فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸

بررسی عملکرد فرایندهای تصادفی در مدلسازی رفتار سپرده های قرض الحسنه پس انداز

سعید فلاح پور[۱]
محمد جلوداری ممقانی[۲]
محمدرضا دهقانی‌احمدآباد[۳]

تاریخ دریافت مقاله : ۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله : ۹۷/۱۱/۲۷

چکیده

یکی از اساسی‌ترین اقدامات در مدیریت ریسک، به دست آوردن اطلاعات درست و دقیق از ویژگی‌های آماری سری‌های زمانی می‌باشد. در این مقاله، به منظور مدل‌سازی مانده هفتگی سپرده قرض‌الحسنه پس‌انداز در طی آذر سال ۱۳۹۰ تا مرداد ۱۳۹۵، از فرآیندهای تصادفی استفاده شده است. بدین منظور مدل‌های حرکت براونی هندسی، انتشار-پرش، کاکس-اینگرسل-راس، و بازگشت به میانگین به کار می‌بریم. همچنین برای بهبود عملکرد، نوسانات سری زمانی مورد بررسی را به دو بخش قطعی و تصادفی تجزیه و صرفا بخش تصادفی را مدل‌سازی می‌کنیم. بخش قطعی مجموع خط روند و چرخه های دوره‌ای است. پس از تخمین پارامترها با استفاده از روش تابع حداکثر درست‌نمایی و آزمون مدل‌ها بر مبنای معیار MAPE، نتایج حاصل با انتظارات اولیه مطابق و از این قرار است: عملکرد مدل‌ها با جداسازی بخش قطعی و تصادفی، افزایش چشمگیری دارد. با اینکه همزمان پدیده بازگشت به میانگین و پهن بودن دم سری‌های زمانی تایید گردید، اما مدل بازگشت به میانگین (کاکس-اینگرسل-راس) در هر دو حالت روند زدایی شده و نشده عملکرد بهتری از مدل دم پهن (انتشار- پرش) دارد. و سرانجام مدل انتشار-پرش و بازگشت به میانگین، بهترین عملکرد را در بین مدل‌های پیشنهادی دارد.

کلمات کلیدی

سپرده ، ریسک، بازگشت به میانگین، دم پهن.

طبقه بندی JEL : *G17، G21، G32* .

۱ استادیار گروه مدیریت مالی و بیمه، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران ، تهران، ایران.(نویسنده مسئول)
falahpor@ut.ac.ir@ut.ac.ir
۲ استاد گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی، تهران، ایران. j_mamaghani@atu.ac.ir
۳ فارغ التحصیل دکتری مالی، دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، تهران، ایران. m.r.dehghani@ut.ac.ir

مقدمه

یکی از اساسی‌ترین اقدامات در مدیریت ریسک، به دست آوردن اطلاعات درست و دقیق از ویژگی‌های آماری سری‌های زمانی می‌باشد. شناخت ویژگی‌های این سری‌های زمانی در مدل‌سازی‌ها، برای پیش بینی و سناریو سازی کمک شایان توجه‌ی به تحلیل‌گران می‌نماید. بسته به مشخصه‌ی هر سری زمانی، پژوهشگران طیفی از مدل‌ها را برای توضیح و توجیه رفتار آن به کار می برند. این طیف می تواند مجموعه‌ای از مدل های شناخته شده اقتصادسنجی شامل خانواده ARIMA، GARCH، VAR و ... تا فرآیند های تصادفی را در بر گیرد.

در این مقاله بخش مهمی از سپرده‌های بانکداری اسلامی یعنی سپرده‌های قرض‌الحسنه پس‌انداز را با استفاده از فرآیندهای تصادفی مدلسازی می‌کنیم. به عبارت دیگر با توجه به ویژگی منحصر به فرد سری زمانی سپرده های قرض الحسنه، فرآیندهای تصادفی را شناسایی می‌کنیم که ویژگی های آن را دقیقتر توضیح می دهد و می تواند در پیش بینی و تحلیل سناریوهای آتی کارگشا باشد.

دو ویژگی مهمی که یک سری زمانی می تواند داشته باشد وتصمیم گیری تحلیلگران در مدل انتخابی را تحت تاثیر قرار دهد، ویژگی وجود دم پهن و پدیده بازگشت به میانگین است. فرآیندهای ساده و پایه‌ای مثل حرکت براونی هندسی و حرکت براونی حسابی این ویژگی‌ها را در نظر نمی‌گیرند (بریگو و همکاران[1]، ۲۰۰۷). بنابراین سری زمانی که حداقل دارایی یکی از دو ویژگی مذکور باشند توسط این فرآینده ها به خوبی برازش نمی شوند و پاسخگوی نیاز مدلسازی و تحلیل سناریو برای پژوهشگران نخواهند بود.

در این مقاله مدل های گوناگونی از فرآیند های تصادفی بر روی سری زمانی متغیر مورد بررسی، برازش و بر حسب ویژگی‌های منحصر به فرد آن، مناسبترین فرآیند تصادفی با استفاده از معیار ارزیابی عملکرد MAPE انتخاب می گردد. انتظار بر این است، در صورتی که سری زمانی داده ها فرآیند ساده ای داشته باشد، مدل حرکت براونی هندسی بتواند بخوبی بر آن برازش شود. اگر داده ها دارای پدیده بازگشت به میانگین باشند، فرآیندکاکس-اینگرسل-راس(CIR) می تواند بخش زیادی از عدم اطمینان موجود در سری زمانی را تبیین نماید. اما اگر توزیع داده های دم پهن تری نسبت به توزیع نرمال داشته باشد، فرآیند انتشار- پرش با ویژگی های آن سازگارتر خواهد بود و درنهایت اگر سری زمانی داده ها هر دو ویژگی بازگشت به میانگین و پهن بودن دم را داشته باشند، بهترین برازش کننده فرآیند انتشار- پرش بازگشت به میانگین خواهد بود.

سری های زمانی مختلف، بسته به ویژگی های منحصر به فردی که دارند ممکن است توسط یکی از مدل های موصوف بهتر تبیین گردند. برخی ویژگی های ذاتی یک سری زمانی می تواند راهنمای خوبی برای انتخاب مدل بهینه باشد. مثلا، پژوهشگران اعتقاد دارند که سری زمانی نرخ بهره دارای پدیده بازگشت به میانگین می باشد، در حالی که سری زمانی نرخ ارز دم پهن باشد و سری زمانی شکاف اعتباری، همزمان هر دو ویژگی را دارد(بریگو و همکاران، ۲۰۰۷). بنابراین ابتدا ویژگی سری زمانی مانده سپرده های قرض‌الحسنه پس انداز را از دو جنبه بازگشت به میانگین و وجود دم پهن مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ویژگی بازگشت به میانگین

یکی از روش های بررسی پدیده بازگشت به میانگین وجود فرآیند خود-رگرسیونی (AR) در مقادیر اصلی یا بازده های آن است(بریگو و همکاران،۲۰۰۷). در حالتی که سری زمانی دارای فرآیند خود-رگرسیونی باشد یا به عبارت دیگر مانایی سری تایید شود، می توان ادعا نمود که سری دارای ویژگی بازگشت به میانگین است. همچنین با استفاده از آزمون دیکی فولر تعمیم یافته (ADF) وجود پدیده بازگشت به میانگین در سری زمانی بررسی می شود (کرباسی یزدی و همکاران، ۱۳۹۱). با این وجود، ذکر این نکته ضروریست که رد شدن این آزمون ها به معنی عدم وجود پدیده بازگشت به میانگین در حالتی است که مدل یک فرآیند خطی با شوک های نرمال فرض شود(بریگو و همکاران،۲۰۰۷).

ویژگی وجود دم پهن

پهن بودن دم یک سری زمانی می تواند همزمان با وجود پدیده بازگشت به میانگین یا عدم وجود آن، مشاهده گردد. ساده‌ترین روش برای بررسی این موضوع ترسیم منحنی کوانتایل-کوانتایال (QQ plot) است. در این منحنی دم توزیع تجربی داده های مورد بررسی با دم توزیع نرمال مقایسه می شود. آزمون های بیشتر معمولا با بررسی و مقایسه گشتاور های مرتبه سوم و چهارم سری زمانی با توزیع نرمال صورت می پذیرد، یعنی چولگی و کشیدگی سری با چولگی و کشیدی توزیع نرمال مقایسه می گردد. بدین منظور می بایست از آزمون هایی نظیر جاک و برا[۲] یا اندرسن-دارلینگ[۳] بهره گرفت.

مبانی نظری و مروری بر مطالعات گذشته

برای مدلسازی رفتار سپرده ها، به مانند سایر متغیرهای مالی، روش های گوناگونی وجود دارد. طی پژوهشی که توسط (فراندورفر و شورل، ۲۰۰۷) صورت گرفت، محققان به این نتیجه رسیدند که حجم سپرده های پس انداز در اقتصاد سوئیس با افزایش نرخ بهره کاهش و با کاهش نرخ بهره افزایش می یابد. یعنی نرخ بهره عامل تعیین کننده حجم سپرده ها در آینده می باشد. این نتایج در پژوهش (کاکبرنر و ویلینگ، ۲۰۰۴) مورد تایید واقع نشد. برخی از محققین (فراندورفر و شورل، ۲۰۰۷) مقادیر گذشته سپرده‌ها را بهترین عامل در پیش بینی و مدل‌سازی آینده آنها می‌دانند. فراچوت از سطح نرخ بهره اقتصاد، و ارتباط آن با نرخ سپرده و مانده قبلی سپرده را بهترین عوامل در پیش بینی حجم آتی سپرده های پس انداز می‌داند (فراچوت، ۲۰۰۱).

از طرفی مدلی که سلواجیو معرفی می کند (سلواجیو، ۱۹۹۶)، از نرخ بهره بازار و متغیرهای اقتصاد کلان همچون، درآمد ملی، رشد اقتصادی، نرخ تورم برای مدلسازی و پیش بینی سپرد های پس انداز استفاده می کند. در همین راستا پژوهش (اوبرین، ۲۰۰۰) ، نیز از متغیر های اقتصاد کلان به عنوان بهترین متغیر های توضیحی یاد می کند. اما بیش ترین مطالعات به بررسی تاثیر نرخ بهره بر رفتار سپرده پرداخته اند. پژوهشگرانی همچون (دیوپره ، ۱۹۹۶ و جارو و ون دونتر، ۱۹۹۸) علاوه بر نرخ بهره، اثر ترند زمانی را نیز در نظر می گیرند و به ارائه مدلی برای پیش بینی حجم سپرده های پس انداز می پردازند.

از طرف دیگر، بسیاری از محققین، به نحوی تصادفی بودن را در مدلسازی خود لحاظ کردند. همچون پژوهشی که در سال ۲۰۰۴ صورت گرفت، پژوهشگران علاوه بر متغیر های کلان اقتصادی یک جزء تصادفی را با استفاده از فرآیند وینر به مدل خود اضافه نمودند (کاکبرنر و ویلینگ، ۲۰۰۴). آدام، برای مدلسازی رفتار سپرده های پس انداز، همزمان با استفاده از حرکت براونی هندسی به مدلسازی رفتار نرخ بهره و حجم سپرده ها پرداخت و سپس آن دو را با استفاده از ضریب همبستگی به همدیگر مرتبط نمود (آدام و همکاران، ۲۰۰۴). در پژوهشی که توسط پری و استاجی (۲۰۰۰) صورت گرفته است، آنها برای مدلسازی جریانات نقدی که دارای زودبرادشت ها و سپرده گذاری های حجم بالا است، از حرکت براونی با جزء رانش به همراه پرش های مثبت و منفی با توزیع پوآسن مرکب استفاده کرده اند. اشمالتز (۲۰۰۹)در پایان نامه دکتری خویش، مدلی کمی از اندازه گیری و مدیریت ریسک نقدینگی در بانک های تجاری ارائه کرده است. مولف از فرآیند تصادفی برای مدلسازی استفاده کرده است. در این پایان نامه، جریانات نقدی هر یک از

محصولات (دارایی ها، بدهی ها و اقلام زیر خطی) جداگانه مدلسازی می شوند، بدین صورت که هر محصول ممکن است دارای جریانات نقدی ۱) قطعی ۲) تصادفی منتج شده از نیاز نقدینگی و ۳) جریانات نقدی منتج شده از ریسک شهرت باشند.

در ادامه به مطالعه مفاهیم پایه ای فرآیند های تصادفی مورد استفاده در این مقاله می پردازیم. این مفاهیم شامل مدل ریاضی، پارامترهای مدل و روش تخمین پارامترها می باشد.

مدل حرکت براونی هندسی

رفتار قیمتی بسیار از دارایی ها و محصولات مالی در یک دوره زمانی، عموما توسط بازده مورد انتظار توضیح داده می شوند. در صورتی که بازده مورد انتظار مثبت باشد، روند صعودی و بر عکس، اگر بازده مورد انتظار منفی باشد روند نزولی خواهد بود ودر حالتی که بازده مورد انتظار صفر باشد، روندی وجود ندارد. علاوه بر روند، بخش دیگری از تغییرات قیمتی این دارایی ها مربوط به جزء تصادفی و غیر قابل پیش بینی آن است. اگرچه که نوسانات تصادفی قابلیت پیش بینی ندارند، اما می توان براساس داده های تاریخی آن، توزیع احتمال این نوسانات را پیش بینی نمود. یک رویکرد رایج در مدلسازی نوسانات، مفروض گرفتن فرایند نرمال یک یا چند متغیره است. قالب عمومی برای تشریح فرآیند تصادفی وابسته به زمان به شکل زیر بیان می گردد:

$$dS_t = \alpha(S,t)dt + \sigma(S,t)dW_t \qquad (۱)$$

که در آن α، جزء رانش (روند)، σ نوسان که خود تابعی از زمان می باشد، S قیمت دارایی و W_t فرآیند استاندارد وینر است.

در صورتی که جزء رانش، $\mu = \alpha(S,t)$ و σ ثابت باشد، آنگاه فرایند به صورت

$$dS_t = \mu dt + \sigma dW_t \qquad (۲)$$

درمی‌آید، که به حرکت براونی حسابی موسوم است.

یکی از ویژگی‌های این مدل ، بی‌کرانی نوسانات قیمت داراییS_t می باشد. یعنی در هر زمان، قیمت دارایی می تواند مقادیر مثبت یا منفی اختیار کند. همچنین مقدار جاری آن ارتباطی به مقادیر قبلی ندارد. قاعدتا این رفتار منطبق بر فرایند قیمتی دارایی های مالی نیست. بنابراین لازم است این مدل طوری تعدیل شود که، حرکت آتی قیمت دارایی را متناسب با قیمت فعلی آن نشان دهد. بنابراین اگر بخش رانش و بخش تصادفی را به ترتیب به صورت $\alpha(S,t) = \mu S_t$ و $\sigma(S,t) = \sigma S_t$ بنویسیم آنگاه معادله‌ی (۱) به صورت

$$dS_t = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (۳)$$

در می‌آید.

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \mu\Delta t + \sigma\Delta W_t \quad (۴)$$

رابطه (۴) تقریب غیر خطی یا گسسته سازی (۳) را نشان می دهد. این رابطه در بازه های زمانی کوتاه مدت برقرار است و بیان می کند که تغییرات قیمتی یک دارایی دارای توزیعی نرمالی با میانگین $\mu\Delta t$ و انحراف معیار $\sigma\sqrt{\Delta t}$ است (هال[۴]، ۲۰۰۶).

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \sim N\left(\mu\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}\right) \quad (۵)$$

یکی از مزایای حرکت براونی هندسی در این می باشد که قیمت منفی برای دارایی ها امکان پذیر نیست چراکه هرگونه تغییر قیمتی، درصدی از قیمت جاری آن دارایی می باشد (چنس[۵]، ۱۹۹۴).

در تقریب گسسته حرکت براونی هندسی، عدم اطمینان مدل توسط فرایند وینر توضیح داده می شود. ویژگی های فرآیند وینر شامل میانگین و واریانس، به شرح زیر می باشد (چنس، ۲۰۰۵):

$$dW_t = \varepsilon_t\sqrt{dt} \quad ; \quad \varepsilon \sim N(۰,۱) \quad (۶)$$

$$E(dW_t) = ۰ \quad (۷)$$

$$Var(dW_t) = E(dW_t^۲)$$

$$E(dW_t^۲) = E\left[\left(\varepsilon_t\sqrt{dt}\right)^۲\right] = E(\varepsilon_t^۲ dt) = \left(E(\varepsilon_t^۲)\right)dt;$$

$$E(\varepsilon_t^۲) = Var(\varepsilon_t) - E(\varepsilon_t)^۲ = ۱ - ۰ = ۱,$$

$$Var(dW_t) = E(dW_t^۲) = \left(E(\varepsilon_t^۲)\right)dt = dt. \quad (۸)$$

همچنین (هال، ۲۰۰۶) اثبات می‌کند که لگاریتم‌نمایی قیمت یک دارایی به شرح زیر می‌باشد:

$$S_t = S_o e^{\eta t + \sigma W_t}$$

$$\eta = \varphi[\mu - \frac{\sigma^۲}{۲}, \frac{\sigma}{\sqrt{t}}$$

$$S_t = S_o e^{\left(\mu - \frac{\sigma^۲}{۲}\right)t + \sigma W_t} \quad (۹)$$

تخمین پارامترهای μ و σ

در این مرحله الگویی معرفی می شود که بر اساس داده های تاریخی (مانده سپرده های قرض الحسنه پس انداز) ،پارامترهای مدل یعنی $\theta = (\mu, \sigma)$، تخمین زده شود. بدین منظور از روش حداکثر درست‌نمایی برای تخمین θ استفاده می شود.

تابع حداکثردرست‌نمایی برای یک متغیر تصادفی داری توزیع مشابه و مستقل (iid) به شرح زیر است:

$$L(\theta) = f_\theta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \qquad (۱۰)$$

روش حداکثر درستنمایی، مجموعه پارامتر $\hat{\theta}$ را به گونه ای تخمین می زند که تابع $L(\theta)$ حداکثر گردد. با توجه به اینکه در معادله (۱۰) حاصلضرب مقادیر کوچک به صفر میل می کند، می توان آنرا به شرح زیر اصلاح نمود:

$$L^*(\theta) = \sum_{i=1}^{n} log f_\theta(x_i) \quad (۱۱)$$

برای یافتن حداکثر تابع $L^*(\theta)$، بوسیله الگوریتم های بهینه یابی و از روش های عددی استفاده می شود (بریگو و همکاران، ۲۰۰۷).

مدل انتشار-پرش:

در مدل حرکت براونی، برای تخمین پارامترها و شبیه سازی قیمت ها، فرض بر این است که رفتار تصادفی مدل از توزیع نرمال تبعیت می نماید، در حالی که می دانیم تعداد پرش هایی که در قیمت دارایی های مالی در دنیای واقع رخ می دهد به مراتب بیشتر از پرش های مورد انتظار در توزیع نرمال است. تحقیقات زیادی برای به حساب آوردن پهن بودن دم توزیع قیمت دارایی های مالی صورت گرفته است (نامپالا[۶]، ۲۰۰۹، مونگوی[۷]، ۲۰۱۵).

روشی که در این مقاله از آن استفاده شده است، بسط دادن مدل حرکت براونی هندسی با اضافه نمودن فرآیند پرش است. بخش اول این فرایند مدلسازی تعداد دفعات پرش در هر بازه زمانی به کمک توزیع پواسن و بخش دیگر آن مربوط به مدلسازی شدت هر پرش با استفاده از توزیع یکنواخت می باشد (ماسترو[۸]، ۲۰۱۳).

شکل ریاضی مدل به شرح ذیل می باشد:

$$dS_t = S_t[\mu_d dt + \sigma_d W_t + J(Q) dN_t] \qquad (۱۲)$$

که در آن، μ_d جزء رانش بخش حرکت براونی هندسی، σ_d انحراف معیار بخش حرکت براونی هندسی، W_t فرآیند وینر، $J(Q)$ شدت یا اندازه هر پرش و N_t فرآیند پواسن تک بعدی با نرخ λ که نشان دهنده تعداد دفعات پرش می باشد.

در مدل فوق، تعداد دفعات پرش در هر بازه زمانی توسط dN_t به روش زیر ایجاد می شود:

$$P_k(\lambda dt) = probability[dN_t = k] = \frac{e^{(-\lambda dt)}(\lambda dt)^k}{k_i} \qquad (۱۳)$$

در صورتی که λ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه احتمال رخ دادن هر پرش در یک بازه زمانی کوتاه مدت dt را می توان به روش زیر تقریب زد:

$$probability[dN_t = ۱] \approx \lambda dt \qquad (۱۴)$$

شدت هر پرش توسط توزیع $J(Q)$ تعیین میشود که مستقل از تعداد دفعات پرش است. بخش اضافه شده در مدل (۱۲)، دارای میانگین $E[J(Q)]\lambda dt$ و واریانس $E[J^۲]\lambda d$ است (هانسون و وستمن، ۲۰۰۲).

برای شبیه سازی و تخمین پارامترهای مدل (۱۲) می توان آنرا به شرح زیر بازنویسی کرد (ماسترو، ۲۰۱۳).

$$d(lnS_t) = \mu_d dt + \sigma_d W_t + \ln[۱ + J(Q) dN_t]$$

$$S_t = S_o \mu^{\int_o^t \mu_d ds + \sigma_d W_s + \ln[۱ + J(Q)] dN_s} \qquad (۱۵)$$

در این پژوهش برخلاف تحقیق (اشمالتز، ۲۰۰۹)، پرش های مثبت و منفی وجود خواهند داشت.

فرض می شود شدت هر پرش با توزیع یکنواخت در دامنه $[Q_a, Q_b]$ وجود داشته باشد. به عبارتی، هر پرشی که اتفاق می افتد، می تواند در بازه ای بین منفی ترین پرش ممکن Q_a تا مثبت ترین پرش ممکن Q_b قرار داشته باشد.

توزیع پرش مدل (۱۲) دارای میانگین و واریانسی به شرح زیر می باشد (هانسون و ژو، ۲۰۰۴).

$$\mu_j = E[Q] = \frac{۱}{Q_b - Q_a}\int_{Q_a}^{Q_b} q\,dq = \frac{Q_a + Q_b}{۲} \qquad (۱۶)$$

$$\sigma_j^۲ = Var[Q] = \frac{۱}{Q_b - Q_a}\int_{Q_a}^{Q_b} (q - \frac{Q_b - Q_a}{۲})^۲ = \frac{(Q_b - Q_a)^۲}{۱۲} \qquad (۱۷)$$

به منظور شبیه سازی فرآیند انتشار-پرش از مدل زیر استفاده شده است:

$$S_{i+1} = S_i e^{\left(\mu_d - \frac{\sigma_d^2}{2}\right)\Delta t + \sigma_d \sqrt{\Delta t} N(0,1) + Q_i dN_i} \qquad (18)$$

به منظور کالیبره کردن و تخمین پارامترهای مدل، یعنی $(\mu_d, \sigma_d, \lambda, \mu_j, \sigma_j)$، از روش حداکثر درستنمایی استفاده شده است(ماسترو،۲۰۱۳).

مدل بازگشت به میانگین

می توان پدیده بازگشت به میانگین را ویژگی نوسان محدود یک متغیر تصادفی حول یک مقدار ثابت یا مقدار متغیر وابسته به زمان تعریف نمود. همانگونه که در بخش مقدمه بدان اشاره شد، وجود فرآیند خودرگرسیونی مرتبه اول یا به عبارت عمومی تر، مانایی یک سری زمانی ، به معنای وجود پدیده بازگشت به میانگین در آن سری زمانی می باشد.

همانگونه که اشاره شد، می توان با آزمون کردن مانایی یک سری توسط آزمون هایی همانند دیکی فولر و دیکی فولر تعمیم یافته، وجود پدیده بازگشت به میانگین را در یک سری زمانی بررسی نمود. یکی از شناخته شده ترین فرآیند های تصادفی بازگشت به میانگین، فرآیند واسیچک می باشد که اولین بار از آن برای مدلسازی رفتار تصادفی نرخ های بهره کوتاه مدت استفاده گردید (واسیچک، ۱۹۷۷).

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma dW_t \qquad (19)$$

که در آن، σ انحراف معیار ،α سرعت بازگشت به میانگین و θ میانگین بلند مدت سری زمانی است.

در توسعه مدل واسیچک، طی پژوهشی که توسط (کاکس-اینگرسل-راس ، ۱۹۸۵) صورت پذیرفت، مدل (۱۹) به شرح زیر تغییر یافت:

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t \qquad (20)$$

که در آن پارامترهای مدل همان پارامتر های معادله (۱۹) می باشد.

یکی دیگر از مدل‌هایی که در این پژوهش مورد استفاده قرار می‌گیرد، مدل‌کاکس-اینگرسل-راس (CIR) است. برای شبیه‌سازی این فرآیند در سری‌های زمانی غیر پیوسته از رابطه زیر استفاده می شود:

$$X(t_i) = \alpha\theta\Delta t + (1 - \alpha\Delta t)X(t_{i-1}) + \sigma\sqrt{X(t_{i-1})\Delta t}\varepsilon t_i \qquad (21)$$

که در آن:

$$\varepsilon_t \sim N(0,1)$$

به منظور تخمین پارامترهای α، θ و σ می بایست از روش حداکثر درست نمایی با تابع لگاریتمی زیر استفاده نمود:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f_{CIR}(X(t_i)|X(t_{i-1}); \alpha, \theta, \sigma)$$

برای سرعت و دقت بیشتر، پارامترهای اولیه را می توان با استفاده از رگرسیون و معادلات زیر محاسبه نمود (بریگو و دیگران، ۲۰۰۷).

$$X(t_i) = c + bX(t_{i-1}) + \delta\varepsilon(t_i) \qquad (۲۲)$$

$$\alpha_0 = -\log(b)/\Delta t$$

$$\theta_0 = E(X_t)$$

$$\sigma = \sqrt{2\alpha_0 Var(X_t)/\theta_0}$$

مدل انتشار-پرش و بازگشت به میانگین

در بخش های قبل، دو ویژگی مهم سری های زمانی یعنی، وجود پدیده بازگشت به میانگین و پهن بودن دم مورد بررسی قرار گرفت و مدل هایی برای تبین این ویژگی ها تشریح شد. در پاره ای از اوقات ممکن است، یک سری زمانی هم زمان هر دو ویژگی را دارا باشد. به عبارتی، متغیر تصادفی حول مقدار ثابتی در طول زمان نوسان می کند و هم زمان با مقادیری از پرش مواجه است. یکی از روش هایی که می توان این ویژگی را مدلسازی نمود ،ترکیب کردن مدل های (۱۲) و (۲۰) می باشد. یعنی مدلی ارائه گردد که همزمان دارای جزء بازگشت به میانگین و جزء پرش باشد، در حالی که جزء روند و تصادفی آن نیز موجود باشد.

شبیه به پژوهشی که تامپالا در سال ۲۰۰۹ برای شناسایی رفتار قیمت برق در بورس انجام داد (تامپالا، ۲۰۰۹) ، در این پژوهش نیز از مدلی مشابه استفاده می گردد:

$$dX(t) = (\alpha - \theta X(t))dt + \sigma dW(t) + J(\mu_j, \sigma_j)dN(\lambda) \qquad (۲۳)$$

که در آن، α و θ، پارامترهای مربوط به پدیده بازگشت به میانگین، σ انحراف معیار، $W(t)$ فرآیند وینر، $J(\mu_j, \sigma_j)$، توزیع نرمال با میانگین μ_j و انحراف معیار σ_j و نشاندهنده شدت هر پرش، $N(\lambda)$ توزیع پواسن با میانگین λ که تعداد دفعات پرش در بازه زمانی dt را تعیین می کند.

برای تخمین پارامترهای مدل (۲۳) یعنی $(\alpha, \theta, \sigma, \lambda, \mu_j, \sigma_j)$، از روش زیر استفاده شده است:

با احتمال $(1-\lambda\Delta t)$ قیمت از تابع زیر پیروی می کند:

$$X_t = \alpha\Delta t + \phi X_{t-1} + \sigma\varepsilon_t \tag{۲۴}$$

و با احتمال $\lambda\Delta t$ از معادله (۲۵) پیروی خواهد نمود.

$$X_t = \alpha\Delta t + \phi X_{t-1} + \sigma\varepsilon_t + \mu_j + \sigma_j\varepsilon_{tj} \tag{۲۵}$$

که در آنها ε_t، متغیر های تصادفی از تابع توزیع نرمال می باشد.

در این شرایط، تابع چگالی X_t به شرط X_{t-1} به شرح زیر خواهد بود.

$$f(X_t|X_{t-1}) = (\lambda\Delta t)N_1(X_t|X_{t-1}) + (1-\lambda\Delta t)N_2(X_t|X_{t-1})$$

$$N_1(X_t|X_{t-1}) = (2\pi(\sigma^2+\sigma_j^2))^{\frac{-1}{2}} e^{\left(\frac{-(X_t-\alpha\Delta t-\phi X_{t-1}-\mu_j)^2}{2(\sigma^2+\sigma_j^2)}\right)}$$

$$N_2(X_t|X_{t-1}) = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-1}{2}} e^{\left(\frac{-(X_t-\alpha\Delta t-\phi X_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)}$$

حال می توان مجموعه پارامترهای مدل (۲۵) را با تابع لگاریتمی حداکثر درستنمایی زیر تخمین زد:

$$min_\theta = \sum_{t=1}^{n} log\left(f(X_t|X_{t-1})\right)$$

مطالعات پیشین

همگام با پیشرفت مهندسی و علوم مربوط به فرآیندهای تصادفی در دنیا و کاربردی کردن در انواع بازارهای مالی شامل، بازار پول، سرمایه، ارز و ...، در ایران نیز، طی سال‌های اخیر پژوهش‌هایی در این زمینه صورت گرفته است.

در پژوهشی که توسط کرباسی و همکاران انجام شد، وجود پدیده بازگشت به میانگین در بورس اوراق بهادار تهران مورد بررسی قرار دادند. پژوهشگران با استفاده از آزمون ریشه واحد (دیکی فولر تعمیم یافته)، وجود پدیده بازگشت به میانگین را در شاخص کل قیمت سهام، شاخص قیمت و بازده نقدی سهام و شاخص ۵۰ شرکت برتر، بررسی نمودند. نتایج حاصل از این پژوهش بیانگر آن است که تغییرات متوالی در شاخص کل قیمت سهام و شاخص ۵۰ شرکت برتر از فرآیند گام تصادفی پیروی کرده و در نتیجه آن پدیده بازگشت به میانگین مشاهده نشده است. در حالی که شاخص قیمت و بازده نقدی در سطح اطمینان ۵٪ دارای پدیده بازگشت به میانگین می باشد (کرباسی و همکاران، ۱۳۹۱).

در همین راستا تحقیق دیگری حول پدیده بازگشت به میانگین در قیمت نفت توسط طیبی و همکارن انجام شده است. پژوهشگران در این مقاله، نااطمینانی در قیمت نفت سنگین ایران را با استفاده از الگوی بازگشت به میانگین در دوره ۱۹۸۵-۲۰۰۹ برآورد کردند. آنها جزء انتشار مدل را به عنوان شاخصی از نا اطمینانی در نظر گرفتند. طبق تحقیقات آنها، از آنجایی که مدل بازگشت به میانگین فرض می‌کند قیمت به صورت تصادفی حول مقدار میانگین در نوسان است، با واقعیت‌های بازار نفت سازگاری بیشتری دارد. در انتهای مقاله، آنها نااطمینانی قیمت نفت را از طریق برآورد ضریب جزء انتشار یا وینری در الگوی بازگشت به میانگین در چهار سناریو مختلف برآورد کردند و نتایج مربوطه را با وقایع رخ داده در آن بازه زمانی مورد بررسی و تطبیق قرار دادند (طیبی و همکاران،۱۳۹۲).

دسته دیگری از پژوهش‌ها، پهن بودن دم سری‌های زمانی را در نظر گرفتند و مدل‌های مختلف را آزمودند. برای مثال، در مقاله مولایی و همکاران قیمت سهام را با استفاده از دو نوع فرآیند تصادفی مدل‌سازی نمودند. داده های این پژوهش شامل مشاهدات روزانه شاخص کل قیمت بازار سهام، شاخص ۵۰ شرکت برتر و شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ۵ فروردین ۱۳۸۵ تا ۲۶ فروردین۱۳۹۴ است. به منظور مدل سازی رفتار شاخص قیمت از دو معادله دیفرانسیل تصادفی استفاده شده است که عبارت اند از :حرکت براونی هندسی و حرکت براونی هندسی همراه با گارچ غیرخطی. براساس نتایج این پژوهش: ۱) با توجه به معیار لگاریتم تابع درست‌نمایی، حرکت براونی هندسی همراه با گارچ غیرخطی در هر سه گروه از داده های مورد بررسی دارای عملکرد بهتر نسبت به حرکت براونی هندسی است.۲) براساس الگوی معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسان‌تصادفی، شاخص‌کل قیمت بیشتر تحت تاثیر اخبار خوب است. ۳) تاثیر اخبار بد بر شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس بیش از تاثیر اخبار خوب است.۴) واریانس غیرشرطی شاخص‌کل در دو نقطه‌زمانی دارای شکست ساختاری است، واریانس غیرشرطی شاخص۵۰ شرکت برتر در یک نقطه زمانی دارای شکست ساختاری است و واریانس غیرشرطی شاخص ۳۰ شرکت بزرگ بورس پایدار بوده و فاقد شکست ساختاری است (مولایی و همکاران، ۱۳۹۴).

همچنین، خداویسی و ملابهرامی در پژوهشی پیش‌بینی نرخ ارز را با استفاده از فرایندهای تصادفی بررسی کردند. در این مقاله به منظور مدل‌سازی و پیش‌بینی روند سری زمانی نرخ ارز در بازار رسمی ارز ایران، مدل حرکت براونی هندسی و مدل انتشار-پرش مرتون به کار می‌گیرند. نتایج پیش‌بینی این مدل‌ها با پیش‌بینی مدلARIMA مقایسه‌شده‌است. پژوهشگران به این جمع‌بندی

می‌رسند که مدل حرکت براونی هندسی قادر به در نظر گرفتن جهش‌های موجود در نرخ ارز نمی‌باشد و بهترین مدل برای و بهترین مدل برای پیش بینی این سری زمانی ،مدل انتشار-پرش مرتون است (خداویسی و ملابهرامی، ۱۳۹۰).

در مقاله‌ای دیگر، فلاح پور و مطهری نیا، نوسان تحقق یافته در شاخص بورس تهران را با استفاده از فرایند انتشار-پرش مدلسازی نمودند. نتایج آنها حاکی از آن بود که مدلسازی نوسان تحقق یافته بر اساس فرآیند انتشار-پرش خطای کمتری نسبت به مدل های گذشته دارد (فلاح پور و مطهری نیا، ۱۳۹۶).

روش شناسی پژوهش

پژوهش حاضر به لحاظ دسته بندی نوع اول، تحقیق کاربردی محسوب می‌شود. زیرا نتایج حاصل از آن می‌تواند مورد استفاده شرکت ها و مدیران مالی قرار گیرد. به علاوه این پژوهش به لحاظ دسته بندی نوع دوم، در دسته تحقیقات آزمایشی قرار می‌گیرد. مانده هفتگی سپرده های قرض الحسنه یک بانک تجاری در ایران با توجه به در دسترس بودن اطلاعات آن به عنوان نمونه در نظر گرفته شده است.

منبع اطلاعات خلاصه دفتر کل حسابداری یکی از بانک های تجاری ایران بوده است که با استفاده از سامانه های داخلی آن بانک قابل تحصیل می باشد. در این پژوهش، بر روی سری زمانی مانده هفتگی ۵ ساله سپرده های قرض الحسنه، پارمتر های فرآیند های تصادفی مورد استفاده با استفاده از کد نویسی در نرم افزار MATLAB تخمین زده می شود. روش کالیبره کردن و تخمین پارمترهای مدل های فرآیند تصادفی تابع حداکثر درستنمایی (MLE) می باشد. داده های مورد استفاده به منظور تخمین پارامترهای مدلهای پیشنهادی شامل میانگین هفتگی مانده حساب قرض‌الحسنه به مدت ۱۳۹ هفته می باشد. این داده ها از آذر سال ۱۳۹۰ تا مرداد ۱۳۹۵ جمع‌آوری شده است.

سوالات اصلی این پژوهش به شرح زیر می باشد.

آیا سری زمانی مانده سپرده های قرض الحسنه پس انداز دارای فرآیند پرش می باشد؟

آیا سری‌زمانی مانده سپرده‌های‌قرض‌الحسنه‌پس‌انداز دارای پدیده بازگشت به میانگین می‌باشد؟

آیا جدا نمودن روند و چرخه‌های تجاری، از سری‌زمانی مانده سپرده‌های قرض‌الحسنه پس‌انداز عملکرد مدل‌ها را افزایش می دهد؟

کدام یک از مدل های فرآیند تصادفی مورد استفاده بهترین و کدام یک ضعیف‌ترین عملکرد را در تبیین رفتار سپرده های قرض الحسنه پس انداز دارند؟

بررسی اولیه داد ها

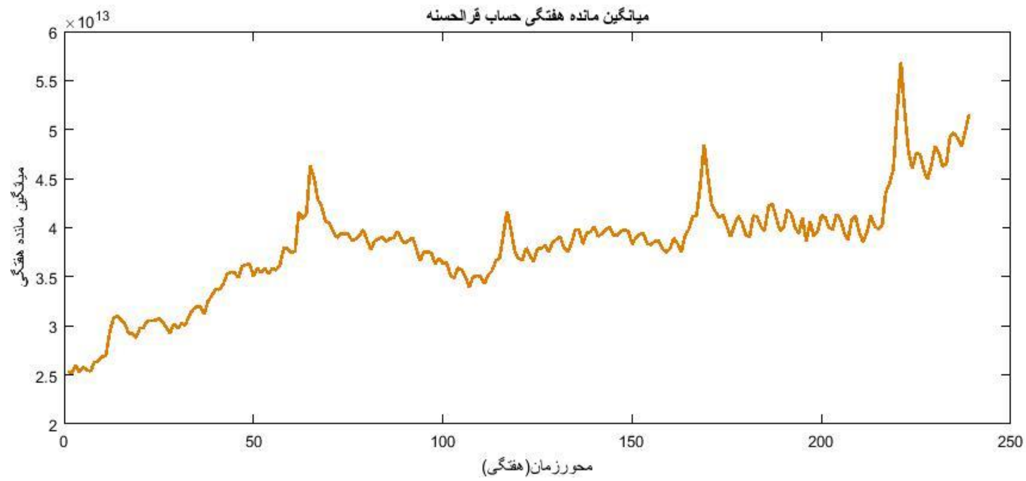
جدول ۱: آماره های مربوط به توزیع سری زمانی مانده ها و بازده ها

آماره	سری زمانی مانده ها	سری زمانی بازده ها
کمترین	2.5E+13	-9.31%
بیشترین	5.7E+13	12.19%
میانه	3.9E+13	0.14%
میانگین	3.8E+13	0.30%
انحراف معیار	5.4E+12	3.10%
چولگی	-0.03	0.61
کشیدگی	3.85	4.72

در جدول ۱، آماره های توزیع سری زمانی مانده حساب های قرض الحسنه پس انداز و تغییرات آن (بازده ها) نشان داده شده است. برای محاسبه بازده ها از رابطه (۲۶) استفاده شده است:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \quad (۲۶)$$

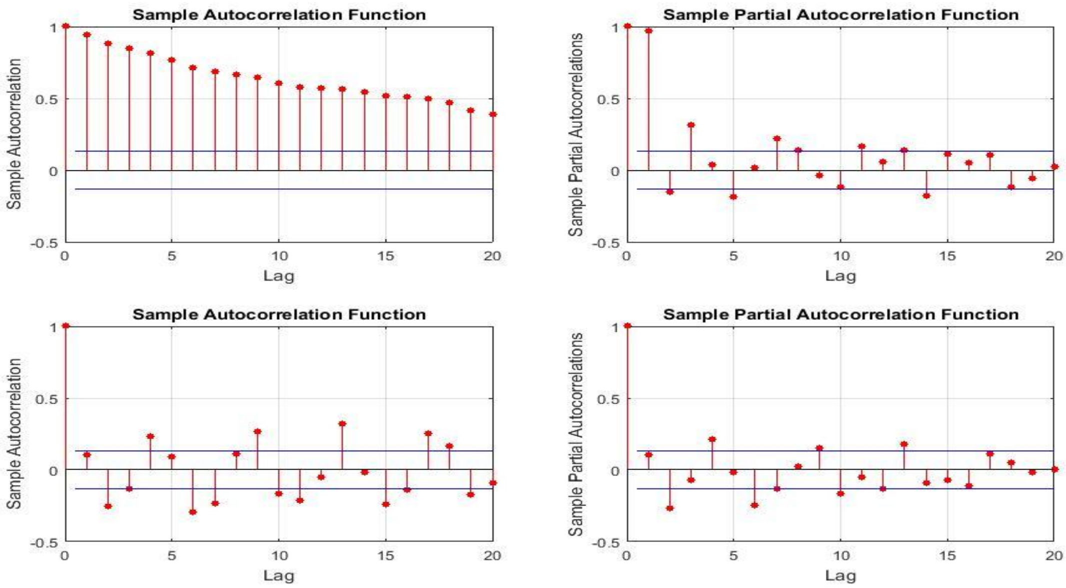
که در آن، S_t مقدار مانده حساب در روز t می باشد.



نمودار ۱: نمودار خطی مانده هفتگی حساب قرض الحسنه پس انداز

بررسی وجود پدیده بازگشت به میانگین در داده ها

همانگونه که در بخش ۱-۱ بدان اشاره شد، یکی از روش های بررسی پدیده بازگشت به میانگین وجود فرآیند خود-رگرسیونی (AR) در مقادیر اصلی یا بازده های آن است(بریگو و همکاران، ۲۰۰۷). در حالتی که سری زمانی دارای فرآیند خود-رگرسیونی باشد یا به عبارت دیگر مانایی سری تایید شود، می توان عنوان نمود که سری دارای ویژگی بازگشت به میانگین است. همچنین می توان با استفاده از آزمون دیکی فولر تعمیم یافته (ADF) وجود پدیده بازگشت به میانگین را آزمون نمود(کرباسی یزدی و همکاران، ۱۳۹۱).



نمودار ۲: نمودار توابع خود همبستگی و خود همبستگی جزئی سری زمانی مانده ها و بازده ها برای ۲۰ وقفه اول. دو نمودار بالا مربوط به سری زمانی مانده ها و دو نمودار پایین مربوط به سری زمانی بازده ها می باشد.

همانگونه که از نمودار ۲ قابل مشاهده است، در سری زمانی مانده ها، هیچکدام از توابع خود همبستگی و خود همبستگی جزئی، وجود مانایی در سری زمانی تایید نمی شود، چراکه در تابع خودهمبستگی، شرط مانایی، ضرایب خودهمبستگی با افزایش وقفه ها می باشد که چنین چیزی

رویت نمی‌شود. همچنین در تابع خود همبستگی جزئی، می‌توان وجود ریشه واحد را مشاهده نمود. بنابراین از آنجایی که سری زمانی نامانا می‌باشد، پدیده بازگشت به میانگین نیز وجود ندارد.

شاید بهتر باشد به جای مدل سازی مانده ها، بازده آنها مدل‌سازی شود و با یک رابطه ریاضی ساده مجددا آنها را به مانده تبدیل نماییم. بنابراین ضروریست تا سری زمانی بازده‌ها نیز بررسی شود. دو نمودار پایین در شکل ۲، مربوط به توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی بازده‌ها می‌باشد. همانگونه که مشخص است، هر دو تابع مانایی سری زمانی را تایید می‌نمایند و بنابراین می‌توان عنوان نمود که سری زمانی بازده ها دارای پدیده بازگشت به میانگین هستند.

در ادامه برای بررسی دقیق تر، از آزمون دیکی فولر تعیمم یافته بر روی هر دو سری زمانی استفاده می شود. نتایج در جدول ۲ خلاصه شده است. همانگونه که انتظار می رفت، این آزمون وجود پدیده بازگشت به میانگین را برای ۵ وقفه زمانی در سری زمانی مانده ها رد می کند و وجود آن برای سری زمانی بازده ها تایید می شود.

جدول ۲: آزمون دیکی فولر تعمیم یافته بر روی سری زمانی مانده ها

شرح	وقفه ۱	وقفه ۲	وقفه ۳	وقفه ۴	وقفه ۵
معناداری(PVAL)	/۸۹	/۹۴	/۹۵	/۹۲	/۹۳
مقدار بحرانی	/۸۴	۱/۲۷	۱/۳	۱/۰۵	۱/۱۱
فرض مانایی (وجود پدیده بازگشت به میانگین	رد می شود	رد می شود	رد می شود	رد می شود	رد می شود

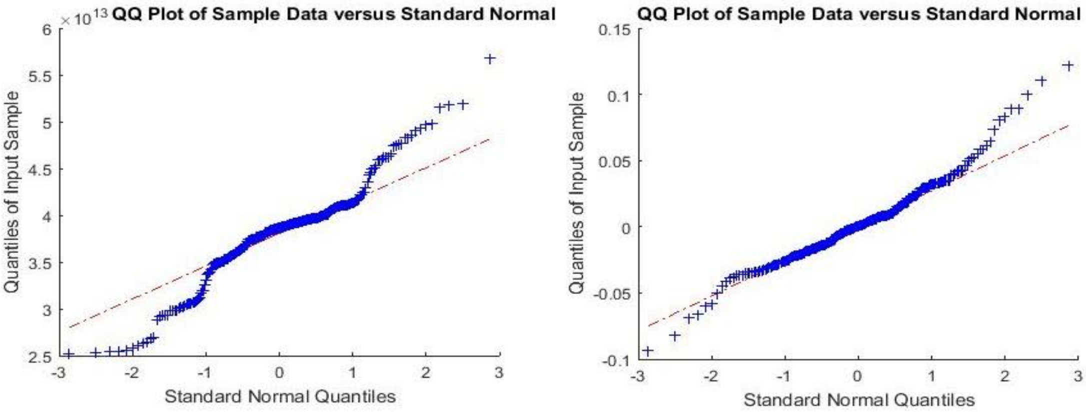
جدول ۳: آزمون دیکی فولر تعمیم یافته بر روی سری زمانی بازده ها

شرح	وقفه ۱	وقفه ۲	وقفه ۳	وقفه ۴	وقفه ۵
معناداری(PVAL)	۰	۰	۰	۰	۰
مقدار بحرانی	-۱۳/۲۷	-۱۰/۵۸	-۶/۸۸	-۶/۳	-۷/۳۶
فرض مانایی (وجود پدیده بازگشت به میانگین)	تایید می شود	تایید می شود	تایید می شود	تایید می شود	تایید می شود

بررسی ویژگی وجود دم پهن

همانطور که در بخش ۲-۱ بدان اشاره شد، پهن بودن دم یک سری زمانی می تواند همزمان با

وجود پدیده بازگشت به میانگین یا عدم وجود آن، مشاهده گردد. ساده ترین روش برای بررسی این موضوع ترسیم منحنی چارکی (QQ plot) است. در این منحنی دم های داده های مورد بررسی با دم توزیع نرمال مقایسه می شود. آزمون های بیشتر می تواند با بررسی و مقایسه گشتاور های مرتبه سوم و چهارم سری زمانی با توزیع نرمال صورت پذیرد، یعنی چولگی و کشیدگی سری با چولگی و کشیدی توزیع نرمال مقایسه گردد. بدین منظور می توان از آزمون هایی نظیر جاک و برایا اندرسن-دارلینگ بهره گرفت.



نمودار ۳: نمودار کوانتایل-کونتایل توزیع داده ها در برابر توزیع نرمال استاندارد. منحنی سمت چپ مربوط به سری مانده ها و منحنی سمت راست مربوط به سری بازده ها می باشد.

همانگونه که از نمودار ۳ و جدول ۱ قابل برداشت است، هر دو سری زمانی تفاوت قابل ملاحظه ای با توزیع نرمال دارد. برای بررسی دقیق تر از دو آزمون جاک و برا و اندرسن-دارلینگ به شرح جدول ۳ استفاده شده است.

جدول ۴: نتایج آمون جاک و برا و اندرسن-دارلینگ برای تست نرمالیتی سری های زمانی

		سری زمانی مانده ها	سری زمانی بازده ها
آزمون جاک و برا	معناداری pval)	0.031	0.001
	آماره آزمون	7.17	43.94
	مقدار بحرانی	5.72	5.72
آزمون اندرسن-دارلینگ	معناداری pval)	0.001	0.001
	آماره آزمون	4.81	1.90
	مقدار بحرانی	0.75	0.75

نتایج جدول ۴، غیر نرمال بودن هر دو سری زمانی را در سطح معناداری ۰۵/. تایید می نماید. بر مبنای این نتایج،دم های هر دو توزیع متفاوت از توزیع نرمال می باشد و به بیانی دیگر، دم‌ها پهن‌تر از حالت نرمال هستند. می توان استنباط نمود که تعداد پرش هایی که در این دو سری اتفاق افتاده بیشتر از تعداد پرش هایی است که توزیع نرمال انتظار دارد. لذا برای مدلسازی این سری‌ها بهتر است از مدل‌های دم پهن همانند مدل (۱۲) استقاده شود.

مدل‌های مورد استفاده

در این پژوهش درصددیم تا از بین مدل های فرآیندهای تصادفی معرفی شده در بخش‌های پیشین، بهترین مدل را برای سناریو سازی و پیش بینی مانده سپرده های قرض الحسنه طی ۵۲ هفته آینده، انتخاب نماییم. مدل های رقیب شامل:

حرکت براونی هندسی

$$dS_t = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (۳)$$

مدل دم پهن، انتشار-پرش

$$dS_t = S_t[\mu_d dt + \sigma_d W_t + J(Q) dN_t] \quad (۱۲)$$

مدل بازگشت به میانگین، کاکس-اینگرسل-راس(CIR)

$$dX_t = \alpha(\theta - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t} dW_t \quad (۲۰)$$

مدل انتشار-پرش و بازگشت به میانگین

$$dX(t) = \big(\alpha - \theta X(t)\big)dt + \sigma dW(t) + J\big(\mu_j, \sigma_j\big) dN(\lambda) \quad (۲۳)$$

همانگونه که می دانیم، با افزایش نقدینگی در اقتصاد، در صورت ثابت ماندن سهم درصد هر بانک تجاری، مانده سپرده های آن نیز افزایش می یابد. در سال های مورد بررسی با مراجعه به آمار بانک مرکزی، در می یابیم که نقدینگی کل اقتصاد به طور متوسط سالانه بیش از ۲۰ درصد رشد داشته است. لذا منطقی به نظر می رسد که برای پیش بینی مانده سپرده های بانک در سال آتی، به میزان رشد مورد انتظار در نقدینگی کل اقتصاد، مانده سپرده های آن افزایش یابد. همچنین یک بخش دیگر از نوسانات موجود در مانده سپرده های بانک، مربوط به چرخه هایی مثل فصلی، ماهانه و ... می باشد. در صورتی که بتوان اثرات دوره ای را استخراج نمود، پیش‌بینی‌ها بسیار تقویت می‌شود. می توان دو بخش روند و اثرات فصلی را با هم جمع نمود و به عنوان بخش قطعی سری زمانی در نظر گرفت و تنها نوسانات تصادفی آنها را که توسط روند و چرخه های فصلی قابل توضیح

نیستند، مدل‌سازی کرد. به عبارتی، می توان با خارج نمودن اثر روند و چرخه‌های دوره‌ای، پسماندهای سری اولیه را مدل‌سازی نمود.

در این پژوهش برای بهبود عملکرد پیش بینی ها و سناریو سازی ها، ابتدا با استفاده از معادله (۲۷) جزء روند و چرخه های دوره ای را خارج می نماییم، آنگاه پسماندهای سری زمانی را مورد مطالعه قرار می دهیم. یعنی، پارامترهای مربوط به چهار مدل پیشنهادی را با استفاده از سری زمانی پسماندها تخمین می زنیم. سپس بر اساس مدل کالیبره شده، مقادیر پسماند را برای دوره زمانی مورد نظر پیش بینی می نماییم و در نهایت، جزء روند و چرخه های دوره ای را به آن اضافه می‌نماییم تا به پیش بینی سری زمانی اولیه (مانده حساب قرض الحسنه پس انداز) دست یابیم.

خارج نمودن روند زمانی و چرخه های دوره ای

ابتدا سری زمانی مانده ها را تبدیل به سری زمانی لگاریتمی می نماییم. سپس آنرا به دو بخش، جزء قطعی و جزء تصادفی تقسیم می نماییم:

$$\ln(S_t) = f(t) + y_t$$

که در آن، $f(t)$ نشانگر جزء قطعی و y_t، جزء تصادفی می باشد.

جز قطعی را با تابع زیر تخمین می زنیم:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \sin(2\pi t) + \alpha_2 \cos(2\pi t) + \alpha_3 \sin(4\pi t) + \alpha_4 \cos(4\pi t) \quad (۲۷)$$

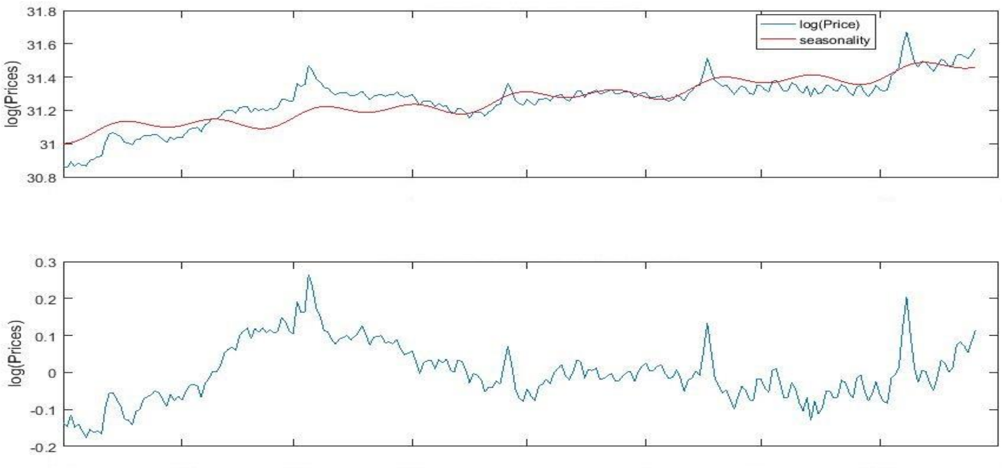
که در آن، α_i مقادیر ثابت می باشد.

در نهایت می توان سری پسماندها را از رابطه (۲۸) بدست آورد:

$$y_t = \ln(S_t) - f(t) \quad (۲۸)$$

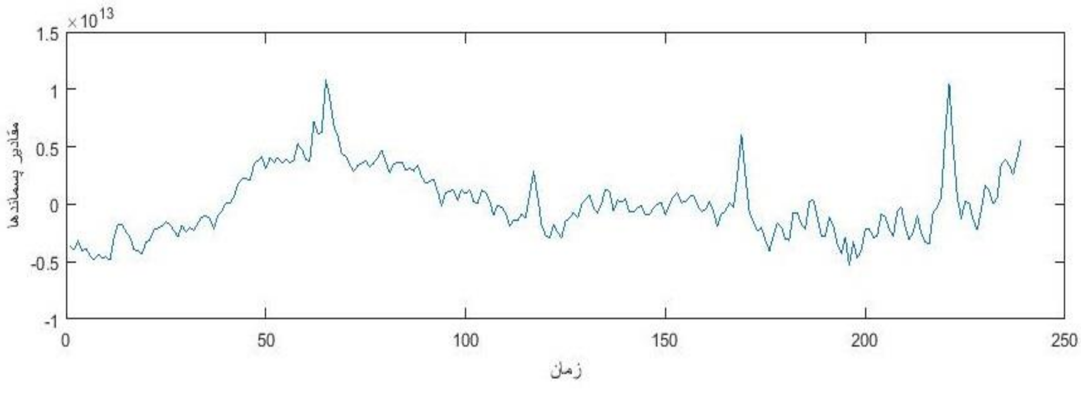
همانگونه که مشخص است، سری زمانی پسماندها به صورت لگاریتمی می باشد. برای رسید به سری زمانی پسماندهای واقعی z_t، می توان از معادله زیر بهره جست.

$$z_t = S_t / e^{f(t)} \quad (۲۹)$$



نمودار ۴: منحنی بالا: سری زمانی لگاریتمی مانده سپرده های پس انداز به همراه خط روند و چرخه های دوره ای. منحنی پایین: سری زمانی لگاریتمی پسماندها

نمودار ۴، نتایج خارج کردن خط روند و چرخه های دوره ای را به تصویر می کشد. بنابراین در ادامه می توان برای دقت بیشتر، ابتدا پسماندها را با استفاده از فرآیند های تصادفی مدلسازی نمود و سپس با بازگرداندن خط روند و چرخه های دوره ای، به مدلسازی مانده سپرده ها رسید. پیش از شروع کار می بایست، سری زمانی پس مانده ها را از لحاظ پدیده بازگشت به میانگین و پهن بودن دم بررسی نمود. بدین منظور از پس مانده های غیر لگاریتمی استفاده شده است. نتایج آزمون ها در جدول ۵ قابل مشاهده است.



نمودار ۵: مقادیر پسماندها پس از لگاریتم زدایی

بررسی های اولیه سری زمانی پسماندها

ابتدا وجود پدیده بازگشت به میانگین را بررسی می نماییم. برای این منظور همانند بخش قبل، از آزمون دیکی فولر تعمیم یافته استفاده می کنیم. این آزمون را برای ۵ وقفه زمانی انجام می دهیم و وجود ریشه واحد را تست می کنیم. در صورتی که فرض ریشه واحد در این وقفه ها رد شود، می توان نتیجه گرفت که سری زمانی مانا است و در نتیجه آن وجود پدیده بازگشت به میانگین تایید می شود.

جدول ۵، نتایج این آزمون را خلاصه می کند. همانگونه که مشخص است، سری زمانی پسماندها مانا هستند و دارای پدیده بازگشت به میانگین می باشد. این نتایج در سطح اطمینان ۰۱/. قابل تایید است.

در ادامه، جدول ۶، نرمال بودن توزیع آماری سری پسماندها را با استفاده از آزمون های جاک و برا و اندرسون-دارلینگ بررسی می نماید. از این طریق می توان به پهن بودن دم سری پی برد. همانگونه که از نتاج جدول مشخص است، این دو آزمون فرض صفر مبنی بر نرمال بود توزیع آماری داده ها را در سطح اطمینان۰۱/. رد می کنند. در نتیجه سری زمانی پسماندها دارای دم ای پهن تر از توزیع نرمال می باشد.

جدول ۵: آزمون دیکی فولر تعمیم یافته بر روی سری زمانی پسماندها

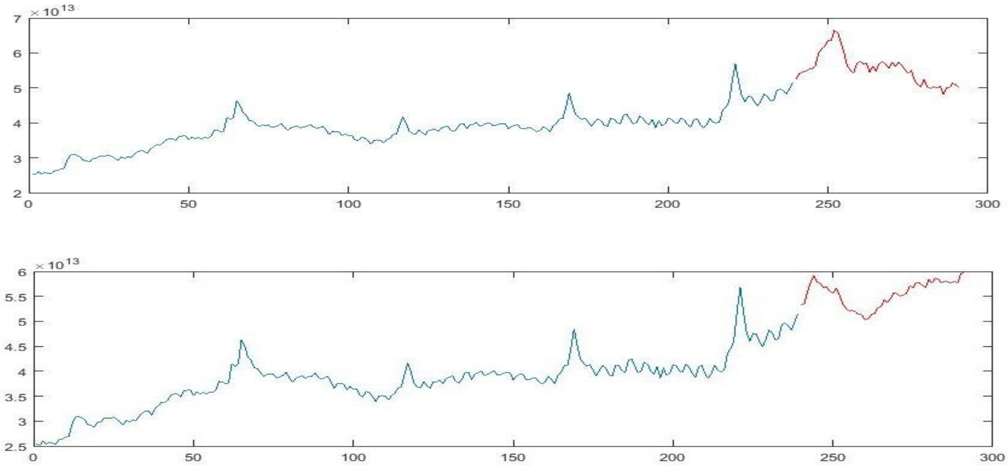
شرح	وقفه ۱	وقفه ۲	وقفه ۳	وقفه ۴	وقفه ۵
معناداری(PVAL)	۰۰۱/.	۰۰۹/.	۰۱۲/.	۰۰۴/.	۰۰۵/.
مقدار بحرانی	-۳/۸۷	-۲/۶۴	-۲/۵۰	-۲/۹۱	-۲/۸۷
فرض مانایی (وجود پدیده بازگشت به میانگین	تایید می‌شود	تایید می‌شود	تایید می‌شود	تایید می‌شود	تایید می‌شود

جدول ۶: نتایج آمون جاک و برا و اندرسن-دارلینگ برای تست نرمالیتی سری های زمانی پسماندها

آزمون جاک و برا	معناداری (pval)	۰۰۰/.
	آماره آزمون	۲۶/۹۱
	مقدار بحرانی	۵/۷۲
آزمون اندرسن-دارلینگ	معناداری (pval)	۰۰۰/.
	آماره آزمون	۲/۴۸
	مقدار بحرانی	۷۵/.

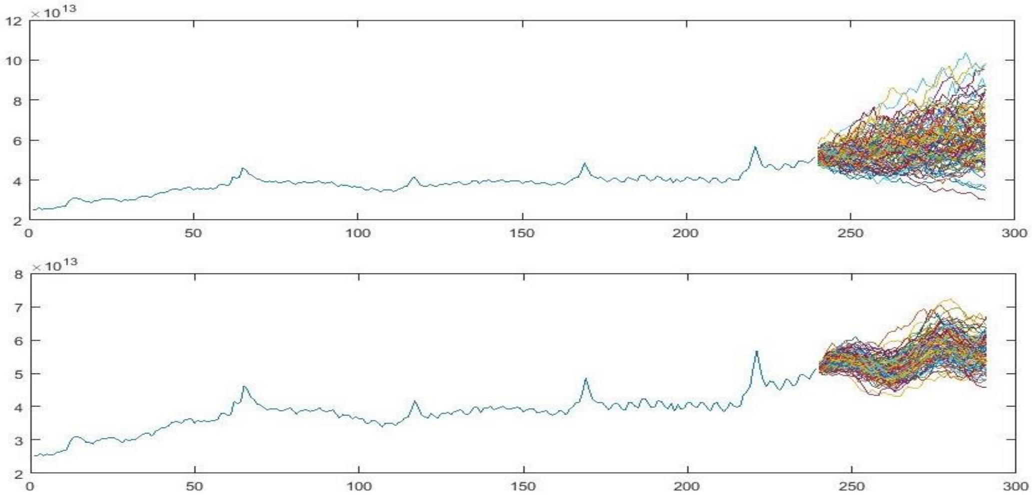
نتایج

در این بخش مدل‌های پیشنهادی را بر روی مانده ها و پسماندها، اجرا می کنیم تا بتوانیم مقادیر پارامتر های هر مدل را تخمین بزنیم. سپس در ۱۰۰ سناریو، مسیر ۵۲ هفته آتی را پیش بینی می نماییم. به عنوان نمونه، در نمودار ۶ نتایج پیش بینی با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی بر روی سری زمانی مانده ها نشان می دهد.این نمودار در دو بخش به تصویر کشیده شده است. منحنی بالا، اولین سناریو مسیر ۵۲ هفته را بر حسب مدل حرکت براونی هندسی در امتداد ۲۳۹ هفته موجود نشان می دهد. در نمودار پایین، ابتدا خط روند و چرخه های دوره ای از سری مانده ها ، حذف گردیده، سپس مدل حرکت براونی هندسی بر روی سری زمانی پسماندها کالیبره شده است. در ادامه مسیر ۵۲ هفته آتی پسماندها پیش بینی گردیده و در نهایت با اضافه نمودن جزء روند و چرخه های دوره ای، به سری زمانی مانده ها دست یافته ایم.



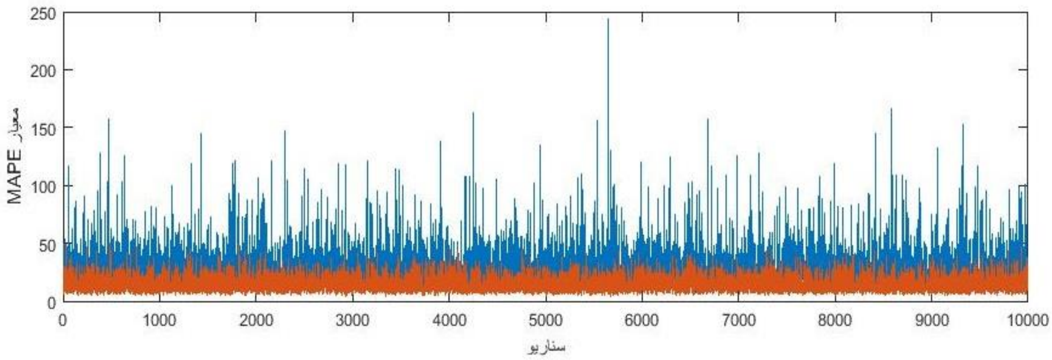
نمودار۶: مسیر ۵۲ هفته ای مانده سپرده ها. نمودار بالا، سناریو سازی بدون در نظر گرفتن روند و چرخه‌های دورهای. نمودار پایین، حذف اثر روند و چرخه های دوره‌ای.

برای نشان دادن عملکرد دو روش، یعنی مدلسازی مانده ها و مدلسازی مانده ها پس از حذف اثر روند و چرخه های دوره ای، ۹۹ سناریو باقی مانده را به هر دوروش در نمودار۷ به تصویر کشیده ایم. همانگونه که قابل مشاهده است، وجود چرخه های دوره ای در سناریو های روش دوم به وضوح مشخص است. همچنین در همه این صد سناریو، مانده هفته پنجاه و دوم در روش اول بین ۲۹ تا ۹۸ هزار میلیارد ریال قرار دارد، در حالی که مانده پیش بینی شده به روش دوم در بازه ۴۵ تا ۶۷ هزار میلیار ریال قرار دارد. به نظر می رسد، عملکرد روش دوم بهتر از روش اول باشد.



نمودار ۷: مسیر ۵۲ هفته ای مانده سپرده ها طی ۱۰۰ سناریو. نمودار بالا، سناریو سازی بدون در نظر گرفتن روند و چرخه های دورهای. نمودار پایین، حذف اثر روند و چرخه های دوره ای.

به منظور مقایسه مدل‌های مختلف در پیش‌بینی یک سری زمانی، از معیارهای مختلفی استفاده می‌شود. در این پژوهش همانند مقاله (اصغری اسکویی، ۱۳۹۴)، از معیار MAPE استفاده می شود. دو نکته این مقاله را در مبحث ارزیابی عملکرد مدل‌ها، از بقیه متمایز می نماید. ۱) از آنجایی که در پژوهش برای برآورد دقیق تر پارامتر ها، نمونه یادگیری و آزمون جدا نشده است، برای محاسبه MAPE ابتدا تا انتهای سری زمانی را در ۱۰،۰۰۰ سناریو پیش بینی می نماییم. ۲) برای هر مدل، به ازای هر سناریو، معیار MAPEجداگانه محاسبه می شود. به عبارت دیگر این معیار را برای هر مدل ۱۰،۰۰۰ بار محاسبه می کنیم. با این روش ، تا حد زیادی اثر تصادفی بودن را در بهتر نشان دادن ارزیابی مدل‌ها حذف می‌نماییم. به عبارتی دیگر، بر خلاف سایر پژوهش‌ها تک سناریوهای هر مدل را باهم مقایسه نمی‌کنیم، چرا که احتمال دارد بدترین سناریو یک مدل با بهترین سناریو مدل دیگر مقایسه شود و نتایج کار اشتباه باشد. نمودار ۸، معیار MAPE را برای ۱۰،۰۰۰ سناریو در مدل حرکت براونی هندسی به دو روش معمولی و روندزدایی شده نشان می‌دهد. می‌دانیم که هر چه معیار MAPE کمتر باشد، نشان دهنده آن است که خطای پیش‌بینی کمتر بوده است. بنابراین در نمودار ۸، میله های قرمز رنگ خطای پیش‌بینی کمتری را نشان می‌دهند. در نتیجه می‌توان عنوان نمود که عملکرد مدل حرکت براونی هندسی پس از حذف اثر روند و چرخه های دوره‌ای، از مدل حرکت براونی معمولی بهتر است.



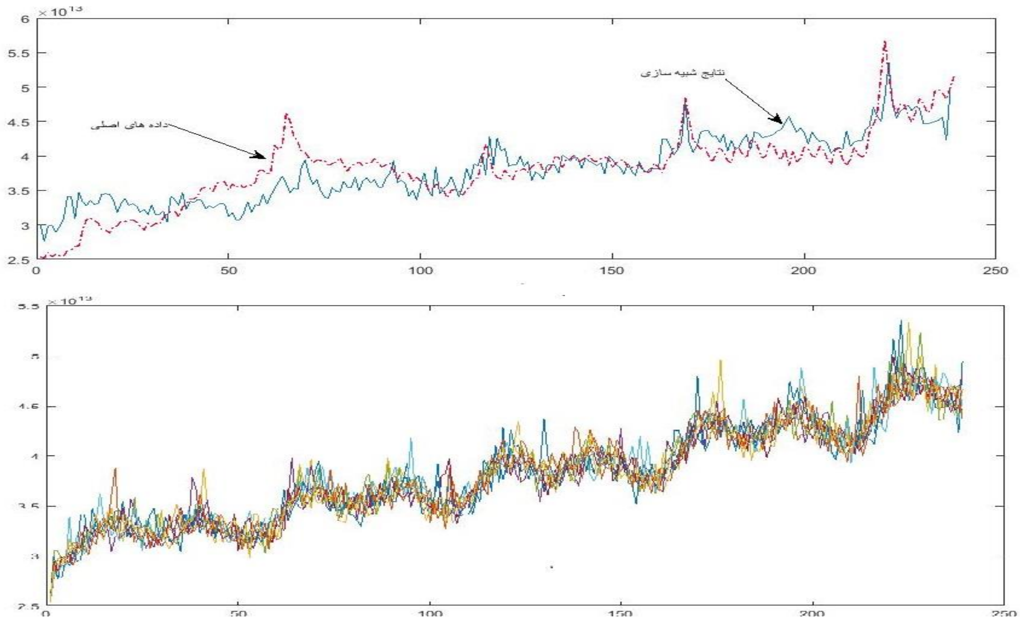
نمودار ۸: معیار MAPE به ازای هر سناریو. میله های آبی مربوط به مدل حرکت بروانی هندسی بدون توجه به روند و میله های قرمز مربوط به مدل حرکت براونی هندسی با حذف اثر روند و چرخه های دوره ای است.

به همین ترتیب، مدل های معرفی شده را با استفاده از سری زمانی مانده حساب ها و سری زمانی پس ماندها کالیبره کرده و معیار MAPE هر مدل را در ۱۰،۰۰۰ سناریو محاسبه می کنیم. برای مقایسه پذیریبیشتر، مجموع و میانگین معیار MAPE هر مدل را گزارش می نماییم. جدول ۷ ، پارامتر های مدل های پیشنهادی را بر حسب دو روش معمولی و روند زدایی شده به همراه مجموع و میانگین معیار MAPE برای ۱۰،۰۰۰ سناریو، خلاصه نموده است.

جدول ۷: تخمین پارامترها و معیار ارزیابی عملکرد هر مدل

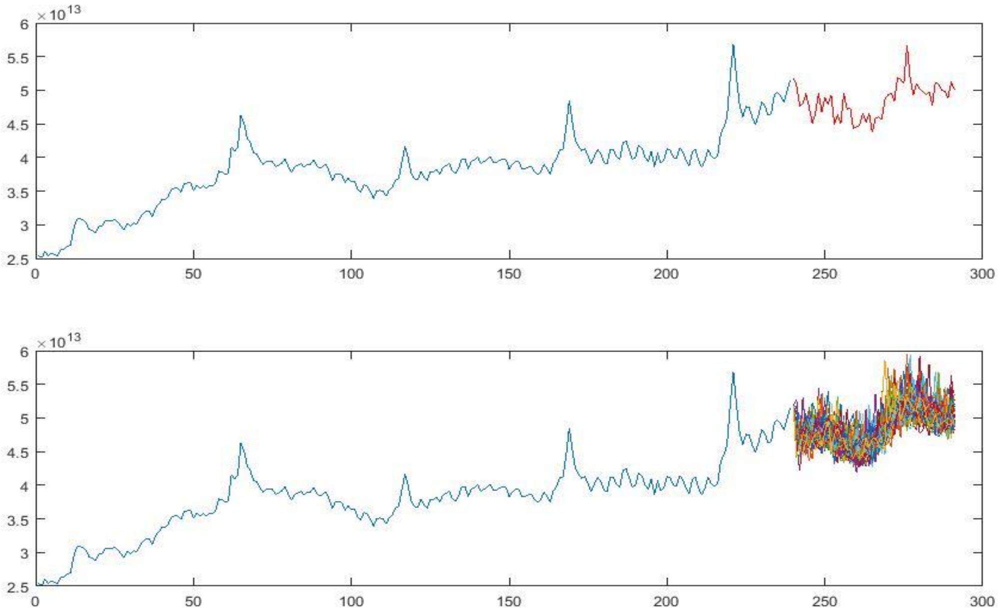
	مدل	μ/α	σ	θ	λ	μ_J	σ_J	مجموع معیار MAPE برای ۱۰،۰۰۰ سناریو	میانگین معیار MAPE برای ۱۰،۰۰۰ سناریو
روند زدایی نشده	حرکت براونی هندسی	/۱۵	/۲۲	–	–	–	–	۲۷۵،۷۵۷	۲۷/۶
	انتشار-پرش	-/۱۱	/۱۸	–	۵/۸۱	/۰۵	/۰۰	۲۶۶،۶۷۱	۲۶/۶
	کاکس-اینگرسل-راس	۱/۵۳	/۰۱	/۳۱	–	–	–	۱۲۲،۶۲۹	۱۲/۲
روند زدایی شده	حرکت براونی هندسی	-/۰۰	/۰۸	–	–	–	–	۱۴۵،۵۱۴	۱۴/۵
	انتشار-پرش	-۱/۶۳	/۳۳	–	۱۳/۷۱	/۱۲	/۰۰	۲۶۵،۶۳۶	۲۶/۵
	کاکس-اینگرسل-راس	۴/۲۵	/۲۲	۱/۰۱	–	–	–	۸۴،۳۶۷	۸/۴
	انتشار-پرش و بازگشت به میانگین	-/۰۷	/۱۸	۴۶/۶	۱/۲۷	/۰۹	/۰۰۱	۶۵،۹۰۷	۶/۶

همانگونه که از جدول ۷ قابل مشاهده است، عملکرد مدل های پیشنهادی در حالت روند زدایی شده بهبود محسوسی می یابند. تنها مدل انتشار پرش است که تفاوت چندانی در عملکرد آن مشاهده نشده است. پایین ترین درصد خطا مربوط به مدل انتشار-پرش به همراه بازگشت به میانگین است. بعد از آن به ترتیب مدل کاکس-اینگرسل-راس روند زدایی شده و مدل بدون روند آن قرار دارند. برای قیاس بیشتر، در نمودار ۹، یک سناریو به تصادف از مدل برتر انتخاب شده و به همراه داده های واقعی، از ابتدا تا انتهای دوره نشان داده شده است. نکته قابل توجه وجود پرش های متناسب به همراه انفجاری نبودن سناریو شبیه سازی شده است. به عبارتی این مدل با دقت زیادی توانایی سناریو سازی برای دوره های آینده را دارد.



نمودار ۹: مقایسه عملکرد مدل برتر با داده های واقعی. نمودار بالا، خط آبی رنگ داده های شبیه سازی شده با مدل برتر و خط چین قرمز رنگ، داده های واقعی. نمودار پایین، نتایج ۱۰ سناریو از مدل برتر.

همچنین در نمودار ۱۰، پیش بینی ۵۲ هفته ای مدل برتر را با تک سناریو و ۱۰۰ سناریو همزمان نشان داده ایم. بدین ترتیب می توان پیش بینی این مدل را با مدل حرکت براونی هندسی مقایسه نمود.



نمودار ۱۰:مسیر ۵۲ هفته ای آینده مانده سپرده ها. نمودار بالا، منحنی قرمز رنگ ۵۲ هفته پیش بینی شده را برای مانده سپرده ها نشان می دهد. نمودار پایین، مسیر ۵۲ هفته ای آینده مانده سپرده ها را طی ۱۰۰ سناریو نشان می دهد.

نتیجه گیری و بحث

در این پژوهش سعی شده است تا با استفاده از فرآیندهای تصادفی، یکی از مهمترین انواع سپرده‌های اسلامی، یعنی سپرده قرض‌الحسنه پس انداز را پیش بینی و سناریوسازی نماییم. بدین منظور از مدل‌های ۱) حرکت براونی هندسی ۲) انتشار-پرش ۳) کاکس-اینگرسل-راس و ۴) انتشار-پرش و بازگشت به میانگین استفاده شده است. بعلاوه، بررسی های اولیه ای بر روی سری زمانی داده ها صورت پذیرفت تا مشخص گردد که کدام مدل عملکرد بهتری خواهد داشت.

در بخش دیگری از این پژوهش، برای بهبود عملکرد، نوسانات سری زمانی مورد بررسی به دو بخش تقسیم شده است. بخش قطعی و بخش تصادفی. بخش قطعی مجموع خط روند و چرخه‌های دوره‌ای فرض شده است و صرفا بخش تصادفی با استفاده از فرآیندهای تصادفی مدل‌سازی شده است. همانند سری اصلی داده ها، بر روی پسماندها نیز آزمون هایی صورت پذیرفت تا مشخص گردد که کدام مدل برای این سری زمانی مناسب تر خواهد بود. این آزمون ها شامل، بررسی وجود

پدیده بازگشت به میانگین و پهن تر بودن دم توزیع آماری سری نسبت به توزیع نرمال می باشد. بررسی پدیده بازگشت به میانگین توسط آزمون دیکی فولر تعمیم یافته در ۵ وقفه زمانی و توابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی در ۲۰ وقفه زمانی انجام گردید. بررسی نحوه توزیع سری زمانی بوسیله آزمون های جاک و برا و اندسون-دارلینگ و همچنین نمودار کونتایل-کونتایل صورت پذیرفت. مدل‌های فرآیند تصادفی بر روی سری زمانی بازده‌ها (تغییرات مانده‌ها) و مانده‌های روند زدایی شده، کالیبره شدند و در نهایت، به منظور تخمین پارامترهای هر مدل در هر دوحالت روند زدایی شده و نشده، از تابع حداکثر درستنمایی و با استفاده از نرم افزار متلب استفاده گردید.

نتایج آزمون های مربوط به بررسی مانایی سری های زمانی،پاسخ به سوال دوم پژوهش را در پی دارد. یعنی هم سری زمانی بازده ها و هم سری زمانی پسماند ها هر دو دارای پدیده بازگشت به میانگین هستند(کرباسی یزدی و همکاران، ۱۳۹۱). بعلاوه، نتایج آزمون جاک و برا و نمودارهای کوانتایل – کوانتایل، وجود فرآیند پرش را در سری زمانی تایید نمود (بریگو و همکاران، ۲۰۰۷). دو سوال دیگر پژوهش با استفاده از نتایج جدول ۷ و معیار MAPE قابل پاسخ گویی می باشد. الف) عملکرد مدل ها با جدا سازی بخش قطعی و تصادفی، افزایش چشمگیری داشته است چراکه معیار ارزیابی عملکرد آنها با روند زدایی تقویت می شود. ۲) با اینکه همزمان پدیده بازگشت به میانگین و پهن بودن دم سری های زمانی تایید گردید، اما مدل بازگشت به میانگین (کاکس-اینگرسل-راس) در هر دوحالت روند زدایی شده و نشده عملکرد بهتری از مدل دم پهن (انتشار پرش داشته است). ۳) مدل انتشار-پرش وبازگشت به میانگین، بهترین عملکرد را در بین مدل‌های پیشنهادی داشته است یعنی مدلی که هم‌زمان هر دو پدیده پرش و بازگشت به میانگین را در نظر داشته باشد.

نتایج کار همچون پژوهش استاجی (۲۰۰۰) و اشمالتز (۲۰۰۹)، وجود جزء پرش در مانده سپرده‌ها را نشان می‌دهد. متفاوت از پژوهش اشمالتز (۲۰۰۹) که تنها فرار سپرده‌ها را منجر به ایجاد پرش در نظر می گیرد که تنها باعث خروج سپرده‌ها از بانک می شود، این پژوهش، فرایند پرش را همانند تحقیق استاجی (۲۰۰۰) برای مدل‌سازی افزایش و کاهش ناگهانی در حجم سپرده‌ها مورد استفاده قرار داده است.

پیشنهادها

نتایج این پژوهش می تواند مورد استفاده بانک های تجاری و نهاد ناظر آنها باشد. از آنجایی که سپرده قرض الحسنه پس انداز بخش مهمی از ابزار تجهیز منابع بانک ها است، آنها می توانند از

مدل منتخب این پژوهش یعنی، مدل انتشار پرش و بازگشت به میانگین برای پیش بینی و سناریو سازی جذب این منبع استفاده کنند. همچنین می دانیم که سپرده قرض الحسنه پس انداز بدون نرخ سود و بدون سررسید معین است. بانک های تجاری می توانند با اسنفاده از مدل پیشنهادی این مقاله، بدترین سنایو های ممکن را در نظر بگیرند و با نگهداری دارایی های نقد کافی، خود را از ریسک نقدینگی این سپرده ها بواسطه ویژگی بدون سررسید بودن آنها، مصون نمایند. در نهایت، از آنجایی که طبق قوانین بانکداری اسلامی، منابع قرض الحسنه صرفا به مصارف قرض الحسنه تخصیص داده می شود و با توجه به بدون سررسید بودن آنها، نهاد ناظر نظام بانکی می تواند با استفاه از مدل پیشنهادی، مصارف قرض الحسنه بانک ها را با در نظر گرفتن حاشیه ریسک نقدینگی آنها از قبل معین نماید. بدین واسطه هم مشتریان بانک ها و هم بانک های تجاری منتفع خواهند شد.

فهرست منابع

۱) اصغری اسکویی. محمدرضا(۱۳۹۴)، کاربرد روش پنجره لغزان برای انتخاب ساختار شبکه عصبی با تاخیر زمانی در پیش بینی سری های زمانی مالی،فصلنامه پژوهشنامه اقتصادی،سال پانزدهم، شماره ۵۷، ص ۷۵-۱۰۸.

۲) خداویسی. حسن، ملابهرامی. احمد(۱۳۹۱)، مدل سازی و پیش بینی نرخ ارز بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی، مجله علمی-پژوهشی تحقیقات اقتصادی، شماره ۱۰۰، ص ۱۲۹-۱۴۴.

۳) طیبی. سید کمیل، خوش اخلاق. رحمان، فراهانی. مریم(۱۳۹۲)، الگوسازی نااطمینانی در قیمت نفت ایران با استفاده از فرآیند تصادفی برگشت به میانگین، فصلنامه اقتصاد انرژی ایران، سال سوم، شمار ۹، ص ۱۷۵-۱۹۷

۴) فلاح پور. سعید، مطهری نیا. وحید(۱۳۹۶)، مدلسازی و پیش‌بینی نوسان تحقق‌یافته با در نظر گرفتن پرش در بورس اوراق بهادار تهران، مجله علمی-پژوهشی مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره ۳۲، ص ۱۷۱ - ۱۹۰.

۵) کرباسی یزدی. حسین، نوری فرد. یداله، چناری بوکت. حسن(۱۳۹۱)، مطالعه پدیده بازگشت به میانگین در بورس اوراق بهدار تهران با استفاده از ازمون ریشه واحد، فصلنامه علمی و پژوهشی دانش سرمایه گذاری، سال اول، شماره چهارم، ص ۸۷-۱۰۳.

۶) مولایی. صابر، واعظ برزانی. محمد، صمدی. سعید(۱۳۹۵)، الگوسازی رفتار قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی با نوسان تصادفی، مجله علمی-پژوهشی دانش مالی تحلیل اوراق بهادار (مطالعات مالی)، شماره ۳۲، ص ۱-۱۳.

7) Adam, A., Laurent, J.-P. and Rebérioux, C. (2004) How should we hedge deposit accounts?, Banque et Marchés.

8) Brigo, D. Dalessandro, A. Neugebauer, M. y Triki, F. (2008). A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management, Journal of Risk Management in Financial Institutions 1-43

9) Chance, D. (1994) The ABCs of Geometric Brownian Motion, Derivatives Quarterly 1, 41.

10) Chance, D. (2005) Mathematical Probability Theory and Finance: Connecting the Dots, Journal of Financial Education 31, 1.

11) Cox, J.C. , J.E. Ingersoll and S.A. Ross (1985). "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". Econometrica 53: 385–407

12) Frauendorfer, K., Schürle, M. (2007): Dynamic modelling and optimization of nonmaturing

13) accounts, In Matz, L., and Neu, P. (eds.), Liquidity Risk Measurement and Management: A Practitioner's Guide to Global Best Practices (pp. 327-359), Singapore: Wiley

14) Hanson, F.B.,Westman, J.J. (2002) Jump-Diffusion Stock Return Model in Finance: StochasticProcess Density with Uniform-Jump Amplitude, Proceedings of the 15th InternationalSymposium on Mathematical Theory of Networks and Systems.

15) Hanson, F.B., Zhu, Z. (2004) Comparison of Market Parameters for Jump-Diffusion DistributionsUsing Multinomial Maximum Likelihood Estimation, Proceedings of 43nd IEEEConference on Decision and Control, 3919.

16) Hull, J. (2006) Options, Futures, and Other Derivatives, Prentice Hall.

17) Jarrow, R.A., van Deveter, D.R. (1998): The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans, Journal of Banking and Finance, Vol. 22, pp. 249-27

18) Kalkbrener, M., Wiling, J. (2004): Risk management of non-maturing liabilities, Journal of Banking and Finance, Vol. 28, pp. 1547-1568

19) Mongwe,W. (2015) “Analysis of equity and interest rate returns in South Africa under the context of jump diffusion processes”, A master thesis, University of Cape Town, Division of Actuarial Science.

20) Mastro, M(2013), Financial Derivative and Energy Market Valuation: Theory and Implementation in Matlab, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA.

21) Nampala, H. (2009) “stochastic mean-reversion jump diffusion model with multiple mean reversion rates”, A master thesis, University of Dar es Salaam.

22) O’Brien, J.M. (2000) Estimating the Value and Interest Rate Risk of Interest-Bearing Transactions Deposits. Division of Research and Statistics Board of Governors Federal Reserve System.

23) Selvaggio, R. (1996) Using the OAS methodology to value and hedge commercial bank retail demand deposit premiums, Chapter 12 in Fabozzi and Konishi, ed., The Handbook of A/L Management, Chicago: Probus Publishing, USA.

24) Schmaltz, C (2009), A Quantitative Liquidity Model for Banks/Gabler Verlag.

25) Vasicek, O. (1977), "An equilibrium characterization of the term structure", J.Financial Economics 5: 177–188

یادداشت ها :

1 Brigo et al
2Jarque Bera
3 Anderson-Darling
4 Hull
5Chance
6 Nampala
7 Mongwe
8Maestro