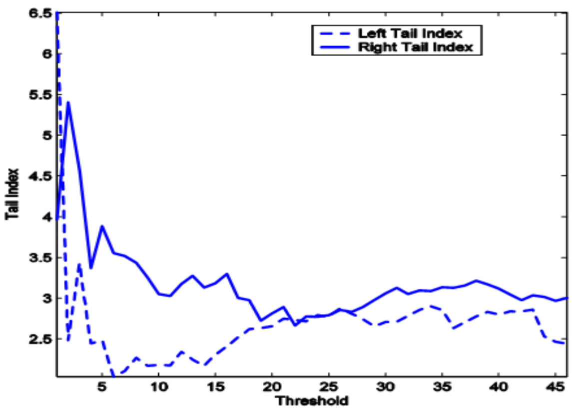
$$\frac{1}{\hat{\alpha}}=\sum_{i=1}^{k}(\log(X_i)-\log(u)) \quad (۱۱)$$

بعضی از توزیعها دقیقا پارتو نیستند ولی دمهایشان شبیه دمهای توزیع پارتو رفتار می کند. بنابراین می توان از تخمین گر هیل برای نواحی خارجی تر تابع توزیع استفاده کرد. فرض کنید Xi آماره۱۶ مرتبه i ام باشد، به گونه ایکه به ازای هر i=2…,n داشته باشیم X1≥Xi-1 اگر k مشاهده از دم راست را در تخمین a انتخاب کنیم، تخمین گر هیل بصورت زیر خواهد بود:

$$\hat{g}=\frac{1}{\hat{a}(k)}=\sum_{i=1}^{k}(\log(X_{n-i+1})-\log(X_{n-k})) \quad (۱۲)$$

باید توجه کرد که X1 ≥ X2 ≥…≥ XN مجموعه آماره های ترتیبی را یعنی داده هایی که طبق اندازه شان مرتب می شوند. ، نشان می دهند. با آنکه مفهوم و محاسبه تخمین گر هیل سر راست است انتخاب k اینطور نیست. از یک طرف، تقریب زدن دمها با توزیع پارتو با هر چه به سمت نواحی دورتر دمها برویم بهتر می شود، و از طرف دیگر این کار باعث کاهش تعداد داده های در دسترس می گردد که در نتیجه واریانس افزایش می یابد. هیچ راه حل کلی برای این توازن وجود ندارد. در عمل تخمین گر هیل، نسبت به مقادیر صعودی k رسم می شود. اگر تخمین گر در مقداری به اشباع برسد، آن مقدار تخمینی از a خواهد بود ((۳و۱۶)متاسفانه، نمودار هیل گاهی گمراه کننده است و ممکن است خیلی مفید نباشد (الگوریتمهایی برای انتخاب مقدار بهینه k در منابع ارائه شده اند[۱۷،۱۸) اما اعدادی که آنها معرفی می کنند در مجاورت همان مقدار اشباع

است .می توان گفت تخمین گر هیل میانگین فزونی های نسبی بالاتر از یک آستانه را محاسبه می کند. در شکل ۵ ،شاخصهای دم نسبت به آستانه تا ۲ ./نمونه رسم شده اند. تخمین گر هیل به گونه ای ساخته می شود $\xi=\frac{1}{\alpha}$ بعنوان تابعی از تعدادی آماره مرتبه بالا یا آستانه رسم می گردد. مقدار آستانه از نمودار پارامتر شکل، جایی که ξ نسبتا پایدار می شود، انتخاب می گردد.. برای درک بهتر، پارامتر شکل و شاخص دم نسبت به آستانه های مختلف در شکل ۸ رسم شده اند. در جدول ۳، شاخص دم راست و شاخص دم چپ حاصل از تخمین گر هیل ارائه شده اند.

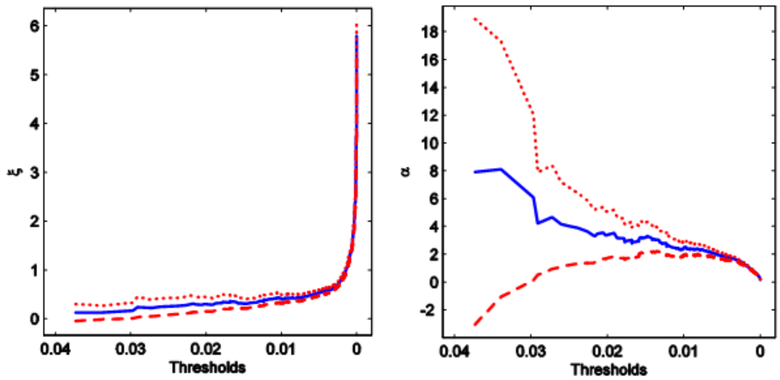


شکل ۷- رسم شاخصهای دم نسبت به آستانه تا ۲ درصد اندازه نمونه

جدول۳- مقدار شاخص دنباله حاصل از تخمین گر هیل

دم راست	دم چپ
۳٫۲۵ ± ۰٫۰۵	۲٫۷۵ ± ۰٫۰۵

این دو روش با اینکه مهم هستند این مشکل را دارند که در ابتدا باید نقطه ای همچون x_0در دم را که از نقطه رفتار تابع توانی آغاز می شود، تعیین کرد. این کار مشکل است زیرا داده ها در توزیعهای تجربی غالبا تفاوت مشخصی بین رفتار تابع توانی و رفتار غیر توانی از خود نشان نمی دهند . انتخاب مناسب x_0مهم است زیرا تاثیر مهمی برتخمین aی بدست آمده از روش هیل یا روش رگرسیون خطی log-log دارد.



شکل۸- نمودار هیل بازده شاخص کل در دوره زمانی سال ۸۷ تا ۹۶ در سطح اطمینان ۹۵درصد گارامترهای تخمین زده شده(به ترتیب ξ و α) نسبت به آستانه های مختلف رسم شده اند. نمودارهای بالایی و پایینی نوارهای سطح اطمینان ۹۵ درصد هستند.

نظریه مقدار مفرط

توزیع تعمیم یافته مقدار مفرط

یکی از مهمترین سوالاتی که در مطالعات دم ظاهر می شود اینست که: تغییرات مفرطی را که باید در بازارهای مالی انتظار داشت کدامند؟ آیا ما بزرگترینشان را قبلا ا مشاهده کرده ایم یا باید انتظار تغییرات باز هم بزرگتری را داشته باشیم؟ آیا فرآیندهای نظری که بتوانند نوع دم کلفت حاصل از تحلیلهای تجربی را مدلسازی کنند، وجود دارند؟ ما در چارچوب نظریه مقدار مفرط می توانیم به این سوالات پاسخ دهیم. نظریه مقدار مفرط چارچوب قابل اعتماد و قدرتمندی برای مطالعه رفتار دم یک توزیع است(۳)در واقع ، مطالعات متعددی درباره مقادیر مفرط در منابع مالی در چند سال اخیر انجام شده است (۱۳و۱۴و۱۵)توزیع نرمال یک توزیع حدی مهم برای مجموعها یا میانگینهای نمونه است، که در قضیه حد مرکزی به آن پرداخته می شود. به طور مشابهی، از خانواده توزیعهای مقدار مفرط برای مطالعه توزیع حدی بیشینه های نمونه استفاده می گردد. این خانواده را می توان در قالب یک پارامتری سازی منفرد که با عنوان توزیع تعمیم یافته مقدار مفرط[۱۷] (GEV)شناخته می شود، ارائه کرد .قضیه فیشر و تیپت[۱۸] که در بطن نظریه مقدار مفرط قرار دارد، سرو کارش با همگرایی بیشینه ها است.

فرض کنید ما یک سری x1,…,xn با توزیع یکنواخت داریم و M بلوک ناهمپوشان[۱۹] از داده با طول k انتخاب می کنیم.

Z_m مقدار بیشینه در بلوک mاست. توزیع مقادیر استاندارد شده ماکزیمم ها(به ازای یک σ_m , μ_m معین)

$$\bar{Z}_m = \frac{Z_m - \mu_m}{\sigma_m} \qquad (۱۳)$$

در توزیع تعمیم یافته مقادیر مفرط (GEV) با تابع توزیع تجمعی (CDF) زیر صدق می کند(۱۵)

$$H_e(x) = \begin{cases} e^{-(1+ex)^{-1/x}} & if \quad e \neq o \\ e^{-e^{-x}} & if \quad e = o \end{cases} \qquad (۱۴)$$

که در آن x در نامعادله $1+\xi x > 0$ صدق کرده و ξ پارامتر شکل می باشد.

به ازای مقادیر مختلف شاخص دم، Hدارای انواع زیر خواهد بود.

۱) اگر دم به طور نمایی کاهش یابد، آنگاه G از نوع گامبل(Gumble) و $\xi = 0$ست. تابع توزیع دم نازک (نرمال، logنرمال، نمایی، گاما) بوده و همه گشتاورها متناهی خواهند بود .

۲) اگر دم به طور هذلولوی کاهش یابد، آنگاه G از نوع فرچت(Frechet) و $\xi > 0$ست. تابع توزیع دم کلفت (پارتو،کشی، - tاستیودنت) است و در گشتاورهای بزرگتر از $\alpha = 1/\xi$ وجود ندارند.

۳) اگر دم متناهی باشد، آنگاه G از نوع ویبول(Weibull) و $\xi < 0$ خواهد بود. تابع توزیع کراندار(یکنواخت، بتا) و همه گشتاورها وجود دارند.

تابع توزیع پارتو تعمیم یافته

در حالت کلی، تنها جذابیت مسئله یافتن ماکزیمال مشاهدات نیست. بلکه رفتار مشاهدات وقتی از یک آستانه بلند تجاوز میکنند نیز برای ما جالب است. یک روش بدست آوردن مقادیر مفرط داده های یک نمونه $Xt \quad t=1,2,\dots,n$ با تابع توزیع $F(x)=\Pr X\leq x$ جستجوی مقادیری است که از یک آستانه بلند معلوم تجاوز کرده اند. مقدار فزونی از u به صورت y=xi-u تعریف می شود. به این مقدار قله روی استانه(POT) نیز گفته می شود. آستانه بلند u داده شده است. تابع توزیع مقادیر فزونی X از u به صورت زیر می باشد.

$$F_u(y) = \Pr(X - u \leq y | x > u)) = \frac{F(y+u)-F(u)}{1-f(u)} \qquad (۱۵)$$

این عبارت بیانگر احتمال آنست که مقدار فزونی x از u حداکثر y باشد البته به شرطی که x از uتجاوز کند. قضیه EWMAتوسط بالکما (Balkema) ،هان(Haan) و پیکاندز(Pickands)نشان می دهد که مکان دارد به ازای آستانه به اندازه کافی بلند u ،تابع توزیع فزونی را بتوان با تابع توزیع تعمیم یافته پارتو (Pareto) تقریب زد. به شرطیکه آستانه بزرگ و تابع توزیع فزونی $F_u(y)$ به GPD همگرا باشد. این تابع توزیع به طور کلی به صورت زیر تعریف می شود.

(۱۶)

$$G(x)=\begin{cases}1-(1+\varepsilon\dfrac{x}{\sigma}) & if \quad \varepsilon\neq 0\\ 1-(-e^{-x/\varepsilon}) & if \quad \varepsilon=0\end{cases}$$

در اینجا e پارامتر حالت می باشد. وقتی $\varepsilon>0$ ، این تابع توزیع به شکل تابع توزیع مقدماتی پارتو Paretoدر می آید. که بیشترین ارتباط را با سری زمانی مالی دارد زیرا دم کلفت است .

بر مبنای قضیه بالکما (Balkema) ،هان (Haan) و پیکاندز (Pickands)،)ممکن است بتوان تابع توزیع قله ها را با انتخاب ε و B و تعیین یک آستانه بلند u توسط GPD بدست آورد. پارامترهای GPDرا می توان با روش احتمال ماکزیمم تخمین زد.

تخمین دم

احتمال شرطی در زیر بخش قبلی به صورت زیر است:

$$F_u(y)=\frac{\Pr(X-u\le y|x>u))}{\Pr(X>u)}=\frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)} \qquad (۱۷)$$

از آنجایی که به ازای X > u داریم x = y +u ، عبارت زیر برقرار است:

$$F(x)=[1-F(u)]F_u(y)+F(u) \qquad (۱۸)$$

باید توجه کرد که این رابطه تنها برای x›u برقرار است. از آنجایی که $F_u(y)$ به از u های به اندازه کافی بزرگ، به GPDهمگرا می گردد و از آنجایی که به ازای X > u x = y +u , داریم:

$$F(x)=[1-F(u)]G_{x,u}(y)+F(u) \qquad (۱۹)$$

برای یک آستانه بزرگ u ،آخرین جمله سمت راست را می توان با استفاده از تخمین گر تجربی $(n-N_u)/n$ که در آن N_u تعداد فزونه ها و n اندازه نمونه است، تعیین کرد. بنابراین تخمین گر دم عبارت خواهد بود از:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}(1+\hat{\xi}(x-u)/\hat{\sigma})^{-1/\hat{\xi}}$$

(۲۰)

به ازای احتمال معین q،F(q) صدک (Xq) در دم، با وارون کردن تخمین گر دم در معادله قبلی تخمین زده می شود:

$$\hat{x}_q = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}((\frac{n}{N_u}(1-q))^{-\hat{\xi}} - 1)$$

(۲۱)

که در آن $\hat{\xi}$ و $\hat{\sigma}$ تخمین گر های بیشترین احتمال هستند. در آمار، به آن تخمین گر صدک و در مالیه به آن دارایی در خطر می گویند.

تعیین یک مقدار آستانه u ،در تخمین پارامترهای توزیع تعمیم یافته پارتو (GPD) یک گام اساسی به شمار می رود. هیچ روش دقیقی برای تعیین آستانه وجود ندارد. گاهی اوقات آستانه از جایی که تابع فزونی میانگین نمونه شیب مثبت دارد، تعیین می شود. جستجوی بصری نمودارهای QQنیز برای تعیین یک دامنه برای مقادیر آستانه مفید می باشد. روش دیگر تخمین گر هیل است. در این پژوهش، بازده های مفرط آنهایی هستند که به اندازه دو انحراف معیار، از میانگین نمونه تغییرات قیمت روزانه بزرگتر باشند که این خود تقریبا با دو درصد از دمهای چپ و راست توزیع مطابقت دارد. آستانه درصدی انتخاب شده، صدک نمونه متناظر و تعداد فزونی ها در جدول ۴ داده شده اند.

جدول ۴- بازده های درصدی آستانه، صدکهای تجربی متناظر و تعداد فزونه ها

فزونی	قله	فزونی	قله	داده
۴۳	۲	۴۶	۲	شاخص

در جدول ۵ ،تخمین بیشترین احتمال GPD حاصل از روش قله های بالای آستانه[۲۰] (POT برای دمهای چپ و راست ^همراه با خطاهای استاندارد متناظر ارائه شده اند. همانطور که از جدول

۵ پیداست x تخمین زده شده، برای هر دو دم چپ و راست توزیع مثبت است. این به معنی آن است که هر دو طرف توزیع کلفت هستند .مقدار شاخص دم تخمینی برای دم چپ نشان دهنده آنست که بورس تهران دچار سقوطهای شدید نشده است. این نتایج در ضمن نشان می دهند که دمهای چپ و راست توزیع بازده های (TEPIX) ویژگیهای گشتاوری متفاوتی دارند. از آنجایی که شاخص دم راست کوچکتر از شاخص دم چپ است، می توان نتیجه گرفت که ریسک و سود هم احتمال نیستند.

جدول۵- نتایج تخمین گر هیل

	ξ	خطای استاندارد ξ	σ	خطای استاندارد σ
دم چپ	۰,۲۷	۰,۰۱	۱	۰,۱۵
دم راست	۰,۲۳	۰,۰۴	۱,۱	۰,۲

۵- نتیجه گیری و بحث

عموما بزرگترین ریسک در بازار سرمایه یا در یک پورتفوی زمانی اتفاق می افتد که تغییرات بزرگ ناگهانی در جهت نامطلوب ان سبد رخ دهد.بنابراین دانستن احتمال رخ دادن چنین مواردی که بسیار نادر هستن و تخمین ضررهای ناشی از آن در مدیریت ریسک مالی ضروری است این مقادیر انتهایی در دنباله تابع توزیع قرار دارند و به آنها مقادیر حدی گفته میشود. در این پژوهش به بررسی دنباله تابع توزیع بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران پرداختیم و وجود دنباله پهن را مورد آزمون قرار دادیم.نتایج تیوری تعمیم یافته شده مقدار حدی نشاندهنده وجود دنباله پهن در تابع توزیع بازده شاخص می باشد

تخمین غیر خطی مقادیر مفرط بازده های روزانه شاخص بورس تهران با استفاده از یک تحلیل تجربی بررسی شده است. از روشهای متنوعی مثل: قوانین پایدار لوی، رگرسیون log-log تابع توزیع تجمعی ، نمودار هیل و نظریه مقدار مفرط استفاده شده است. نتایج تخمین های دم های چپ و راست با روشهای مختلف در جدول ۶ خلاصه شده اند. نتایج زیر به دست آمده اند. معلوم می شود که دمهای توزیع بازده های شاخص بورس تهران دم کلفت هستند. بعلاوه نتایج نشان می دهند که توزیع بازده های روزانه، در دمهای چپ و راست مشخصه های متفاوتی دارند. بنابراین سود و ضرر هم احتمال نیستند. از تخمین های دمهای چپ و راست می توان در محاسبات مربوط به مدیریت ریسک استفاده کرد. در واقع شکلهای صریح دمها، علائم مهمی برای مدیران ریسک و سرمایه

گذاران هستند. نتاج به خصوص نشان می دهند که روشهای مرسوم نظیر مدل توزیع نرمال برای تخمین معیارهای ریسک مربوط به دم، ممکن است به تخمین اشتباه ریسک منجر شوند. علاوه بر این، از توزیعهای لوی - پایدار به عنوان رده ای از توزیعهای پایدار که دم کلفتی را مجاز می دارند، برای مدل کردن نواحی دم توزیع بازده های شاخص کل استفاده شده است. این نتایج می تواند مورد استفاده فیزیک اقتصاد دانها و اقتصاددان ها برای توصیف تغییرات بورس تهران به عنوان یک سیستم پیچیده استفاده قرار بگیرد. در واقع، توزیع تجربی بازده های (TEPIX) را می توان با توزیع لوی - پایدار بهتر از یک توزیع گاوسی توصیف کرد. شاخص دم به طور متوسط حول و حوش ۳ است که نشان می دهد، گشتاورهای چهارم وجود ندارند، زیرا یک تعریف رایج دم کلفتی مبتنی بر گشتاور مرکزی چهارم است(کشیدگی). این نتایج می گویند که بازده های بورس تهران به طور معنی داری دم کلفت میباشد. یک موضوع جالب تحلیل معیار ریسک مبتنی بر صدک ها و محاسبه آنها با استفاده از EVT می باشد. مبحث جالب دیگر، تحقیق این موضوع است که آیا مدرکی مبتنی بر وجود حافظه بین تغییرات مفرط در بازده ها وجود دارد یا نه؟

جدول۶- تخمین شاخص های دنباله راست و چپ بازده شاخص کل با استفاده از روشهای مختلف

	دم چپ	دم راست
قانون پایدار لوی	۱,۲۸ ± ۰,۰۵	۱,۲۸ ± ۰,۰۵
رگرسیون Log-Log	۳,۰۵ ± ۰,۱۵	۳,۱۶ ± ۰,۱
تخمین گر هیل	۲,۷۵ ± ۰,۰۵	۳,۲۵ ± ۰,۰۵
EVT	۳,۷ ± ۰,۱۵	۴,۳۵ ± ۰,۲

فهرست منابع

* Mandelbrot BB, Journal of Business 36, 392-417, 1963.
* A. Janicki, A. Weron, Simulation and Chaotic Behavior of alpha Stable Stochastic Processes, Marcel Dekker, New York, 1994.
* P. Embrechts, C. Kluppelberg, T. Mikosch, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer, 1997.
* S. Rachev, S. Mittnik, Stable Paretian Models in Finance, Wiley, 2000.
* Bachelier L, Theorie de la speculation Annales de l'Ecole Normale Superiorieure, Ser. 3, 17, (1900, 84-21).
* R.N. Mantegna, H.E. Stanley, Nature 376 (1995) 46-49.
* P. Levy, Calcul des Probabilites, Gauthier Villars, Paris, 1925.
* R. Weron, International Journal of Modern Physics C,12, (2001).
* V.Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosnow, L.A.N. Amaral H.E. Stanley, Physica A 279 (2000) 443.
* C. G. de Vries, in the Handbook of International Macroeconomics, edited by F. van der Ploeg (Blackwell, Oxford(1994).
* P. Gopikrishnan, V. Plerou, L. A. Nunes Amaral, M. Meyer, H. E. Stanley, Phys. Rev. E 60, (1999,5316-5305)
* B. M. H. The annals of statistics, 3, 1163-1174,1975.
* L. De Haan, D.W. Janssen, K.G. Koedjik and C.G. de Vries (1994), Safety First Portfolio Selection, Extreme Value
* Theory and Long Run Asset Risks. In J. Galambos, J. Lechner and E. Simiu (eds.), Extreme Value Theory and Applications. Dordrecht Netherlands: Kluwer.
* A.J. McNeil, Extreme Value Theory for Risk Managers. In Internal Modelling and CAD II. London: Risk Books.
* U.A. Muller, M.M. Dacorogna and O.V. Pictet (1998),.Heavy Tails in High Frequency Financial Data. In R.J
* Adler, R.E. Feldman andM.S. Taqqu (eds.), A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications.Boston Birkhauser.
* S. Resnick, Ann. Statist. 25 (1997) 18.
* J. Beirlant, P Vynckier, J.L. Teugels, J. Amer Statist. Assoc. 91 (1996) 1659.
* H. Drees, E. Kaufman, Stochast. Process. Appl. 75.149 (1998)
* R. Fisher, L. Tippett, Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample, proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 24, 180-190,(1928).
* A.F. Jenkinson, Quarterly Journal of Royal Meteorological Society, 81, (1955), 145-148.
* A. Balkema, Annals of Probability 2, (1974, 792-804).
* J. Pickands, The Annals of Statistics, 3, 119-131,(1975). 25. J.R.M. Hosking and J.R. Wallis Technometrics,29, (1987), 339-349

یادداشت‌ها

[1] Value at Risk
[2] Extreme Movement
[3] Heavy Tail
[4] Quantile
[5] Extreme Value Theory
[6] Leavy-Stable
[7] Skewness
[8] Cumulative Distribution Function
[9] Hill Estimator
[10] Quantile-Quantile
[11] Bachelier
[12] Kurtosis
[13] -Paul Leavy
[14] Pareto
[15] Hill Estimator
[16] Statistic
[17] Generalized Extreme Value
[18] Fisher and Tippett
[19] Non- Over Lapping
[20] Peaks Over Threshold