مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌وپنجم / تابستان ۱۳۹۷

حل مسأله بهینه‌سازی سبد سهام شرکت‌های خصوصی در شرایط کمبود داده با استفاده از الگوریتم کلونی زنبور عسل (ABC)

فریدون رهنمای رودپشتی[۱]
احسان ساده[۲]
میرفیض فلاح شمس[۳]
رضا احتشام راثی[۴]
جمیل جلیلیان[۵]

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۸/۰۷ تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۱/۰۷

چکیده

سرمایه‌گذاران مختلف با سطوح سرمایه‌گذاری متفاوت در یک هدف با یکدیگر مشترک هستند و آن هم دست‌یابی به سبدی از دارایی‌ها است که در عین برآورده نمودن بازده مورد انتظار آنها، حداقل ریسک ممکن را به همراه داشته باشد. در این تحقیق هدف ما کمک به یک شرکت سرمایه-گذاری جهت دست‌یابی به ترکیب بهینه‌ای از دارایی‌ها متشکل از سهام شرکت‌های خصوصی زیر مجموعه‌ی خود و انواع دیگری از دارایی‌ها که ریسک کمتری را به همراه دارند است. یکی از مشکلات اصلی در سرمایه‌گذاری در سهام شرکت‌های خصوصی، کمبود داده‌های مربوط به بازده و ریسک آنها در مقایسه با داده‌های موجود از سهام شرکت‌های بورسی است. در این تحقیق از یک رویکرد شبیه‌سازی که توانایی تولید مقادیر تصادفی در حالت کمبود داده را دارا است، جهت محاسبه‌ی بازده و ریسک سرمایه‌گذاری در شرکت‌های خصوصی پرداخته‌ایم. همچنین با توجه به این که مسأله بهینه‌سازی سبد، یک مسأله NP-Hard به شمار می‌آید، با تعریف یک مدل بهینه-

۱- استاد و عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
rahnama.roodposhti@ gmail.com
۲- عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ساوه، ایران
۳- دانشیار و عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران
۴- عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، ایران
۵- دانشجوی دکتری مدیریت صنعتی گرایش مالی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

سازی دو هدفه برای مسأله، به حل آن با استفاده از الگوریتم زنبور عسل مبتنی بر ماتریس کوواریانس پرداخته‌ایم. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که یک سبد بهینه سبدی است که علاوه ترکیبی از دارایی‌های کم ریسک و پرریسک را درون خود داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی سبد، سرمایه‌گذاری خصوصی، شبیه‌سازی در شرایط عدم کفایت داده، الگوریتم کلونی مصنوعی زنبور عسل.

۱- مقدمه

انتخاب سبد یکی از رایج‌ترین مسائلی است که سرمایه‌گذاران گوناگون با سطح متفاوتی از سرمایه همواره با آن مواجه هستند و در عین حال یکی از پیچیده‌ترین مسائل در دنیای مالی به شمار می‌آیند (کو و سوگانتان[۱]، ۲۰۱۱). این مسأله می‌تواند از سبدهای نسبتا کوچک با تعداد کمی سهام، املاک و ... که توسط سرمایه‌گذاران معمولی مدیریت می‌شوند تا سبدهای بسیار بزرگی که شامل انواع گوناگونی از دارایی‌ها هستند و توسط سرمایه‌گذاران حرفه‌ای اداره می‌شوند را در بر گیرد. مسأله‌ی کلیدی در انتخاب سبد دارایی، انتخاب بهترین ترکیب ممکن از دارایی‌ها و تعیین وزن مناسب هر یک است (میشرا[۲] و همکاران، ۲۰۱۶)

مشهورترین و مرسوم‌ترین مدل ارائه شده برای بهینه‌سازی سبد دارایی، مدل معرفی شده توسط مارکوویتس[۳] در سال ۱۹۵۲ است. این مدل بر دو هدف اصلی هر سرمایه‌گذاری در انتخاب یک سبد استوار است اولین آن اطمینان از به دست آوردن سطح مشخصی از بازده از سبد و دومین آن اجتناب از ریسک ضررهای احتمالی به دلیل نوسانات بازار است. او اثبات کرد که در یک محیط ایده‌ال، سرمایه‌گذار به دنبال انتخاب سبد بهینه است یعنی سبدی که ریسک را حداقل کرده (یا در سطح مشخصی نگهدارد) و همزمان بازده را حداکثر نماید و تصمیم بهینه بر مبنای موازنه‌ی موجود میان برآوردهای ریسک و بازده دارایی‌ها اتخاذ می‌شود (مارکوویتس، ۱۹۵۲).

انتخاب سبد بهینه به دو دلیل اصلی، مسأله‌ای دشوار به شمار می‌آید. نخست آنکه، سرمایه-گذاران مجبورند تا ضمن حداکثر کردن بازده سبد دارایی خود، با ریسک موجود در دارایی‌های انتخاب شده مواجه شوند (میشرا و همکاران، ۲۰۱۴). به علاوه هر سرمایه‌گذاری در فرآیند انتخاب سبد ، می‌بایست الزامات مختلفی را در تصمیمات سرمایه‌گذاری خود مد نظر قرار دهد که در مدل ارائه توسط مارکوویتس به آنها اشاره‌ای نشده است (ماسدو[۴] و همکاران، ۲۰۱۷). بنابراین در طی سال‌های گذشته، محدودیت‌های عملی گوناگونی به مدل اصلی مارکوویتس اضافه شده است تا مدل وی را به یک مدل مناسب برای مسائل دنیای واقعی تبدیل نمایند (پونسیچ[۵] و همکاران، ۲۰۱۳). مرسوم‌ترین این محدودیت‌ها عبارتند از حداقل و حداکثر سرمایه‌گذاری در هر دارایی، محدودیت در تعداد دارایی‌های موجود در سبد و اندازه بسته‌های خریداری شده از یک دارایی خاص (کومار[۶] و میشرا، ۲۰۱۷).

توابع هدف موجود در مدل اصلی در کنار محدودیت‌های یاد شده، مسأله را به یک مسأله‌ی غیر خطی وغیر محدب با متغیرهای عدد صحیح تبدیل کرده است که در نتیجه‌ی آن در ادبیات موضوع،مسأله، به عنوان یک مسأله NP-Hard شناخته می‌شود (سابوریدو[۷] و همکاران، ۲۰۱۶). پژوهش‌های متعددی بر روی مدل‌سازی مسأله در قالب یک مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی (LP) ،

برنامه‌ریزی عددصحیح مختلط (MIP) و برنامه‌ریزی غیر خطی مختلط عددصحیح (MINLP) تمرکز کرده‌اند. با این وجود، به دلیل این که وجود متغیرهای عدد صحیح به صورت چشمگیری پیچیدگی مسأله را افزایش می‌دهد، استفاده از روش‌ها و الگوریتم‌های فراابتکاری جهت حل این مسأله بسیار مرسوم شده است (تالبی[۸]، ۲۰۰۹). در این پژوهش ما بر روی حل مسأله با استفاده از الگوریتم فراابتکاری کلونی مصنوعی زنبور عسل متمرکز هستیم.

همچنین پژوهش‌های صورت گرفته در این حوزه، همواره مسأله بهینه‌سازی سبد سهام را برای دارایی‌های با قابلیت معامله بالا مانند سهام شرکت‌های بورسی که داده‌های فراوانی از آنها جهت محاسبه‌ی بازده و ریسکشان در دسترس است، مورد بررسی قرار داده‌اند. با این وجود، شرایط برای دارایی‌های با نقدینگی کم مانند سهام خصوصی کاملا متفاوت است. مشکل عمده در انتخاب این نوع از دارایی‌ها کمبود داده‌های معتبر جهت انجام محاسبات مربوط به بازده و ریسک آنها است. لذا در این پژوهش از یک رویکرد مبتنی بر شبیه‌سازی جهت برآورد بازده و همچنین همبستگی میان سهام شرکت‌های خصوصی استفاده کرده‌ایم.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

پژوهش‌های انجام گرفته در ارتباط با مسأله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام که از روش‌های فراابتکاری جهت حل آن استفاده کرده‌اند را می‌توان به دو گروه کلی تقسیم‌بندی نمود. اولین گروه، آنهایی هستند که تنها ریسک یا بازده را به عنوان تابع هدف در نظر گرفته و مسأله را در قالب یک مسأله‌ی بهینه‌سازی تک‌هدفه مدل‌سازی و حل کرده‌اند. دسته‌ی دوم آنهایی هستند که مسأله را به صورت یک مسأله‌ی دو یا چندهدفه تعریف نموده و هدفشان پیدا کردن جواب‌هایی است که به صورت همزمان توابع هدف گوناگون را بهینه می‌کنند کورازا[۹] و همکاران (۲۰۱۳) با تعریف یک معیار جدید از ریسک به عنوان تنها تابع هدف مسأله، به حل آن با استفاده از بهینه‌سازی انبوه ذرات (PSO) پرداخته است. نسبت شارپ[۱۰] به عنوان تابع هدف توسط فو[۱۱] و همکاران (۲۰۱۳) به کار گرفته شده است. آنها از یک الگوریتم ژنتیک معمولی جهت بهینه‌سازی پارامترهای مورد نیاز تحلیل تکنیکال سهام و از یک الگوریتم ژنتیک سلسله‌مراتبی برای پیدا کردن سبد بهینه بر مبنای حداکثرسازی مقدار نسبت شارپ استفاده کرده‌اند. چن[۱۲] (۲۰۱۵) یک الگوریتم کلونی مصنوعی زنبورها را برای مسأله انتخاب سبد احتمالی به کار گرفته است که در آن ریسک سبد می‌بایست حداقل شود. در عین حال، اختلاف میان امید ریاضی بازدهی با هزینه‌های تراکنش نباید از یک سطح مشخصی کمتر شود. لیائو[۱۳] و همکاران (۲۰۱۵) یک استراتژی جدید ارزیابی ریسک را جهت کاهش پیچیدگی مربوط به محاسبات ریسک در مدل مارکوویتس معرفی و از یک الگوریتم ژنتیک

جهت انتخاب سبد بهینه بر مبنای حداکثرسازی نسبت شارپ استفاده کرده‌اند. راعی و همکاران با استفاده از الگوریتم جستجوی هارمونی و در نظر گرفتن نیم‌واریانس به عنوان تابع هدف اصلی پرداخته‌اند و به این نتیجه رسیده‌اند که الگوریتم فوق توانایی دست‌یابی به جواب‌های بهینه در سطوح مختلف ریسک و بازده را داراست. به حل مسأله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام پرداخته‌اند پاک-مرام و همکاران (۱۳۹۶) ضمن بررسی عملکرد سه الگوریتم ژنتیک، بهینه‌سازی انبوه ذرات و الگوریتم فرهنگی در سبد سهام، به این نتیجه رسیده‌اند که الگوریتم ژنتیک با کمترین خطا به بهترین نتیجه می‌رسد که نشان از عملکرد بهتر آن نسبت به دو روش دیگر دارد.

اما همان طور که اشاره شد، بهینه‌سازی سبد دارایی یک ماهیت یک مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه را دارد. یک سرمایه‌گذار می‌خواهد به سطح بهینه چندین تابع هدف دست پیدا کند. بنابراین پژوهش‌های گوناگونی مسأله را بر مبنای مدل مارکوویتس در قالب یک مسأله‌ی بهینه-سازی چندهدفه مدل‌سازی و حل کرده‌اند. به طور خاص با توجه به NP-Hard بودن مسأله، عمده تمرکز پژوهش‌های انجام گرفته در سال‌های اخیر بر روی به کارگیری الگوریتم‌های تکاملی چندهدفه و هوش جمعی جهت حل این مسأله متمرکز بوده‌اند. آناگنوستوپلوس و مامانیس[۱۴] (۲۰۱۱) عملکرد پنج الگوریتم تکاملی چندهدفه NPGA2، NSGA-II، PESA، SPEA2 و e-MOEA را برای حل یک مسأله‌ی انتخاب سبد دو هدفه (شامل حداقل‌سازی ریسک و حداکثرسازی بازده) مقایسه کرده است. برمودز[۱۵] و همکاران (۲۰۱۲) از یک الگوریتم ژنتیک چندهدفه‌ی فازی برای حل مسأله‌ی انتخاب سبد بهینه با وجود عدم قطعیت در ریسک و بازده استفاده کرده است. به منظور مدلسازی عدم قطعیت موجود در ریسک و بازده، منطق فازی را به کار برده و آنها را به صورت اعداد فازی ذوزنقه‌ای تعریف کرده‌اند. پس از آن از یک الگوریتم ژنتیک جهت دست‌یابی به استراتژی رتبه‌بندی فازی سبدهای کارا با وجود محدودیت در تعداد سهام در سبد استفاده کرده‌اند. چن و همکاران (۲۰۱۲) با تعریف یک پارامتر ریسک‌گریزی، در ابتدا مسأله‌ی دو هدفه را به یک مسأله‌ی تک هدفه تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم کلونی مصنوعی زنبورها به بهینه‌سازی انتخاب سبد دارایی پرداخته‌اند. رویکرد مشابهی توسط دنگ[۱۶] و همکاران (۲۰۱۲) انتخاب شده است. آنها یک الگوریتم بهینه‌سازی انبوه ذرات اصلاح شده را ارائه کرده‌اند تا بتوانند مسأله مورد نظر خود را حل نمایند. همایی‌فر و روغنیان (۱۳۹۵) به ارائه یک مدل بهینه-سازی چندهدفه سبد در شرایط عدم قطعیت بر مبنای برنامه‌ریزی آرمانی پرداخته‌اند. در پژوهش اخیری که توسط کومار و میشرا (۲۰۱۷) انجام گرفته است، یک الگوریتم کلونی مصنوعی زنبورهای جدید به نام کلونی مصنوعی زنبورهای چندهدفه‌ی مبتنی بر کوواریانس[۱۷](M-CABC) را برای حل مسأله‌ی بهینه‌سازی چندهدفه با محدودیت تعداد سهام در سبد معرفی کرده‌اند.

اخیرا توجه رو به رشدی در پژوهش‌های انجام گرفته نسبت به در نظر گرفتن سایر معیارها به عنوان تابع هدف در مدل شکل گرفته است. یک الگوریتم بهینه سازی علفهای هرز (IWO)[۱۸] برای حل مسأله‌ی بهینه سازی سبد توسط پویا و همکاران (۲۰۱۶) استفاده شده است که در آن در کنار ریسک، نویسندگان نسبت P/E و همچنین میزان برآورده سازی نظر خبرگان را نیز به عنوان تابع هدف مد نظر قرار داده‌اند. سابوریدو و همکاران (۲۰۱۶) یک الگوریتم تکاملی چندهدفه جدید را برای بهینه‌سازی مدل *Mean-Downside Risk-Skewness* که برای انتخاب سبد ارائه شده بود مورد استفاده قرار دادند. در مدل آنها سه تابع هدف به صورت همزمان بهینه‌سازی شدند: میانگین بازدهی، ریسک حالت نامطلوب و ناهمواری یک سبد.

در این مقاله، هدف ما استفاده از الگوریتم M-CABC ارائه شده توسط کومار و میشرا (۲۰۱۷) برای حل انتخاب سبد دارایی برای یک شرکت سرمایه‌گذاری است که در سهام شرکت‌های خصوصی فعال در حوزه‌ی IT سرمایه‌گذاری می‌کند. مدل اولیه‌ی ما شباهت‌هایی با مدل مارکوویتس دارد اما با توجه به این حقیقت که ما با شرکت‌های خصوصی سر و کار داریم، برای برآورد بازده شرکت‌ها از بازده حقوق صاحبان سهام آنها استفاده شده است که باید به حداکثر مقدار ممکن دست پیدا کند. به منظور محاسبه‌ی این پارامتر در شرایط کمبود داده از یک رویکرد شبیه-سازی استفاده شده است. ما محدودیت‌های تعداد سهام را در کنار الزامات خاصی که توسط شرکت سرمایه‌گذار برای سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها تعیین شده است در مدل وارد کرده‌ایم.

۳- مدل ریاضی

در این بخش در ابتدا به معرفی مدل پایه‌ای مارکوویتس برای حل مسأله‌ی بهینه‌سازی سبد سهام می‌پردازیم. سپس محدودیت‌هایی که در روند انتخاب سبد می‌بایست مد نظر قرار گیرند را به مدل اضافه کرده و در نهایت نحوه‌ی محاسبه‌ی تابع هدف مدل را نشان خواهیم داد.

۳-۱- مدل پایه‌ای مارکوویتس

چنانچه n سهام در درسترس باشند و x_i کسر یا وزنی از سرمایه‌ای باشد که به i امین سهام اختصاص پیدا کرده باشد، آنگاه طبق مدل Markowitz، مسأله دو هدف دارد، یکی حداقل‌سازی ریسک سبد و دیگری حداکثرسازی بازده آن که در معادلات (۱) و (۲) آورده شده‌اند.

$$minimize\ f_1(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\sigma_{ij}x_j \quad (۱)$$

$$maximize\ f_2\ (x) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \quad (۲)$$

در معادلات (۱) و (۲)، σ_{ij} همبستگی میان سهام i با سهام j را نشان می‌دهد. در واقع σ_{ij} اجزای ماتریس کوواریانس و r_i بازده سهام i را نمایش می‌دهد. همچنین x_i باید محدودیت‌های زیر را ارضا نماید:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{۳}$$

$$0 \le x_i \le 1 , \forall i \in \{1,2, \dots , n\} \tag{۴}$$

محدویت (۳) بیان می‌کند که جمع وزن سرمایه‌گذاری‌ها باید برابر ۱ باشد و محدودیت (۴) بیان می‌کند که x_i ها غیر منفی بوده و همچنین کوچکتر یا مساوی ۱ هستند.

۳-۲- محدودیت‌های مرسوم

در پژوهش‌های صورت گرفته در این حوزه به منظور در نظر گرفتن الزامات دنیای واقعی در انتخاب سبد سهام، محدودیت‌های مختلفی در نظر گرفته شده و به مدل اصلی Markowitz اضافه شده‌اند. از جمله رایج‌ترین آنها می‌توان به محدودیت‌های زیر اشاره کرد: (تاپیا و کوئلو[۱۹]، ۲۰۰۷)

الف) حدود بالا و پایین برای میزان سرمایه‌گذاری

این محدودیت برای مقادیر وزن هر دارایی (سهم) در سبد یک میزان حداقلی و یک میزان حداکثری در نظر می‌گیرد. به بیان دیگر چنانچه x_i مقداری غیر از صفر به خود بگیرد، رابطه (۵) باید برقرار باشد:

$$\alpha \le \; x_i \le \beta , \;\; \forall x_i \neq 0 \tag{۵}$$

در رابطه (۵) α و β به ترتیب حد پایین و بالا برای وزن سهم i در سبد سرمایه‌گذاری است.

نسخه دیگری از این نوع محدودیت توسط برنک[۲۰] و همکاران تحت عنوان محدودیت ۵-۱۰-۴۰ معرفی شده است که مطابق با قانون سرمایه‌گذاری آلمان است به بیان می‌کند که سهام متعلق به یک منتشرکننده، تا ۵٪ دارایی خالص صندوق سرمایه‌گذاری را تشکیل دهند. با این وجود چنانچه مجموع تمامی این دارایی‌ها کمتر از ۴۰٪ ارزش دارایی خالص باشد، این مقدار به ۱۰٪ نیز می‌تواند برسد.

ب) محدودیت تعداد

این محدودیت بر روی تعداد سهام در سبد محدودیت اعمال می‌کند. دو نوع از این محدودیت وجود دارد. نوع اول آن الزام می‌کند تا تعداد سهام انتخاب شده دقیقا برابر یک مقدار مشخص باشد ولی نوع دوم تنها بر روی تعداد سهام، یک حد پایین یا حد بالا مشخص می‌کند. جهت مدل سازی این محدودیت، در ابتدا یک متغیر صفر و یک به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_i = \begin{cases} 1 \;\; if \; x_i > 0 \\ 0 \; if \;\;\; x_i = 0 \end{cases} \qquad (۶)$$

بدین ترتیب برای تعریف نوع اول محدودیت تعداد طبق معادله (۷) عمل می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = K \qquad (۷)$$

در معادله بالا، K تعداد سهام تعیین شده برای سبد است. برای تعریف محدودیت نوع دوم حد پایین Z_L و حد بالای Z_U را تعریف می‌کنیم:

$$Z_L \leq \sum_{i=1}^{n} z_i \leq Z_U \qquad (۸)$$

ج) محدودیت بسته‌های سهام.

این محدودیت الزام می‌کند تا هر سهامی به صورت بسته‌ای خریداری شود که بدین معنی است که مبلغی که برای خرید هر سهمی پرداخت می‌شود، باید مضرب صحیحی از قیمت خرید آن سهم باشد. فرض کنیم که x_i کسری از سرمایه‌گذاری در iامین سهم، A کل بودجه سرمایه‌گذاری باشد و y ارزش اسمی یا قیمت خرید iامین سهم باشد. آنگاه طبق معادله (۸) x_iA باید مضرب صحیحی از y باشد:

$$x_i A = k y_i \;\&\; k \in Z^+ \qquad (۹)$$

د) محدودیت‌های شرکتی

همان طور که در بخش قبل اشاره شد، هدف ما بهینه‌سازی سبد دارایی برای یک شرکت سرمایه‌گذاری است که در سهام شرکت‌های خصوصی سرمایه‌گذاری می‌کند. برای مثال در شرکت-های زیرمجموعه‌ی خود که در مراحل مختلفی از رشد خود قرار دارند. برای مثال برخی از آنها شرکت‌های استارت‌آپی هستند. به منظور نیل به این هدف شرکت دو مجموعه از الزامات را برای سبد دارایی‌های خود تعیین نموده است. نخست آنکه به دلیل سطح بالای ریسک شرکت‌های

استارت‌آپ، مجموع سهم آنها در کل سبد نبایستی از ۲۵٪ فراتر رود. چنانچه j اندیس شرکت‌های استارت‌آپی باشد، آنگاه این محدودیت به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\sum_j x_j \leq 0.25 \quad (۱۰)$$

مسأله‌ی دیگر، استفاده از اوراق قرضه بدون ریسک به عنوان بخشی از سبد سرمایه‌گذاری است تا بتوان به وسیله‌ی آن ریسک نقدینگی سبد را کاهش داد. بدین منظور، شرکت می‌خواهد که حداقل ۱۰٪ از کل سبدش را از این دارایی تشکیل دهد. چنانچه دارایی‌های بدون ریسک را با اندیس k نشان دهیم به طوری که $k = \{i|risk_i = 0, return_i = 0.15\}$ محدودیت مرتبط با آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\sum_k x_k \geq 0.1 \quad (۱۱)$$

توجه به این نکته ضروری است که حدود بالا و پایین تعیین شده برای به ترتیب اوزان شرکت-های استارت‌آپی و اوراق مشارکت، بر حسب تجربه و نظر خبرگان در شرکت بوده است. این حدود بیانگر میزان ریسک‌پذیری-ریسک گریزی شرکت هستند.

۳-۳- تابع هدف مدل

همان طور که پیش از این بیان شد، از بازده حقوق صاحبان سهام (ROE) که به عنوان معیار سودآوری شرکت‌ها شناخته می‌شود، به عنوان بازده در مدل مارکوویتس استفاده شده است. مقدار آن از ضرب دو مقدار بازده دارایی‌ها (ROA) در نسبت اهرم مالی(Leverage) شرکت به دست می-آید.

$$ROE = ROA \times Leverage \quad (۱۲)$$

۴-۳- استفاده از شبیه‌سازی جهت تولید داده

با در نظر گرفتن این حقیقت که داده‌های کافی از وضعیت مالی شرکت‌های خصوصی در دسترس نیست، از یک روش شبیه‌سازی برای محاسبه‌ی اجزای بازده و ریسک استفاده کردیم. این فرآیند شبیه‌سازی مبتنی بر روش نمونه‌گیری Latin Hypercube Sampling است . ویژگی این روش تولید اعداد تصادفی اسن است که قادر است تا نمونه‌های قابل اتکایی را در صورت کم بودن تعداد داده‌ها ایجاد نماید. روش‌های رایج تولید نمونه‌های تصادفی مانند شبیه‌سازی مونت کارلو قادر نیستند تا اعداد نمونه‌ای با پراکندگی مناسب را در زمانی که داده‌های موجود کم هستند، تولید

نمایند. در مقابل، روش LHS می‌تواند با تعداد نمونه‌های کم نیز اعداد با پراکندگی مناسب تولید کند (مک‌کی[۲۱] و همکاران، ۱۹۷۹)

۳-۵- بیان مسأله

با توجه به مدل ارائه شده و محدودیت‌های در نظر گرفته شده که ترکیبی از محدودیت‌های سخت (نظیر محدودیت مجموع اوزان دارایی‌ها) و محدودیت‌های نرم (محدودیت‌های تعریف شده توسط شرکت) است، سوال مورد بررسی در این تحقیق عبارت است از اینکه سبد دارایی‌های شرکت باید چه ویژگی‌هایی داشته باشد تا بتواند در عین برآورده کردن محدودیت‌های تعریف شده، حداکثر عایدی و حداقل ریسک را برای شرکت به همراه داشته باشد. به بیان دیگر، سبد بهینه چه ترکیبی از سهام شرکت‌های بالغ، استارت‌آپ‌ها و همچنین سهام خزانه اسلامی (که در واقع بدون ریسک هستند) را در خود جای می‌دهد؟

۴- الگوریتم کلونی مصنوعی زنبور عسل چندهدفه مبتنی بر کوواریانس

الگوریتم کلونی مصنوعی زنبورها بر هوش جمعی مبتنی است و در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران گوناگونی قرار گرفته است. این الگوریتم در ابتدا توسط کارابوگا[۲۲] در سال ۲۰۰۵ جهت انجام بهینه‌سازی عددی توسعه داده شد (کارابوگا، ۲۰۰۵) و در مقایسه با سایر الگوریتم‌های هوش جمعی عملکرد بهتری را از خود نشان داده است (کارابوگا و آکای[۲۳]، ۲۰۰۹). این الگوریتم، رفتار جمع‌آوری غذای هوشمندانه یک زنبور عسل را شبیه‌سازی می‌کند. در دنیای واقعی زنبورهای عسل در کلونی‌های پرجمعیت زندگی می‌کنند و یک سازمان اجتماعی پیچیده را ایجاد و حفظ می‌کنند. این الگوریتم از سه نوع زنبور استفاده می‌کند (زنبورهای مستخدم، زنبورهای ناظر و زنبورهای اکتشاف) که به طور مداوم جواب را بهبود می‌دهند. تولید اولیه‌ی تمامی جواب‌های کاندید توسط زنبورهای اکتشاف صورت می‌پذیرد (جمعیت اولیه به صورت تصادفی تولید می‌شود) پس از آن، شهد منابع غذایی از طریق رفتار هماهنگ تمامی انواع زنبورها مورد استفاده قرار می-گیرد. زنبورهای به کار گرفته شده از هر نسلی، فضا را جستجو کرده و منابع غذایی با کیفیت‌های مختلف را پیدا می‌کنند. زنبورهای ناظر از فضای جستجو در نزدیکی منابع غذایی بهتر بهره‌برداری می‌کنند. زنبورهایی که منابع غذایی آنها خالی شده است، به صورت تصادفی در فاز زنبورهای اکتشاف تولید می‌شوند. این چرخه‌های پیوسته اکتشاف و بهره‌برداری به یکی از دو موقعیت زیر منجر می‌شوند: (۱) جواب نهایی دیگر قابلیت ادامه جستجو را ندارد (۲) منابع غذایی تخلیه شده-اند. الگوریتم ۱ مفاهیم و پارامترهای مورد استفاده در این روش را معرفی می‌کند.

الگوریتم ۱- فضای کلی *ABC*

پارامتر	شرح
$\overrightarrow{X_m}\{(x_{mi}, i = 1, \dots, d)\}$	**mامین جواب کاندید**
D	**تعداد ابعاد مسأله**
$\overrightarrow{Y_m}$	**همسایگی $\overrightarrow{X_m}$**
x_{mi}	**مقدار mامین متغیر در iامین بعد**
$\lvert P\rvert$	**اندازه جمعیت**
lb_i	**حد پایین برای iامین بعد**
ub_i	**حد بالا برای iامین بعد**
ϕ_{mi}	**عدد تصادفی در بازه (-1,1)**
	فاز آغاز تولید جمعیت اولیه به ازای

گام ۱: فاز آغاز

تولید جمعیت اولیه

به ازای هر زنبور مانند m و هر بعد مانند i داریم:

$$x_{mi} = lb_i + random\ (0,1) * (ub_i - lb_i) \qquad (۹)$$

گام ۲: گام‌های ۲،۱ تا ۲،۴ را تا برقرار شدن شرط پایانی ادامه دهید

- **فاز زنبور به مستخدم**

// تمامی فضای جستجو را بررسی کنید

به ازای هر زنبور مانند m و هر بعد تصادفی مانند i و یک زنبور تصادفی مانند k داریم:

$$y_{mi} = x_{mi} + \phi_{mi}(x_{mi} - x_{ki}) \qquad (۱۰)$$

$$\boldsymbol{fitness}(\overrightarrow{X_m}) = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{1+f(\overrightarrow{X_m})} \ \ if\ f(\overrightarrow{X_m}) \geq 0 \\ 1 + abs\left(f(\overrightarrow{X_m})\right)\ \ if\ f(\overrightarrow{X_m}) < 0 \end{matrix}\right\} \qquad (۱۱)$$

$$\overrightarrow{X_m} = better\ of\ (\overrightarrow{X_m}, \overrightarrow{Y_m}) \qquad (۱۲)$$

- **فاز زنبور ناظر**

//از منابع غذایی که دارای شهد بالایی هستند بهره‌برداری کنید.

یکی از زنبورهای مستخدم را با احتمال p_m انتخاب کنید به طوری که:

$$p_m = \frac{fit(\overrightarrow{X_m})}{\sum_{m=1}^{|P|} fit(\overrightarrow{X_m})} \qquad (۱۳)$$

و از معادلات (۱۰) تا (۱۲) دوباره برای بهره‌برداری استفاده کنید

- **فاز زنبور اکتشاف**

// به جای نقاطی که دیگر قابلیت جستجو ندارند، نقاط جدید را جستجو کنید

به ازای هر زنبور مانند *m*، چنانچه عملکرد آن بهبود پیدا نمی‌کند، از معادله (۹) برای بازسازی آن استفاده نمایید.

- بهترین جواب بدست آمده تا کنون را ذخیره نمایید

گام ۳: بهترین جواب به ثبت رسیده را بازگردانید

۴-۱- اصول ماتریس کوواریانس

جدای از فنون بهینه‌سازی تصادفی مانند محاسبات تکاملی، فنون بهینه‌سازی قطعی از خواص تحلیلی تابع هدف و فضای متغیر تصمیم استفاده می‌کنند. فنون بهینه‌سازی قطعی به صورت تکراری مجموعه‌ای از نقاط را تولید می‌کنند تا به یک بهینه کلی دست پیدا کنند. این مفهوم در شکل ۱ توضیح داده شده است. نمونه‌های شناخته شده این روندها، سری تیلور [47] و روش نیوتن رافسون [48] هستند. سری تیلور در معادله (۱۴) توضیح داده شده است که در آن ما خواهان محاسبه *f(x+h)* در یک نقطه در نزدیکی *x* هستیم.

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (h)^n \qquad (۱۴)$$

و از سری تیلور می‌توانیم روش نیتون رافسون را برای n بعد مانند آنچه در معادله (۱۵) تعریف شده است، تفسیر نماییم. در معادله (۱۵) $\nabla f(x_k)$ گرادیان تابع *f(x)* در نقطه x_k است.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\nabla f(x_k)} \qquad (۱۵)$$

برای پیدا کردن مقادیر حداقل یا حداکثر هر تابعی مانند f باید کاری کنیم تا $\nabla f(x_k) = 0$ لذا هدف ما پیدا کردن ریشه $\nabla f(x_k)$ است. در این مورد، مقدار x_{k+1} می‌تواند به صورت زیر پیدا شود:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\nabla f(x_k)}{\nabla^2 f(x_k)} \tag{۱۶}$$

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{\nabla f(x_k)}{\nabla^2 f(x_k)} \tag{۱۷}$$

$$p_k = -\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1}.\left(\nabla f(x_k)\right) \tag{۱۸}$$

$$p_k = -{B_k}^{-1}.\,g_k \tag{۱۹}$$

p_k جهت جستجو بوده و $\left(\nabla^2 f(x_k)\right)^{-1}$ یا ${B_k}^{-1}$ ماتریس هشین متقارن H است [49]. که در آن $(H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$ تمامی روش‌های بهینه‌سازی قطعی نیازمند گرادیان‌ها (مشتق‌های مرتبه اول) و هشین (مشتق مرتبه دوم) جهت همگرا شدن به بهینه محلی/ عمومی هستند. این نوع روش‌ها از گردایان g و جهت جستجوی p را جهت پیدا کردن یک موقعیت بهتر مانند x_{k+1} در مجاورت x_k استفاده می‌کنند.

الگوریتم ABC چندهدفه مبتنی بر ماتریس کوواریانس

در رویکردهای بهینه‌سازی تصادفی که در آنها محاسبه مشتقات درجه اول و درجه دوم بسیار پیچیده است، از ماتریس کوواریانس به عنوان یک راه مناسب برای تقریب زدن گرادیان g و ماتریس هشین H استفاده می‌کنیم. روند برای تعیین ماتریس کوواریانس در محیط تصادفی در الگوریتم ۲ نوشته شده است.

الگوریتم ۲. محاسبه ماتریس کوواریانس C.

ورودی: مجموعه‌ای از N نمونه مستقل، هر یک با اندازه d. ورودی به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & x_{N3} & \cdots & x_{Nd} \end{Bmatrix}$$

خروجی‌ها: $\boldsymbol{C_{d\times d}}$ ماتریس کوواریانس

$\boldsymbol{D_{d\times d}}$ ، ماتریس قطری با مقادیر ویژه ماتریس C

$\boldsymbol{B_{d\times d}}$، یک ماتریس مستقل با ویژگی $B^TB=BB^T=I$

گام ۱: به ازای هر بعد i عضو $\{1,\ldots,d\}$ میانگین $\overline{x_i}$ را به صورت زیر محاسبه کنید:

$$\overline{x_i} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}$$

گام ۲: به ازای هر بعد i و j عضو $\{1,\ldots,d\}$ داریم:

$$C_{i,j} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_{ik}-\bar{x}_i)(x_{jk}-\bar{x}_j)$$

گام ۳: تفکیک C به B و D به صورت $C=BD^2B^T$

هر بهینه‌ساز چندهدفه‌ای دو فاز دارد: (۱) تعیین رتبه عدم تسلط [51] یک جواب نسبت به جواب دیگر (۲) تولید جمعیت فرزند از بهترین جوابهای والد. در *M-CABC* ما از روش رتبه‌بندی *NSGA-2* [52] برای محاسبه‌ی رتبه عدم تسلط هر جواب برای تولید جبهه‌های $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ که تحت تسلط قرار ندارند، استفاده کرده‌ایم. الگوریتم *ABC* مبتنی بر ماتریس کوواریانس جهت تولید جوابهای فرزند مورد استفاده قرار می‌گیرد. الگوریتم *M-CABC* در الگوریتم ۳ توضیح داده شده است.

الگوریتم۳. الگوریتم *ABC* چندهدفه مبتنی بر ماتریس کوواریانس (*M-CABC*)

ورودی‌ها: تعداد ابعاد در مسأله: d و حداکثر تعداد چرخه‌ها: mx

خروجی‌ها: P^* (مجموعه پارتو بهینه)

گام ۱: فاز آغازین

۱,۱. اندازه کندوی زنبور= $d*10$

۱,۲. تعداد زنبورهای مستخدم (e) = اندازه کندوی زنبور /۲

۱,۳. تعداد زنبورهای ناظر (o)= اندازه کندوی زنبور /۲

۱,۴. ϕ: عدد تصادفی بین -۱ و ۱

۱,۵. φ: عدد تصادفی بین ۰ و ۱

۱,۶. C: ماتریس همانی $d\times d$

۱,۷. B: بردارهای ویژه نرمال شده C

۱,۸. D: ماتریس قطری با ریشه دوم ارزش‌های ویژه C.

۱,۹. محدوده زنبورهای اکتشاف: d*10

۱,۱۰. شماره نسل (g): 0

۱,۱۱. $\sigma=0.5$

۱,۱۲. تولید جمعیت اولیه P_g با اندازه e

گام ۲: انجام رتبه‌بندی جمعیت P_g با استفاده از رتبه‌بندی *NSGA-2* و تولید جبهه‌های غیر تسلط یافته F_1، F_2، F_3 ، ... F_n.

گام ۳: گام‌های ۳,۱ تا ۳,۷ تا زمانی که ($g<mx$)

۳,۱ : فاز زنبور مستخدم

۳,۲: فاز زنبور ناظر

۳,۳: فاز زنبور اکتشاف

۳,۴ : $g=g+1$

۳,۵ : کندو = اجتماع دو مجموعه زنبور مستخدم و زنبور ناظر

۳,۶: انجام رتبه‌بندی عدم تسلط با استفاده از *NSGA-2* و ایجاد جبهه F_1، F_2، F_3 ، ... F_n

۳,۷ : P_g: بهترین e جواب از کندو

گام ۴: بازگرداندن F_1

در فاز آغازسازی ما تمامی پارامترهای مورد نیاز برای فاز زنبورهای مستخدم، زنبورهای ناظر و زنبورهای اکتشاف را تعیین می‌کنیم. این پارامترها عبارتند از: اندازه کندو زنبور، تعداد زنبورهای مستخدم e، تعداد زنبورهای ناظر o، ϕ و φ. ϕ عدد تصادفی بین -۱ و ۱ است که شدت جستجو را نشان می‌دهد. φ یک عدد تصادفی دیگر در بازه $(0,1)$ است و برای راهنمایی جهت جستجو مورد استفاده قرار می‌گیرد. C ماتریس کوواریانس و B و D تجزیه ویژه ماتریس C هستند. روند برای تولید C، B و D در الگوریتم ۲ توضیح داده شده است. محدوده زنبور اکتشاف ده برابر تعداد ابعاد است (چنانچه از $d*10$ تکرار آخر هیچ بهبودی در جواب حاصل نشود، هر زنبوری در کندوی عسل به صورت تصادفی بازتولید می‌شود. شماره نسل شمارنده‌ای است که تعداد تکرارها را تا مرحله فعلی ذخیره می‌کند. σ فاکتور بزرگی است. این پارامتر یک پارامتر کنترلی پایه‌ای است که برای کنترل نزدیکی یا دوری جواب فرزند از والد استفاده می‌شود. با تعیین این پارامترها، فاز آغازین M-CABC با تشکیل جمعیت تصادفی اولیه P_0 بر طبق الگوریتم ۸ صورت می‌گیرد.

الگوریتم ۴. فاز زنبور مستخدم

گام ۱: برای هر iامین زنبور مستخدم$X_i\left[x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i, \dots, x_n^i\right]: i \in \{1, \dots, e\}$

قدم‌های ۱,۱ تا ۱,۷ را تکرار کنید:

۱,۱: یک جواب تصادفی مانند X_j و هر جواب مانند BEST[b_1, b_2, …, b_k,…, b_d] از جبهه F_1

۱,۲: یک بعد تصادفی مانند dm را برای تغییر پیدا کنید.

۱,۳: $X_i^{old} = X_i$

۱,۴: $dfn = x_{dm}^{i} - x_{dm}^{j}$

۱,۵: $dfb = b_{dm} - x_{dm}^{i}$

۱,۶: $x_{dm}^{i} = x_{dm}^{i} + \phi(dfn) + \varphi(dfb)$

۱,۷: $X_i = pareto\ optimal\ selection\ (X_i^{old}, X_i)$

درفاز زنبورهای مستخدم ما از دو معیار فاصله استفاده کرده‌ایم. *Dfn* (فاصله از هر زنبور تصادفی مستخدم در فضای جستجو) و *dfb* (فاصله زنبور مستخدم از هر بهترین جوابی که در بهترین جبهه مانند F_1 قرار دارد). ترکیب مناسب دو برآورد فاصله‌ای معرفی شده در گام ۱,۶ الگوریتم ۴ استفاده شده است. در این گام، مکان قدیمی یک زنبور مستخدم بر طبق معادله موجود در گام ۱,۶ تغییر می‌کند. این فرمول در دست‌یابی به یک جستجوی کاملا متوازن و راهنمایی شده کمک می‌کند. عبارت دوم $\phi(dfn)$ یک بزرگی مناسب را فراهم می‌کند و عبارت سوم $\varphi(dfb)$ هم بزرگی و هم جهت مناسب را فراهم می‌کند. اصل انتخاب بهینه پارتو در الگوریتم ۵ نشان داده شده است.

الگوریتم ۵. انتخاب بهینه پارتو

ورودی‌ها: دو جواب، $A[a_1, a_2, \dots, a_d]$ و $B[b_1, b_2, \dots, b_d]$

خروجی: O^*

گام ۱: اگر داشته باشیم:

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}\ f_j(\vec{A}) \le f_j(\vec{B}) \&\& (\exists j \in \{1, \dots, k\} f_j(\vec{A}) < f_j(\vec{B}))$$

جواب $f(\vec{A})$ به ازای تمامی k تباع هدف به خوبی $f(\vec{B})$ بوده و به صورت اکید با ازای حداقل یک تابع هدف از آن بهتر باشد.

سپس A را برگردانید

در غیر این صورت B را برگردانید

الگوریتم ۶. فاز زنبور ناظر *M-CABC*

گام ۱: به ازای هر جبهه مانند F_j به طوری که $1 \leq j \leq \lceil log_2 o \rceil$، گامهای ۱,۱ تا ۱,۵ را تکرار کنید

۱,۱: ماتریس‌های B، C و D برای جبه F_j را پیدا کنید

۱,۲: مقدار m میانگین جوابهای F_j را پیدا کنید

۱,۳: $\lceil nof = e/2 \rceil$ // تعداد زنبورهای اختصاص داده شده به این جبهه

۱,۴: *e=e-nof* // تعداد زنبورهای ناظر باقیمانده برای جبهه‌های بعدی است

۱,۵: به ازای هر iامین زنبور ناظر مانند Z_i به طوری که $i \in \{1, \dots, nof\}$ گامهای ۱,۵,۱ تا ۱,۵,۲ را تکرار کنید

۱,۵,۱: یک بردار تصادفی مانند $r_{d\times1}: r_i \in (0,1)$ ایجاد کنید.

۱,۵,۲: $Z_i = m + \sigma BDr$

گام ۲: تعیین دوباره e

الگوریتم ۷. فاز زنبور اکتشاف M-CABC

به ازای هر iامین زنبور در کندوی $S_i: i \in \{1, \dots, (o+e)\}$ گام ۱,۱ را تکرار کنید

۱,۱ اگر مقدار برازش S_i در تعداد از پیش تعیین شده‌ای از تکرارها بهبود پیدا نکرد، آنگاه S_i را به صورت تصادفی تولید کنید

در فاز زنبور ناظر الگوریتم مرسوم *ABC* تعداد بیشتری از زنبورهای ناظر به سمت جواب‌های بهتر هدایت می‌شوند. با حفظ همین استراتژی برای هدایت تعداد بیش‌تری از زنبورهای ناظر به سمت جبهه بهتر، ما الگوریتم ۶ را برای فاز زنبور ناظر روش *M-CABC*. از میان زنبورهای ناظر، نیمی از آنها به سمت بهترین جبهه موجود هدایت می‌شوند. *nof* این مقدار را نشان می‌دهد. از میان زنبورهای ناظر باقی‌مانده، (*e-nof*) نیمی از آنها به جبهه در دسترس بعدی فرستاده می‌شوند و همین روند ادامه پیدا می‌کند. در این راه برای تعداد o زنبور ناظر، تعداد می‌توانیم آنها را به تعداد $\lceil log_2 o \rceil$ جبهه دست پیدا کنیم و هر $F_i \in \{F_1, F_2, \dots, F_{\lceil log_2 o \rceil}\}$ تعداد $\left\lceil \frac{o}{2^i} \right\rceil$ زنبور ناظر را $\forall i \in \{1, \dots, \left\lceil \frac{o}{2^i} \right\rceil\}$ به خود جذب کند. گام ۱,۳ و گام ۱,۴ تشکیل تمامی این $\left\lceil \frac{o}{2^i} \right\rceil$ را برای تمامی این جبهه‌ها پوشش می‌دهند. الگوریتم فرض می‌کند که تعداد جبهه‌ها همیشه از $\lceil log_2 o \rceil$ بزرگ‌تر است. چنانچه جبهه‌ها از این تعداد کمتر باشند، آنگاه باقی زنبورهای ناظر از جبهه اول دوباره تخصیص پیدا می‌کنند. تشکیل زنبورهای ناظر با استفاده از ماتریس کوواریانس در فرمول $Z_i = m + \sigma BDr$ صورت می‌پذیرد. یک جواب که تابع برازش آن پس از یک تعداد تکرار مشخص

افزایش پیدا نمی‌کند، در فاز زنبورهای اکتشاف از دوباره ایجاد می‌شود که روند آن در الگوریتم ۷ توضیح داده شده است.

نمایش کوروموزم‌ها

هر الگوریتم تکاملی، مجموعه‌ای از جواب‌های کاندید را نگه می‌دارد. این جواب‌های کاندید، به صورت تکراری و مطابق با رفتار الگوریتم تکاملی اصلی تکامل پیدا می‌کنند. در الگوریتم ما، ما بر روی بهینه‌سازی پارامترهای واقعی کار کرده‌ایم. از این رو، برای یک مسأله n سهام، هر کروموزوم (یا همان جواب‌های کاندید) یک بردار nتایی از اعداد حقیقی خواهد بود. با وجود این که مد نظر قرار دادن تعداد بیش‌تری از محدودیت‌ها نسبت به هر سبد سهامی می‌تواند به بهتر شدن بهینه-سازی آن منجر شود، ما تنها به اعمال چهار محدودیت اول توضیح داده شده در معادلات (۳) تا (۵) و همچنین معادله (۸) پرداخته‌ایم. منطق موجود برای این انتخاب این است که این محدودیت‌ها برای مدیریت سبد عمومی کافی هستند و به راحتی قابل اعمال، تست و تحلیل هستند. مطابق این چهار محدودیت، هر جواب کاندید مانند P سبدی را مانند $P[p_1, p_2, \dots, p_n]$ با خواص زیر را نمایندگی می‌کند:

(a) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\; p_i \in \{\Re^+ \cup 0\}$

(b) $\forall i \in \{1, \dots, n\}\; p_i = 0 \; or \; \alpha \le p_i \le \beta$

(c) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

تعداد p_i های غیر صفر در محدوده $[Z_L, Z_U]$ قرار گیرد. چنانچه کل بودجه لازم برای سرمایه‌گذاری A باشد، آنگاه سرمایه‌گذاری در هر سهمی مانند i ، که آن را با I نشان می‌دهیم، در قالب معادله (۲۱) تعریف می‌شود:

$$I = \begin{Bmatrix} 0 & If\; p_i = 0 \\ p_i.A & If\; p_i > 0 \end{Bmatrix} \qquad (۲۱)$$

تولید جمعیت اولیه و پاک‌سازی کروموزم‌ها

مسأله بهینه‌سازی سبد سهام با n سهم، یک مسأله n بعدی است که از طریق الگوریتم *M-CABC* حل می‌شود. یک تولیدکننده عدد تصادفی یکنواخت جهت تولید جمعیت اولیه مورد استفاده قرار می‌گیرد. روند تولید جمعیت اولیه در الگوریتم ۸ توضیح داده شده است. هر عضو از

جمعیت با استفاده از یک تولیدکننده عدد تصادفی در بازه [0,1) شکل می‌گیرد چرا که میزان سرمایه گذاری در هر سهمی در این بازه قرار می‌گیرد.

زمانی که جمعیت اولیه تولید شد، تمامی سبدها ممکن است که تمامی محدودیت‌ها را ارضا کنند و یا نکنند. مکنایزم‌های فراوانی جهت اعمال محدودیت در ادبیات الگوریتم‌های تکاملی جهت مقابله با مسائل بهینه‌سازی با محدودیت ارائه شده استو با این وجود، ما یک مسری جایگزین را برای برآورده‌سازی محدودیت‌ها اتخاذ کرده‌ایم. ما از الگوریتم ۹ جهت تولید جمعیت فرزندان استفاده کرده‌ایم. این الگوریتم تمامی سبدهای مبهم را به سبدهایی دقیق که تمامی چهار محدودیت را رعایت می‌کنند، تبدیل می‌کند.

از آنجایی که برد عدد تصادفی ما [0,1] است، محدودیت دوم، یا همان معادله (۲) خود به خود برقرار می‌شود. در ابتدا الگوریتم تعداد سهامی را که سرمایه‌گذاری برای آنها صورت گرفته است، تحت عنوان *nz* شمارش می‌کند. سپس این تعداد در بازه ه $[Z_L, Z_U]$ حفظ می‌شود. چنانچه $nz < Z_L$ باشد، آنگاه به تعداد $d_{min} - nz$ سرمایه‌گذاری تصادفی صورت می‌پذیرد. چنانچه $nz > d_{max}$ آنگاه از سرمایه‌گذاری در $nz - Z_U$ صرف نظر خواهد شد. بدین ترتیب چهارمین محدودیت یعنی معادله (۷) نیز برقرار خواهد شد.

گام ۴ و گام ۸ اطمینان حاصل می‌کنند که سرمایه‌گذاری غیر صفر در هر سهمی در بازه $[\alpha, \beta]$ قرار می‌گیرد. این محدودیت، محدودیت سوم یا همان رابطه (۵) است. هر سرمایه‌گذاری بیش از β در گام ۴ تا حد β کاهش پیدا می‌کند و در گام ۸ همه سرمایه‌گذاری‌ها از حد پایین α فراتر خواهند رفت. گام‌های ۶، ۷ و ۸ از برقرار بودن رابطه (۳) یا همان محدودیت اول اطمینان می‌یابند. ابتدا مجموع سرمایه‌گذاری مجازی را تحت عنوان *vti* و شمرده و تنها زمانی که α درصد از سرمایه موجود در هر سهمی سرمایه‌گذاری شده باشد، کسر واقعی باقی‌مانده از کل سرمایه-گذاری *raf* را محاسبه می‌کنیم. سپس فرض می‌کنیم که در هر سهم یک مبلغ پایه α سرمایه-گذاری انجام گرفته باشد و مقدار آن را با یک فاکتور *raf* که نشان‌دهنده‌ی وزن نرمال شده قدیمی سهم است. تابع پاک‌سازی کروموزوم‌ها در *M-CABC* پس از هر فاز در هر تکرار انجام می‌شود. جداسازی این از سایر ماژول‌ها یک مزیت چشمگیر را برای ما فراهم می‌کند. برای مثال چنانچه بخواهیم محدودیت‌های بیش‌تری را در تحلیل خود لحاظ کنیم، مجبور خواهیم بود تا از منطق فوق برای اعمال محدودیت‌های جدید تنها در این تابع استفاده کنیم. باقی بخش‌های کد می‌توانند دست نخورده باقی بمانند.

الگوریتم ۸. تولید جمعیت اولیه

ورودی‌ها: تعداد سهام : n ، اندازه جمعیت: e

خروجی‌ها: جمعیت اولیه

$$P\begin{Bmatrix} p_1^1 & p_2^1 & p_3^1 & \cdots & p_n^1 \\ p_1^2 & p_2^2 & p_3^2 & \cdots & p_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1^e & p_2^e & p_3^e & \cdots & p_n^e \end{Bmatrix}$$

گام ۱: به ازای هر عضو جمعیت $p^j \in \{1, \dots, e\}$ و به ازای هر بعد مانند $i \in \{1, \dots, n\}$

گام ۱,۱ را تکرار کنید

۱,۱: $p_i^j = randomnumber\ [0,1)$

گام ۲: به ازای هر سبد $j \in \{1, \dots, e\}$ P^j گام ۲,۱ را تکرار کنید:

۲,۱: P^j را پاک‌سازی کنید

الگوریتم ۹: پاکسازی کروموزوم

ورودی‌ها : سبد سهام بدون محدودیت : $P\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

حداقل تعداد سهام در سبد d_{min}

حداکثر تعداد سهام در سبد d_{max}

حداقل سرمایه‌گذاری در هر یک از سهام در سبد α

حداکثر سرمایه‌گذاری در هر یک از سهام در سبد β

تعداد سهام موجود n

خروجی‌ها: سبد سهام پاکسازی شده P که تمامی محدودیت‌ها ارضا می‌کند.

گام ۱: تعیین تعداد سهم‌های غیر صفر در سبد P یا همان nz

گام ۲: اگر $nz < d_{min}$ آنگاه تعداد $d_{min} - nz$ سهم را با اعداد تصادفی بین (0,1) بازسازی کنید و $nz = d_{min}$

گام ۳: اگر $nz > d_{max}$ آنگاه تعداد $nz - d_{max}$ سهم غیر صفر را صفر کرده و $nz = d_{max}$

گام ۴: به ازای هر بعد $i \in \{1, \dots, n\}$ چنانچه $p_i > \beta$ آنگاه $p_i = \beta$ قرار دهید

گام ۵: vti=0 قرار دهید

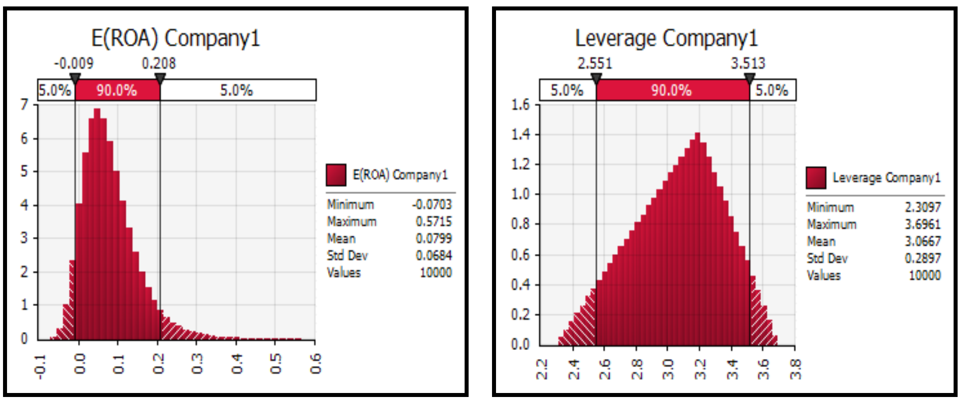
گام ۶: به ازای هر بعد $i \in \{1, \dots, n\}$ مقدار vti را به صورت زیر به روز نمایید: $vti = vti + p_i$

گام ۷: $raf = 1 - (nz^* \alpha)$

گام ۸: به ازای هر بعد مانند $i \in \{1, \dots, n\}$ اگر $p_i \neq 0$ آنگاه $p_i = \alpha + \left(\frac{p_i}{vti} \times raf\right)$

۵- نتایج محاسباتی

بازده شرکت‌ها و همبستگی میان آنها توسط نرم افزار شبیه‌سازی *@Risk* محاسبه شدند. در ابتدا بازده دارایی‌ها (ROA) و اهرم مالی (Leverage) شرکت‌ها محاسبه شد. با توجه به این که تنها برای برخی شرکت‌ها داده‌های مالی تنها ۵ سال موجود بود و این میزان داده برای برآورد بر مبنای صورت‌های مالی ۵ ساله آنها محاسبه شد. با توجه به ناکافی بودن این میزان داده جهت برآورد توزیع احتمالی بازده دارایی‌ها و اهرم‌های مالی، از شبیه‌سازی مبتنی بر روش تولید نمونه تصادفی Latin Hypercube Sampling (LHS) استفاده کردیم. علت استفاده از LHS دست یابی به توزیع-های احتمالی یکنواخت‌تر برای متغیرهای ورودی بوده است. بدین منظور تعداد ۱۰۰۰۰ سناریوی متفاوت برای هر یک از دو پارامتر فوق با استفاده از LHS تولید شد. پس از برآورد ROA و Leverage مطابق رابطه‌ی (۱۲) بازده حقوق صاحبان سهام (ROE)محاسبه گردید تا از آن به عنوان تابع بازده در مدل دو هدفه استفاده نماییم. در شکل زیر محاسبات مربوط به *ROA* و *Leverage* یکی از شرکت‌ها نمایش داده شده است.



شکل ۱- توزیع احتمالات ROA و Leverage برای یک شرکت دلخواه بر اساس تولید ۱۰۰۰۰ سناریو با استفاده از نرم افزار شبیه‌سازی @Risk

پس از *ROE*، نوبت به محاسبه‌ی تابع ریسک سبد می‌رسد. بدین منظور لازم است تا ماتریس همبستگی میان دارایی‌ها را تعریف و محاسبه نماییم. از نرم‌افزار شبیه‌سازی *@Risk* جهت محاسبه‌ی عناصر ماتریس همبستگی σ_{ij} استفاده شد. در نهایت داده‌های موجود به عنوان ورودی مدل بهینه‌سازی چندهدفه، جهت به دست آوردن ترکیب سبد بهینه مورد استفاده قرار گرفتند.

جدول ۱- نتایج شبیه‌سازی بازده دارایی‌ها و اهرم مالی شرکت‌ها. بازده حقوق صاحبان سهام از ضرب این دو به دست می‌آید.

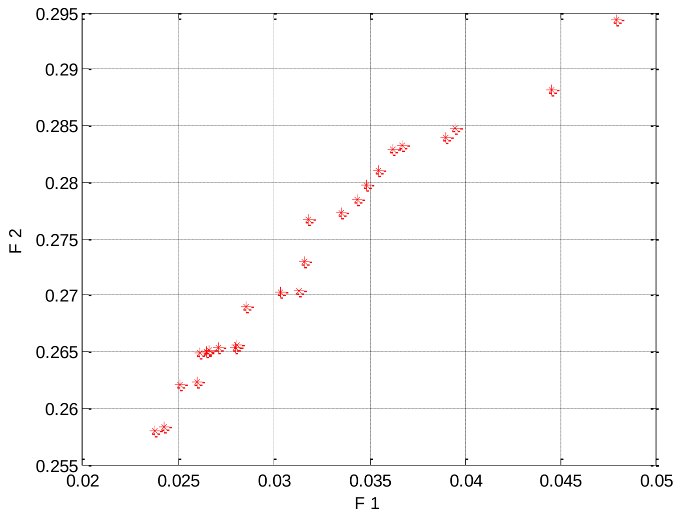
نام دارایی	بازده دارایی	اهرم مالی	بازده حقوق صاحبان سهام
شرکت ۱ (شرکت بالغ)	0.079	3.69	0.294
شرکت ۲ (شرکت بالغ)	0.130	2.64	0.344
شرکت ۳ (شرکت بالغ)	0.128	2.60	0.333
شرکت ۴(شرکت بالغ)	0.160	1.86	0.299
شرکت ۵ (استارت‌آپ)	0.164	2.84	0.468
شرکت ۶ (استارت‌آپ)	0.405	2.72	0.471
شرکت ۷ (استارت‌آپ)	0.189	2.92	0.351
اوراق قرضه اسلامی			0.15 (نرخ بازده)

سطح کمینه و بیشنه برای تعداد دارایی‌ها در سبد به ترتیب برابر ۴ و ۶ در نظر گرفته شد. همچنین حداقل و حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در هر دارایی به صورت جداگانه تعیین شد. برای شرکت‌های بالغ حداقل مقدار برابر با ۰,۱ و حداکثر مقدار برابر ۰,۵ و برای استارت‌آپ‌ها حداقل ۰,۰۵ و حداکثر ۰,۲۵ در نظر گرفته شد. همان طور که در بخش مدل‌سازی ریاضی اشاره شد، مجموع وزن شرکت‌های پرریسک (استارت‌آپ‌ها) نباید از ۰,۲۵ کل سبد فراتر برود. همچنین برای کاهش ریسک سبد، اوراق قرضه اسلامی حتما باید انتخاب شوند. حداقل مقدار برای آنها ۰,۱ و حداکثر آن ۱ خواهد بود (مطابق جدول ۲).

جدول ۲- حداقل و حداکثر سطح سرمایه‌گذاری در هر دارایی

نام دارایی	سطح حداقلی سرمایه‌گذاری	سطح حداکثری سرمایه‌گذاری
شرکت ۱	0.1	0.5
شرکت ۲	0.1	0.5
شرکت ۳	0.1	0.5
شرکت ۴	0.1	0.5
شرکت ۵	0.05	0.25
شرکت ۶	0.05	0.25
شرکت ۷	0.05	0.25
اوراق قرضه اسلامی	0.1	1

با اجرای الگوریتم، مجموعه نقاط پارتو که نشان دهنده‌ی ریسک و بازده سبدهای بهینه هستند، به صورت زیر ظاهر شدند

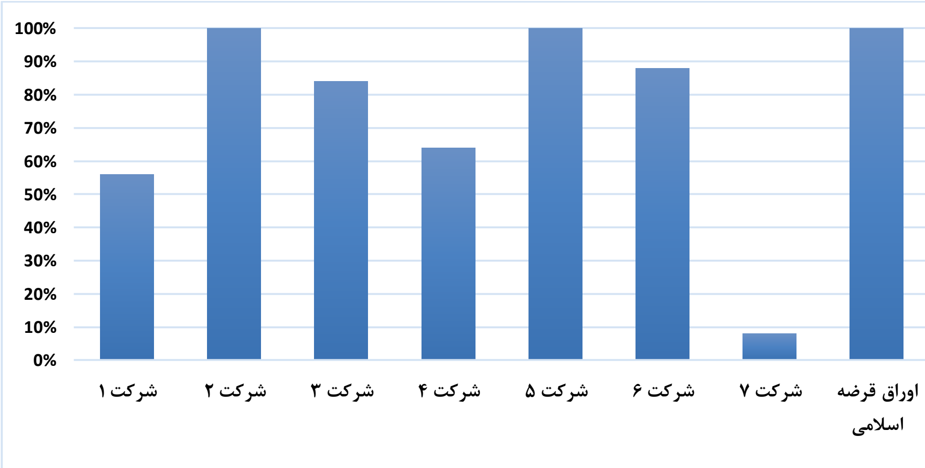


شکل ۲- جوابه‌های بهینه پارتو برای مسأله بهینه‌سازی دوهدفه

مطابق شکل ۲، الگوریتم توانسته است ۲۵ جواب ناچیره (non-dominated) را برای مسأله پیدا کند. محورهای F1 و F2 به ترتیب ریسک و بازده سبد را نشان می‌دهند. شکل ۳ درصد مشارکت هر یک از انواع دارایی‌ها در سبدهای بهینه پارتو را نشان می‌دهد. در ادامه یک نمونه از این ۲۵ جواب بهینه‌ی پارتو نشان داده شده است:

جواب	ریسک	بازده
[0.149 0.201 0.201 0.201 0.160] 0.00 0.00 0.086	0.035	0.28

همان گونه که مشاهده می‌شود در این جواب نمونه، تعداد دارایی‌های موجود ۶ است که بدین معنی است که ما ۶ نوع دارایی مختلف برای سبد خود انتخاب کرده‌ایم که بازدهی ۲۸٪ را به همراه دارد



شکل ۳- درصد مشارکت انواع دارایی‌ها در جواب‌های بهینه‌ی پارتو

همان گونه که مشاهده می‌شود، یک سبد بهینه (از هر دو جنبه‌ی ریسک و بازده) سبدی است که از ترکیبی از شرکت‌های بالغ و استارت‌آپی در آن وجود داشته باشند. بدین معنی که حداقل یکی از شرکت‌های بالغ و یکی از شرکت‌های استارت‌آپی در سبد بهینه حضور خواهند داشت و مطابق نمودار شرکت شماره ۲ که یک شرکت بالغ است به همراه شرکت شماره ۵ که یک شرکت استارت‌آپی است همواره در تمامی سبدهای بهینه وجود دارند. در این میان شرکت ۷ که نسبت به دو شرکت استارت‌آپی دیگر بازده پایین‌تری دارد، حضور بسیار کمتری در سبدهای بهینه دارد.

۶- نتیجه‌گیری و بحث

در این پژوهش یک مسأله‌ی بهینه‌سازی سبد دارایی معرفی شد که در آن هدف ما تعیین بهترین سبد دارایی برای یک شرکت سرمایه‌گذاری است که در سهام شرکت‌های خصوصی سرمایه‌گذاری می‌کند تا این شرکت بتواند ریسک سبد خود را حداقل و همزمان بازده مورد انتظارش را حداکثر نماید. بنابراین یک مدل بهینه‌سازی دوهدفه با مجموعه‌ای از محدودیت‌های مختلف توسعه داده شد.

محدودیت‌ها شامل محدودیت‌های مرسوم در ادبیات موضوع بهینه‌سازی سبد مانند محدودیت در تعداد دارایی‌های موجود در سبد و همچنین محدودیت‌های ویژه‌ی ناشی از ملاحظات خاص شرکت سرمایه‌گذاری می‌شوند که یکی از این محدودیت‌ها تعیین حد بالا برای استفاده از شرکت-

های استارت‌آپی (دارای ریسک بالا) و دیگری تعیین یک سطح حداقلی برای استفاده از دارایی‌های بدون ریسک در سبد هستند.

به دلیل کم بودن حجم داده‌های مرتبط با بازدهی و همبستگی میان شرکت‌های خصوصی، از یک رویکرد شبیه‌سازی جهت محاسبه‌ی بازده و ریسک آنها استفاده کردیم. بدین منظور با استفاده از شبیه‌سازی به برآورد بازده دارایی‌ها و اهمر مالی شرکت‌ها پرداخته و از طریق آنها بازده حقوق صاحبان سهام آنها را محاسبه نمودیم. دیگر خروجی شبیه‌سازی، محاسبه‌ی همبستگی میان بازدهی این شرکت‌ها بود. با توجه به NP-Hard بودن مدل دوهدفه‌ی معرفی شده از الگوریتم فراابتکاری کلونی مصنوعی زنبورهای چندهدفه مبتنی بر کوواریانس جهت حل آن استفاده نمودیم. نتایج به دست آمده توسط الگوریتم نشان می‌دهند که سبدهای بهینه شامل هر دو نوع سهام شرکت‌های بالغ (بازده پایین با ریسک) و شرکت‌های استارت‌آپی (بازده بالا با ریسک بالا) می‌شوند.

پژوهش‌های آتی می‌تواند بر روی تعیین سبدهای بهینه که گوناگونی و تنوع دارایی‌ها در آنها بیشتر است انجام شود. همچنین در این پژوهش فرض بر ثابت و مشخص بودن مقدار سرمایه‌ی اولیه جهت ایجاد سبد بوده است. در حالی که می‌توان با صرف نظر کردن از این فرض، می‌توان به سرمایه‌گذار اجازه استفاده از بدهی در فرآیند سرمایه‌گذاری را داد که چنین کاری گزینه‌های تصمیم‌گیری وی و در نتیجه پیچیدگی فضای جواب مسأله را افزایش می‌دهد. همچنین می‌توان مبلغ سرمایه‌گذاری را تابعی از بازده سبد در نظر بگیریم.

فهرست منابع

* پاکمرام عسگر، بحری ثالث جمال، ولی زاده مصطفی، ۱۳۹۶، انتخاب و بهینه سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم ژنتیک، با بهره گیری از مدل میانگین-نیمه واریانس مارکویتز، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۸، شماره ۳۱، صفحه ۱۹-۴۲
* راعی رضا، محمدی شاپور و علی بیکی هدایت، ۱۳۹۰، بهینه‌سازی سبد سهام با رویکرد "میانگین- نیم واریانس" و با استفاده از روش جستجوی هارمونی، پژوهش‌های مدیریت در ایران، دوره ۱۵، شماره‌ی ۳، از صفحه ۱۰۵ تا ۱۲۸.
* همائی‌فر ساغر، روغنیان عماد، ۱۳۹۵، به کارگیری الگوهای بهینه‌سازی پایدار و برنامه‌ریزی آرمانی در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای، فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، دوره ۷، شماره ۲۸، صفحه ۱۵۳-۱۶۷.
* Anagnostopoulos, K. P. and G. Mamanis (2011). "The mean–variance cardinality constrained portfolio optimization problem: An experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms." Expert Systems with Applications 38(11): 14208-14217.
* Bermúdez, J. D., et al. (2012). "A multi-objective genetic algorithm for cardinality constrained fuzzy portfolio selection." Fuzzy Sets and Systems 188(1): 16-26.
* Chen, A. H., et al. (2012). An artificial bee colony algorithm for the cardinality-constrained portfolio optimization problems. Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on, IEEE.
* Chen, W. (2015). "Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem." Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 429: 125-139.
* Corazza, M., et al. (2013). "Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem." Applied Mathematics and Computation 224: 611-624.
* Deng, G.-F., et al. (2012). "Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization." Expert Systems with Applications 39(4): 4558-4566.
* Fu, T.-c., et al. (2013). "Adopting genetic algorithms for technical analysis and portfolio management." Computers & Mathematics with Applications 66(10): 1743-1757.
* Karaboga, D. (2005). An idea based on honey bee swarm for numerical optimization, Technical report-tr06, Erciyes university, engineering faculty, computer engineering department.
* Karaboga, D. and B. Akay (2009). "A comparative study of artificial bee colony algorithm." Applied Mathematics and Computation 214(1): 108-132.
* Karaboga, D. and B. Basturk (2008). "On the performance of artificial bee colony (ABC) algorithm." Applied soft computing 8(1): 687-697.

- Kumar, D. and K. Mishra (2017). "Portfolio optimization using novel co-variance guided Artificial Bee Colony algorithm." Swarm and Evolutionary Computation 33: 119-130.
- Liao, B.-Y., et al. (2015). Portfolio Optimization Based on Novel Risk Assessment Strategy with Genetic Algorithm. Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2015 IEEE International Conference on, IEEE.
- Macedo, L. L., et al. (2017). "Mean-semivariance portfolio optimization with multiobjective evolutionary algorithms and technical analysis rules." Expert Systems with Applications 79: 33-43.
- Mansini, R., et al. (2015). Portfolio Optimization with Transaction Costs. Linear and Mixed Integer Programming for Portfolio Optimization, Springer: 47-62.
- Markowitz, H. (1952). "Portfolio selection." The journal of finance 7(1): 77-91.
- McKay, M. D., et al. (1979). "Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code." Technometrics 21(2): 239-245.
- Mishra, S. K., et al. (2016). "Prediction based mean-variance model for constrained portfolio assets selection using multiobjective evolutionary algorithms." Swarm and Evolutionary Computation 28: 117-130.
- Mishra, S. K., et al. (2014). "A comparative performance assessment of a set of multiobjective algorithms for constrained portfolio assets selection." Swarm and Evolutionary Computation 16: 38-51.
- Ponsich, A., et al. (2013). "A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications." IEEE Transactions on Evolutionary Computation 17(3): 321-344.
- Pouya, A. R., et al. (2016). "Solving multi-objective portfolio optimization problem using invasive weed optimization." Swarm and Evolutionary Computation 28: 42-57.
- Qu, B. Y. and P. N. Suganthan (2011). "Constrained multi-objective optimization algorithm with an ensemble of constraint handling methods." Engineering Optimization 43(4): 403-416.
- Saborido, R., et al. (2016). "Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection." Applied soft computing 39: 48-63.
- Talbi, E.-G. (2009). Metaheuristics: from design to implementation, John Wiley & Sons.
- Tapia, M. G. C. and C. A. C. Coello (2007). Applications of multi-objective evolutionary algorithms in economics and finance: A survey. Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on, IEEE.

یادداشت‌ها

[1] Qu & Suganthan
[2] Mishra
[3] Markowitz
[4] Macedo
[5] Ponsich
[6] Kumar
[7] Saborido
[8] Talbi
[9] Corazza
[10] Sharpe Ratio
[11] Fu
[12] Chen
[13] Liao
[14] Anagnostopoulos & Mamanis
[15] Bermudez
[16] Deng
[17] Multi-objective Co-variance based ABC
[18] Invasive Weed Optimization
[19] Tapia & Coello
[20] Branke
[21] McKay
[22] Karaboga
[23] Akay