



## جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی با پارامترهای وابسته به زمان تحت مدل CEV

مریم رضایی<sup>۱</sup>احمد رضا یزدانیان<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت مقاله: ۹۷/۰۹/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۲۷

### چکیده

اختیارهای مانع از پرکاربردترین مشتقات مالی به حساب می‌آید که با توجه به قیمت ارزان تر آن در مقایسه با سایر اختیارهای استاندارد<sup>۱</sup>، به طور گسترده در بازارهای مالی داد و ستد می‌شوند. همچنین این اختیارها از خانواده اختیارهای وابسته به مسیر<sup>۲</sup> هستند، چرا که ارزش آن‌ها به مسیر حرکتی ارزش دارایی پایه در طول مدت قرارداد اختیار بستگی مستقیمی دارد. از آنجا که معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح برای توصیف اثر حافظه طولانی مدت در بازار مالی ناتوان است، در این مقاله معادله دیفرانسیل مرتبه کسری را در نظر می‌گیریم. همچنین برای اینکه مسأله ما به مدل واقعی بازار نزدیک تر شود، فرض می‌کنیم که نرخ بهره بدون ریسک<sup>۳</sup>، سود تقسیمی<sup>۴</sup> و نوسان پذیری<sup>۵</sup> به صورت تابع می‌باشند. هدف اصلی این مقاله تعیین ارزش اختیارهای مانع دوگانه بی‌ارزش اروپایی<sup>۶</sup> در حالتی که دارایی پایه از مدل الاستیسیته ثابت واریانس<sup>۷</sup> (CEV) تبعیت می‌کند، تحت مدل بلک-شولز زمان-کسری با مرتبه کسری  $0 < \alpha < 1$  می‌باشد. این قبیل مسائل جواب دقیق به فرم بسته ندارند، بنابراین به کمک روش تفاضلات متناهی با معرفی یک طرح تفاضلی غیرصریح، یک جواب عددی مناسب برای آن پیدا می‌کنیم. در ادامه پایداری بدون شرط و همگرایی طرح پیشنهادی را با استفاده از آنالیز فوریه بررسی نموده و با ذکر چند مثال عددی کارایی طرح تفاضلی پیشنهادی و مرتبه همگرایی عددی آن را نشان می‌دهیم. علاوه بر این، تأثیر هر یک از پارامترهای مهم مدل  $(\alpha, \beta, \delta)$  را روی حافظه طولانی مدت در قالب جدول و شکل بررسی می‌کنیم.

### کلمات کلیدی

ارزش‌گذاری اختیار معامله، اختیار مانع دوگانه، معادله بلک-شولز زمان-کسری، پایداری و همگرایی.

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری گروه ریاضی کاربردی-ریاضی مالی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران. [m.rezaei@semnan.ac.ir](mailto:m.rezaei@semnan.ac.ir)

<sup>۲</sup> استادیار گروه ریاضی مالی، دانشکده علوم مالی دانشکده خوارزمی، تهران، ایران. (نویسنده مسئول)

[ahmadreza.yazdaniyan@gmail.com](mailto:ahmadreza.yazdaniyan@gmail.com)

## ۱- مقدمه

اختیار یکی از مهمترین و معروفترین مشتقات در بازار مالی است و در طول دهه‌های اخیر، تعیین ارزش قرارداد اختیار یک موضوع مهم بوده است. انواع مدل‌های ریاضی برای ارزش‌گذاری معاملات اختیار وجود دارد. معادله بلک-شولز یکی از مهمترین مدل ریاضی در نظریه ارزش‌گذاری اختیار معامله هست. این مدل در سال ۱۹۷۳ توسط فیشر بلک و مایرون شولز (Black and Scholes, 1973) معرفی شد و علاقه‌مندان زیادی را در زمینه مالی به خود جذب کرده است، زیرا به سادگی و به وضوح ارزش اختیار معامله را تعیین می‌کند. اما معادله کلاسیک بلک-شولز تحت برخی پیش فرض‌هایی قرار گرفت که باعث محدودیت آن شد که از مدل‌های واقعی بازار تا حدودی فاصله دارد. بنابراین، برخی از مدل‌های توسعه یافته برای تضعیف این فرضیه‌ها، از جمله مدل بهره تصادفی<sup>۸</sup> (Merton, 1974)، مدل پرش-نفوذ<sup>۹</sup> (Merton, 1976)، مدل نوسانات تصادفی<sup>۱۰</sup> (Hull, et al, 1987) و مدل با هزینه‌های معاملات<sup>۱۱</sup> (Davis, et al, 1993) پیشنهاد شده است. با کشف ساختار فراکتال در بازار مالی، مدل دینامیک حرکت براونی هندسی کلاسیک<sup>۱۲</sup> به مدل‌های دینامیک کسری توسعه یافت و به دنبال آن مدل‌های بلک-شولز کسری (Björk, et al, 2005, & Liang, et al, 2010) مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت. این تعمیم معادله دیفرانسیل مرتبه صحیح به معادله دیفرانسیل کسری برای مدل‌سازی پدیده‌های مختلفی از قبیل جریان سیالات، الکترومغناطیس، آکوستیک، الکتروشیمی و کیهان‌شناسی مورد استفاده قرار گرفته است، که یکی از مهمترین کاربردهای آن در نظریه مالی مطرح شده است. به تازگی، بر اساس این واقعیت که مشتق‌ها و انتگرال‌های مرتبه‌ی کسری یک ابزار قدرتمند برای توصیف حافظه ارائه می‌دهند، مورد توجه بیشتر محققین مالی قرار گرفته است (Zhou, et al, 2016, & Farhadi, et al, 2017). ویس (Wyss, 2000) معادله بلک-شولز با مشتق زمان-کسری را برای تعیین ارزش اختیار خرید اروپایی در بازارهای با ویژگی حافظه طولانی مدت تر ارائه نمود و جواب تحلیلی آن را به فرم بسته بدست آورد در حالی که جوماری (Jumarie, 2010) ضمن بدست آوردن معادلات بلک-شولز زمان و مکان کسری برای ارزش‌گذاری اختیار معامله، سبد بهینه مرتون را نیز ارائه نمود. کارته (Cartea, 2007) اختیار مانع را در بازارهای با جهش قیمتی به کمک معادلات دیفرانسیل جزئی کسری مدل سازی نموده و به حل آن پرداختند.

در ادامه در بخش ۲ به پیشینه پژوهش و تشریح مبانی نظری اختصاص داده‌ایم. در بخش ۳ سوالات و فرضیات ای پژوهش را مطرح کرده‌ایم. در بخش ۴ با ارائه یک طرح تفاضلی به دنبال تعیین

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

ارزش اختیار مانع دوگانه هستیم همچنین پایداری و همگرایی طرح تفاضلی معرفی شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش ۵ با ارائه مثال‌های عددی کارایی روش را بررسی می‌نماییم. نهایتاً در بخش ۶ به نتیجه‌گیری تحقیق و ارائه پیشنهادهای آتی خواهیم پرداخت.

**۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش**

از ویژگی‌های مدل بلک-شولز این است که نه تنها به منظور محاسبه جواب تحلیلی و یا عددی ارزش اختیارهای وانیلی<sup>۱۳</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرد بلکه برای طیف وسیعی از اختیارهای نامتعارف از جمله اختیار مانع نیز استفاده می‌شود. ارزش یک اختیار مانع به پارامترهای همچون: قیمت اولیه دارایی، قیمت توافقی<sup>۱۴</sup>، نرخ بهره بدون ریسک، نوسان‌پذیری، تاریخ سررسید<sup>۱۵</sup>، سود تقسیمی و همچنین به سطح مانع قیمتی بستگی دارد.

اختیار مانع، یک نوع از مشتقات مالی است که بازده<sup>۱۶</sup> آن بستگی به این دارد که آیا قیمت دارایی پایه در طول یک دوره خاص به یک قیمت از پیش تعیین شده می‌رسد یا فراتر از آن است. این نوع اختیار معامله را می‌توان به دو دسته "اختیار بی‌ارزش"<sup>۱۷</sup> و "اختیار ارزشمند"<sup>۱۸</sup> تقسیم کرد. در اختیار بی‌ارزش، هنگامی که دارایی پایه به قیمت مشخص رسید، قرارداد اختیار معامله بی‌ارزش خواهد شد که در این صورت سود را برای دارنده<sup>۱۹</sup> و زیان را برای ناشر<sup>۲۰</sup> محدود می‌کند. همچنین در اختیار ارزشمند تا زمانی که دارایی پایه به یک قیمت مشخص نرسد اختیار ارزشی ندارد و به محض این که قیمت دارایی پایه به سطح معین رسید قرارداد اختیار معامله را از آن زمان به بعد می‌توان اعمال نمود.

اختیارهای مانع، اختیارهای نامتعارف<sup>۲۱</sup> در نظر گرفته می‌شوند زیرا پیچیده‌تر از اختیارهای آمریکایی یا اروپایی<sup>۲۲</sup> هستند. از طرف دیگر اختیارهای مانع از خانواده اختیارهای وابسته به مسیر<sup>۲۳</sup> است، چرا که ارزش آنها به مسیر حرکتی ارزش دارایی پایه در طول مدت قرارداد اختیار بستگی مستقیمی دارد. به عبارت دیگر، بازده اختیار مانع بر مبنای مسیر ارزش دارایی پایه است.

اختیارهای مانع به دلیل داشتن محدودیت‌های اضافی در ساختار، ارزان‌تر از اختیارهای بدون مانع می‌باشند. بنابراین، اگر یک معامله گر معتقد باشد که قیمت یک دارایی پایه بعید است به سطح مانع برسد، ممکن است برای خرید اختیار بی‌ارزش را انتخاب کند که مبلغ پرداختی بابت آن به عنوان صرف اختیار از اختیار بدون مانع کمتر است. در نقطه مقابل اگر معامله‌گر پیش‌بینی کند قیمت دارایی پایه از سطح مانع عبور می‌کند بهتر است به جای خرید اختیار اروپایی بدون مانع، اختیار ارزشمند با مانع را خریداری نماید که مبلغ پرداختی آن نیز از اختیار بدون مانع کمتر است.

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸

اختیار دوگانه مانعی ترکیبی از دو اختیار مانعی بی‌ارزش و وابسته به هم هستند یکی اختیارهای مانع Down-and-out و دیگری اختیارهای مانع Up-and-out<sup>۲۴</sup>. اگر قیمت دارایی در اختیار بی‌ارزش دوگانه به یکی از مانع‌ها برسد، قرار داد بی‌ارزش می‌شود. هنگامی که مانع بالایی بی‌اندازه بزرگ می‌شود، اختیار نمی‌تواند در یک دوره زمانی محدود به مانع بالایی برسد و به این ترتیب تبدیل به یک اختیار Down-and-out ساده می‌شود. به طور مشابه، هنگامی که مانع پایینی به صفر میل می‌کند، اختیار Up-and-out خواهد شد. اگر هم زمان مانع بالایی به سمت بی‌نهایت و مانع پایینی به سمت صفر میل کنند، اختیار مانع دوگانه به یک اختیار مستقل از مسیر متداول اروپایی<sup>۲۵</sup> تبدیل می‌شود.

در سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ظاهر شده در مدل‌های مالی انجام شده است. از جمله روش‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی مورد استفاده عبارت‌اند از: روش‌های تبدیل انتگرال (Liang, et al, 2010)، روش‌های اختلال هموتوپی و روش‌های تجزیه و تحلیل هموتوپی (Elbezeze, et al, 2013)، روش‌های ترکیبی مبتنی بر موجک (Hariharan, 2013)، روش جداسازی متغیرها (Chen, et al, 2015). با توجه به پیچیدگی فرم‌های بسته جواب این روش‌ها و توابع خاص ظاهر شده یافتن جواب نهایی مدل‌ها نیاز به اتخاذ روش‌های عددی دارد و از طرفی تعمیم این مدل‌های مورد مطالعه به مدل‌های پیچیده‌تر (نزدیک به مدل‌های واقعی بازار) یافتن جواب‌ها به کمک این روش‌ها را دشوار می‌نماید. از جمله روش‌های عددی مورد استفاده در حل این مدل‌ها روش معروف تفاضلات متناهی است. زانگ (Zhang, et al, 2016) ضمن یافتن جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری در تعیین ارزش اختیار معامله اروپایی به کمک روش تفاضل متناهی غیرصریح<sup>۲۶</sup> (با مرتبه دقت زمانی  $2 - \alpha$  و مرتبه دقت مکانی ۲ پایداری و همگرایی روش بکار گرفته شده را مورد بررسی قرار داده‌اند. د-استالین (De Staelen, et al, 2017) جواب عددی مدل بلک-شولز زمان-کسری در تعیین ارزش اختیار معامله مانع دوگانه با استفاده از تفاضل متناهی فشرده<sup>۲۷</sup> بدست آورد و در حالی که مرتبه دقت مکانی به ۴ ارتقاء پیدا نمود ثابت کرد که روش بدون شرط پایدار و همگراست.

در این مقاله، معادله بلک-شولز زمان-کسری را در نظر می‌گیریم که پارامترهای آن، نرخ بهره، سود تقسیمی و نوسان‌پذیری به صورت تابع هستند در حالی که در مدل‌های کلاسیک ثابت در نظر گرفته می‌شود و این فرض‌ها مسأله را به مدل واقعی بازار نزدیک‌تر می‌نماید. در بسیاری از بازارها، نوسانات قیمت سهام با کاهش قیمت افزایش می‌یابد. برای مدل‌سازی این پدیده از مدل کلاسیک

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

بلک-شولز نمی‌توان استفاده کرد و ناگزیر به استفاده از مدل‌های تعمیم یافته خواهیم بود از جمله این مدل‌ها: مدل نوسان‌پذیری محلی<sup>۲۸</sup> (Gatheral, et al, 2012) و مدل نوسان‌پذیری تصادفی (Shi, et al, 2014) می‌توان نام برد. یکی از معروف‌ترین این مدل‌ها، مدل CEV است که برای اولین بار در سال ۱۹۷۵ مدل CEV توسط کوکس (Cox, 1975) معرفی شد تا رابطه معکوس بین قیمت سهام و نوسانات آن را ثبت کند. بدین ترتیب با جایگزینی مدل CEV در مدل حرکت براونی هندسی، پدیده عدم تقارن<sup>۲۹</sup> و اثر اهرمی<sup>۳۰</sup> بازده سهام در نظر گرفته شد (Cox, et al, 1976, & Cox, 1996). نوسان‌پذیری این مدل بدون معرفی هیچ فرایند تصادفی اضافی، تابعی از ارزش سهام و شامل دو پارامتر است. پارامتر مهم این مدل  $(\beta)$  الاستیسیته نوسان‌پذیری<sup>۳۱</sup> است که رابطه بین نوسان‌پذیری و ارزش دارایی را کنترل می‌کند. با در نظر گرفتن  $\beta = 0$ ,  $\beta = -\frac{1}{2}$  و  $\beta = 1$  مدل CEV به مدل بلک-شولز، مدل مربع-ریشه‌ای کوکس و روس<sup>۳۲</sup>، و مدل باچلیر<sup>۳۳</sup> کاهش می‌یابد. این مدل به طور گسترده در بسیاری از زمینه‌ها استفاده شده است از جمله: تعیین ارزش اختیارات آمریکایی (Wong, et al, 2008)، اختیارات آسیایی<sup>۳۴</sup> (Lee, 2016)، اختیارات مانع (Thakoor, et al, 2014) و اختیارات گذشته‌نگر<sup>۳۵</sup> (Boyle, 1999). در این مقاله دینامیک ارزش دارایی پایه به کمک مدل CEV به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (Cox, 1996) را ببینید)

$$dS_t = (r - D)S_t dt + \delta S_t^{\beta+1} d\omega(t),$$

جایی که  $r$  نرخ بهره بدون ریسک،  $D$  سود تقسیمی و  $\omega(t)$  حرکت براونی استاندارد است.  $\sigma(S) = \delta S^\beta$  تابع نوسان‌پذیری محلی<sup>۳۶</sup>،  $\beta$  الاستیسیته نوسان‌پذیری و  $\delta$  پارامتر مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای<sup>۳۷</sup> در زمان  $t = 0$  را نشان می‌دهد  $(\sigma_0 = \sigma(S_0) = \delta S_0^\beta)$ . اگر  $\beta$  در معادله دیفرانسیل تصادفی<sup>۳۸</sup> (SDE) فوق برابر صفر باشد آنگاه مدل فوق همان مدل حرکت براونی هندسی (GBM) خواهد بود که منتج به معادله دیفرانسیل بلک-شولز استاندارد می‌شود در غیر این صورت به کمک لم ایتو<sup>۳۹</sup> معادله دیفرانسیل جزئی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0,$$

که  $P(S, t)$  بیانگر ارزش اختیار فروش مانع دوگانه اروپایی<sup>۴۰</sup> با قیمت دارایی  $S$  در لحظه  $t$  است. شرایط نهایی و مرزی مسأله عبارت‌اند از:

$$\begin{cases} P(S, T) = \max(E - S, 0) := (E - S)^+, & B_d < S < B_u, \\ P(B_d, t) = Y(t), & P(B_u, t) = Z(t), & 0 < t < T, \end{cases}$$

جایی که E قیمت توافقی و تابع‌های Y(t) و Z(t) تخفیف‌هایی پرداختی هستند زمانی که قیمت سهام به سطوح مانع مربوطه برخورد کند. مانع مرزی پایینی B<sub>d</sub> و مانع مرزی بالایی B<sub>u</sub> قرار می‌دهیم. تحت این فرض که تغییر در ارزش اختیار معامله از یک دستگاه انتقال فرکتال<sup>۴۱</sup> پیروی می‌کند، مشتق زمان با مشتق کسری (0 < α < 1) جایگزین می‌کنیم (Liang, et al, 2010) را ببینید)، به این معنا است که

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0.$$

چون در بازار، پارامترهای دینامیک ارزش دارایی وابسته به زمان هستند، از این رو، پارامترهای نرخ بهره و سود تقسیمی را وابسته به زمان در نظر می‌گیریم،

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \delta^2 S^{2\beta+2} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + (r(t) - D(t))S \frac{\partial P}{\partial S} - r(t)P = 0,$$

$$(S, t) \in (B_d, B_u) \times (0, T). \quad (1)$$

مشتق کسری در (1) یک مشتق راست ریمن-لیوویل اصلاح شده<sup>۴۲</sup> است که به صورت زیر

تعریف می‌شود

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{P(S, \xi) - P(S, T)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\partial P(S, t)}{\partial t}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

با تغییر متغیر τ = T - t معادله (1) را به مسأله مقدار اولیه تبدیل می‌کنیم و بنابراین

$$-\frac{\partial^\alpha P(S, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{P(S, T - \varsigma) - P(S, T)}{(\tau - \varsigma)^\alpha} d\varsigma := {}_0D_\tau^\alpha P(S, T - \tau).$$

علاوه بر این، با تبدیل‌های x = ln S و U(x, τ) = P(e<sup>x</sup>, T - τ) = P(S, t) معادله (1) به

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی...رضایی و یزدانیان

$${}_0D_t^\alpha U(x, \tau) = \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + \left( r(T - \tau) - D(T - \tau) - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x} \right) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - r(T - \tau) U(x, \tau),$$

با شرایط اولیه-مرزی

$$\begin{cases} U(x, 0) = (E - e^x)^+, & b_d < x < b_u, \\ U(b_d, \tau) = y(T - \tau), & U(b_u, \tau) = z(T - \tau), \end{cases} \quad 0 < \tau < T, \quad (2)$$

تغییر می کند که  $b_u = \ln B_u$ ,  $b_d = \ln B_d$  و مشتق کسری  ${}_0D_t^\alpha U(x, \tau)$  با مشتق کسری کاپوتونی<sup>۴۳</sup> برای  $0 < \alpha \leq 1$  منطبق است، به این معنا که

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha U(x, \tau) &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \frac{U(x, \zeta) - U(x, 0)}{(\tau - \zeta)^\alpha} d\zeta \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\tau \frac{\partial U(x, \zeta)}{\partial \zeta} \frac{1}{(\tau - \zeta)^\alpha} d\zeta = {}_0^C D_t^\alpha U(x, \tau) \end{aligned}$$

جایی که U نسبت به زمان مشتق پذیر پیوسته است. معادله فوق را در حالت کلی به معادله زیر

می توان تعمیم داد

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha U(x, \tau) &= \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + \left( r(T - \tau) - D(T - \tau) - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x} \right) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - r(T - \tau) U(x, \tau) \\ &+ f(x, \tau), \quad (x, \tau) \in (b_d, b_u) \times (0, T). \end{aligned} \quad (3)$$

### ۳- سوالات و فرضیات پژوهش

براساس مطالعات و بررسی های انجام شده در قسمت قبل، سوالات و فرضیه های زیر تدوین شده است:

فرضیه ۱؛ با فرض اینکه نرخ بهره و سود تقسیمی به صورت تابعی وابسته به زمان باشند مدل، به مدل واقعی بازار نزدیک تر بوده و ضعف مسأله بلک-شولز کلاسیک را می پوشاند.

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸

فرضیه ۲؛ در بازار بین قیمت سهام و نوسانات آن رابطه معکوس وجود دارد که این مطلب را مدل CEV به خوبی نشان می‌دهد در حالی که مدل بلک-شولز کلاسیک از نشان دادن این رابطه عاجز است.

فرضیه ۳؛ معادله بلک-شولز مرتبه کسری نسبت به معادله بلک-شولز مرتبه صحیح، حافظه بیشتری از اطلاعات درباره بازار در اختیار ما قرار می‌دهد.

سوال اصلی؛ تأثیر هر یک از پارامترهای مهم این مدل ( $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$ ) روی روند حافظه طولانی مدت به چه صورت است؟

**۴- روش‌شناسی پژوهش**

این پژوهش یک پژوهش کاربردی است. هدف اصلی این پژوهش ارائه یک روش عددی برای تعیین ارزش اختیارات مانع دوگانه بی‌ارزش اروپایی تحت مدل بلک-شولز زمان-کسری که دارای پایه از مدل CEV تبعیت می‌کند. در این پژوهش مراحل زیر را در نظر می‌گیریم.

(۱) ارائه یک طرح تفاضلی غیرصریح برای حل عددی معادله دیفرانسیل مرتبه کسری

(۲) اثبات حل‌پذیری، پایداری و همگرایی طرح تفاضلی مطرح شده

(۳) نشان دادن کارایی طرح تفاضلی و بدست آوردن مرتبه همگرایی به کمک چند مثال

(۴) ارائه تأثیر هر یک از پارامترهای مدل روی روند حافظه به صورت جدول و شکل

**۴-۱- طرح تفاضلی غیرصریح برای معادله دیفرانسیل کسری**

در این قسمت طرح تفاضلی غیرصریح را برای معادله (3) می‌سازیم. دامنه جواب را به صورت نقاط متساوی الفاصله گسسته‌سازی می‌کنیم

$$\Delta\tau = \frac{T}{M}, \quad \tau_n = n\Delta\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

$$\Delta x = \frac{b_u - b_d}{N}, \quad x_j = b_d + j\Delta x, \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

که  $M$  و  $N$  اعداد صحیح هستند. مشتق زمان-کسری  ${}_0D_\tau^\alpha U(x, \tau)$  در نقطه  $(x_j, \tau_n)$  به صورت زیر می‌توان فرمول بندی کرد ((Sun, et al, 2006) را ببینید):

$${}_0D_\tau^\alpha U(x, \tau)|_{x=x_j, \tau=\tau_n} = \varphi \sum_{k=1}^n \psi_k (U_j^{n-k+1} - U_j^{n-k}) + O(\Delta\tau^{2-\alpha}), \quad (4)$$



جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

در حالی که

$$\varphi = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{1}{\Delta\tau^\alpha}, \quad \psi_k = k^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}, \quad k = 1, \dots, n,$$

و مشتق‌های مکانی را به کمک تفاضل مرکزی مرتبه ۲ تقریب می‌زنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} \Big|_{x=x_j, \tau=\tau_n} &= \frac{U(x_{j-1}, \tau_n) - 2U(x_j, \tau_n) + U(x_{j+1}, \tau_n)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \\ \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=x_j, \tau=\tau_n} &= \frac{U(x_{j+1}, \tau_n) - U(x_{j-1}, \tau_n)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \end{aligned} \quad (5)$$

با جایگذاری (4) و (5) در (3) طرح تفاضلی غیر صریح زیر را با نشانه‌گذاری  $U_j^n = U(x_j, \tau_n)$  و  $f_j^n = f(x_j, \tau_n)$  ( $j = 0, 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, M$ ) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varphi \sum_{k=1}^n \psi_k (U_j^{n-k+1} - U_j^{n-k}) &= \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x_j} \frac{U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n}{\Delta x^2} \\ &+ \left( r(T - \tau_n) - D(T - \tau_n) - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2\beta x_j} \right) \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \\ &- r(T - \tau_n) U_j^n + f_j^n + O(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2) \end{aligned}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در  $\Phi = \varphi^{-1}$  و بازنویسی طرح تفاضلی فوق داریم

$$\begin{cases} \Phi \left( (\lambda - \mu) e^{2\beta x_j} - \eta_1 \right) U_{j-1}^1 - (2\lambda\Phi e^{2\beta x_j} + \Phi\zeta_1 + 1) U_j^1 \\ + \Phi \left( (\lambda + \mu) e^{2\beta x_j} + \eta_1 \right) U_{j+1}^1 = -U_j^0 - \Phi f_j^1 + O(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad n = 1, \\ \Phi \left( (\lambda - \mu) e^{2\beta x_j} - \eta_n \right) U_{j-1}^n - (2\lambda\Phi e^{2\beta x_j} + \Phi\zeta_n + 1) U_j^n \\ + \Phi \left( (\lambda + \mu) e^{2\beta x_j} + \eta_n \right) U_{j+1}^n = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) U_j^{n-k} - \psi_n U_j^0 - \Phi f_j^n \\ + O(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (6)$$

که

$$\zeta_n = r(T - \tau_n),$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\Delta x^2}, \quad \mu = -\frac{\delta^2}{4\Delta x}, \quad \eta_n = \frac{1}{2\Delta x} (r(T - \tau_n) - D(T - \tau_n)),$$

و شرایط اولیه-مرزی به صورت زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} U_j^0 = (E - e^{x_j})^+, \\ U_0^n = y(T - \tau_n), \quad U_N^n = z(T - \tau_n), \end{cases} \quad (7)$$

و نهایتاً طرح تفاضلی غیرصریح متناظر با (3) با حذف خطای برشی به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\begin{cases} a_{j-1}^n \tilde{U}_{j-1}^n + b_j^n \tilde{U}_j^n + c_{j+1}^n \tilde{U}_{j+1}^n = -\tilde{U}_j^0 - \phi f_j^n, \quad n = 1, \\ a_{j-1}^n \tilde{U}_{j-1}^n + b_j^n \tilde{U}_j^n + c_{j+1}^n \tilde{U}_{j+1}^n \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \tilde{U}_j^{n-k} - \psi_n \tilde{U}_j^0 - \phi f_j^n, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (8)$$

جایی که

$$a_{j-1}^n = \phi \left( (\lambda - \mu) e^{2\beta x_j} - \eta_n \right), \quad b_j^n = -(2\lambda \phi e^{2\beta x_j} + \phi \zeta_n + 1)$$

$$c_{j+1}^n = \phi \left( (\lambda + \mu) e^{2\beta x_j} + \eta_n \right), \quad j = 1, \dots, N-1$$

و  $\tilde{U}_j^n$  جواب دقیق طرح تفاضلی غیرصریح و  $U_j^n$  جواب دقیق معادله (3) است. سرانجام به منظور ساده‌سازی الگوریتم محاسباتی روابط (8) را به فرم ماتریسی به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{cases} A^1 \tilde{U}^1 = -\tilde{U}^0 - G^1 - \phi F^1, \quad n = 1, \\ A^n \tilde{U}^n = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \tilde{U}^{n-k} - \psi_n \tilde{U}^0 - G^n - \phi F^n, \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (9)$$

که

$$A^n = \begin{bmatrix} b_1^n & c_2^n & & & 0 \\ a_1^n & b_2^n & & c_3^n & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{N-1}^n & b_{N-1}^n \\ 0 & & & & b_{N-1}^n \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}^n = (\tilde{U}_1^n, \tilde{U}_2^n, \dots, \tilde{U}_{N-1}^n)^t$$

$$F^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_{N-1}^n)^t, \quad G^n = (a_0^n \tilde{U}_0^n, 0, \dots, 0, c_N^n \tilde{U}_N^n)^t.$$

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

#### ۲-۴- پایداری و همگرایی

در این قسمت ثابت می‌کنیم که طرح تفاضلی غیرصریح حل‌پذیر، بدون شرط پایدار و همگراست.

#### ۲-۴-۱- حل‌پذیری طرح تفاضلی

قضیه ۲-۴-۱ طرح تفاضلی غیرصریح (8) به طور یکتا حل‌پذیر است.

برهان: فرم ماتریسی طرح تفاضلی غیرصریح (9) را می‌توان به طور خلاصه به صورت  $A^n \bar{U}^n = d_{n-1}$  نوشت که  $d_{n-1}$  وابسته به  $\bar{U}^{n-1}, \bar{U}^{n-2}, \dots, \bar{U}^0, F^n$  و  $G^n$  است. ماتریس  $A^n = (a_{ij}^n)$  اکیداً غالب قطری است چون  $|a_{ii}^n| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}^n|$  که

$$|a_{11}^n| = 2\lambda\phi e^{2\beta x_1} + \phi\zeta_n + 1, \quad \sum_{j \neq 1} |a_{1j}^n| = \phi \left( (\lambda + \mu)e^{2\beta x_1} + \eta_n \right),$$

$$|a_{ii}^n| = 2\lambda\phi e^{2\beta x_i} + \phi\zeta_n + 1, \quad \sum_{j \neq i} |a_{ij}^n| = 2\phi\lambda e^{2\beta x_i}, \quad i = 2, 3, \dots, N-2$$

$$|a_{N-1, N-1}^n| = 2\lambda\phi e^{2\beta x_{N-1}} + \phi\zeta_n + 1,$$

$$\sum_{j \neq N-1} |a_{N-1, j}^n| = \phi \left( (\lambda - \mu)e^{2\beta x_{N-1}} - \eta_n \right),$$

و  $n = 1, 2, \dots, M$  بنابراین به ازای هر  $n$  ماتریس ضرایب  $A^n$  وارون‌پذیر است، در نتیجه دستگاه به طور یکتا حل‌پذیر است.

#### ۲-۴-۲- پایداری طرح تفاضلی

ثابت می‌کنیم که طرح تفاضلی غیرصریح (8) با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه بدون شرط پایدار است (Strikwerda, 2004). فرض کنید که  $\hat{U}_j^n$  جواب عددی طرح تفاضلی غیرصریح (8) باشد. قرار دهید

$$\varepsilon_j^n = \bar{U}_j^n - \hat{U}_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

آنگاه  $\varepsilon_j^n$  در معادله‌های زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} a_{j-1}\varepsilon_{j-1}^1 + b_j\varepsilon_j^1 + c_{j+1}\varepsilon_{j+1}^1 = -\varepsilon_j^0, & n = 1, \\ a_{j-1}\varepsilon_{j-1}^n + b_j\varepsilon_j^n + c_{j+1}\varepsilon_{j+1}^n = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)\varepsilon_j^{n-k} - \psi_n\varepsilon_j^0, & n \geq 2, \end{cases} \quad (10)$$

و  $\varepsilon_0^n = \varepsilon_N^n = 0$  می‌توان یک توسیع سری فوریه برای تابع شبکه‌ای<sup>۴۴</sup>

$$\varepsilon^n(x) = \begin{cases} \varepsilon_j^n, & x \in \left(x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[b_d, b_d + \frac{\Delta x}{2}\right] \cup \left[b_u - \frac{\Delta x}{2}, b_u\right], \end{cases}$$

با دوره تناوب  $L = b_u - b_d$  به صورت زیر ساخت

$$\varepsilon^n(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \theta_j^n e^{i\frac{2\pi jx}{L}} \quad (i^2 = -1), \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

$$\theta_j^n = \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon^n(x) e^{i\frac{2\pi jx}{L}} dx, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

قرار دهید  $\varepsilon^n = (\varepsilon_1^n, \varepsilon_2^n, \dots, \varepsilon_{N-1}^n)^t$  با تعریف نرم زیر

$$\|\varepsilon^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |\varepsilon_j^n|^2 = \int_0^L |\varepsilon^n(x)|^2 dx = \|\varepsilon^n(x)\|_{L^2}^2, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

و همچنین با استفاده از تساوی پارسوال<sup>۴۵</sup> رابطه زیر بدست می‌آید

$$\|\varepsilon^n(x)\|_{L^2}^2 = L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\theta_j^n|^2, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

و در نتیجه داریم

$$\|\varepsilon^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |\varepsilon_j^n|^2 = L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\theta_j^n|^2, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (11)$$

بر اساس آنالیز بالا و  $x_j = b_d + j\Delta x$ ، فرض می‌کنیم که جواب (10) فرمی به صورت

$$\varepsilon_j^n = \theta^n e^{iq(b_d + j\Delta x)}, \quad q = \frac{2\pi l}{L}, \quad l = 0, \pm 1, \dots,$$

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

دارد. با جای گذاری فرمول بالا در (10) خواهیم داشت

$$\begin{cases} (a_{j-1}e^{-iq\Delta x} + b_j + c_{j+1}e^{iq\Delta x})\theta^1 = -\theta^0, & n = 1, \\ (a_{j-1}e^{-iq\Delta x} + b_j + c_{j+1}e^{iq\Delta x})\theta^n \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)\theta^{n-k} - \psi_n\theta^0, & n \geq 2, \end{cases} \quad (12)$$

لم ۴-۲-۲ ضرایب  $\psi_n$  در موارد زیر صدق می کنند

$$\psi_n > 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$1 = \psi_1 > \psi_2 > \dots > \psi_n, \quad \psi_n \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) + \psi_n = 1$$

برهان: (Liu, et al, 2015).

لم ۴-۲-۳ برای هر  $n > 0$  دلخواه، نشان می دهیم که  $|\theta^n| \leq |\theta^0|$ .

برهان: با استفاده از  $\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) = -\frac{1}{4}(e^{iq} - 2 + e^{-iq})$  و رابطه (12) داریم

$$\begin{aligned} & \left[ -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_1) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_1 - 1 \right] \theta^1 \\ & = -\theta^0, \end{aligned}$$

که  $\mu < 0$  و  $\lambda, \phi, \eta_1, \zeta_1 > 0$  ایجاب می کند

$$\left| -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_1) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_1 - 1 \right| \geq 1,$$

در نتیجه  $|\theta^1| \leq |\theta^0|$ . به کمک استقراء ریاضی، فرض می کنیم که  $|\theta^k| \leq |\theta^0|, k =$

$1, 2, 3, \dots, n-1$  و ثابت می کنیم  $|\theta^n| \leq |\theta^0|$  با استفاده از لم ۱ و رابطه (12) برای  $n \geq 2$  داریم

$$\begin{aligned} & \left| \left[ -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_n) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_n - 1 \right] \theta^n \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \theta^{n-k} - \psi_n \theta^0 \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \theta^{n-k} \right| + \psi_n |\theta^0| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) |\theta^{n-k}| + \psi_n |\theta^0| \leq \left[ \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) + \psi_n \right] |\theta^0| \\ &= |\theta^0| \end{aligned}$$

آنگاه  $|\theta^n| \leq |\theta^0|$ ، و اثبات تمام است.

قضیه ۴-۲-۴ طرح تفاضلی غیرصریح (8) بدون شرط پایدار است. (یادآور می‌شویم که جمله منبع<sup>۴۶</sup>، یعنی  $f(x, t)$  در پایداری طرح تفاضلی متناظر با معادله (3) تاثیر ندارد. بدین منظور بدون از دست دادن کلیت مسأله آنالیز پایداری از آن صرفنظر می‌کنیم).

برهان: با استفاده از لم ۱ و ۲ در رابطه (11) بدست می‌آوریم

$$\|\varepsilon^n\|_2^2 = L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\theta_j^n|^2 \leq L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\theta_j^0|^2 = \|\varepsilon^0\|_2^2.$$

در نتیجه رابطه  $\|\varepsilon^n\|_2^2 \leq \|\varepsilon^0\|_2^2$  برای  $n = 0, 1, \dots, M$  برقرار است. از این رو، طرح تفاضلی غیرصریح (8) بدون شرط پایدار است.

### ۴-۲-۳ همگرایی طرح تفاضلی

فرض می‌کنیم که  $U_j^n$  جواب دقیق (6) و  $\tilde{U}_j^n$  جواب دقیق (8) باشد. قرار دهید

$$\begin{cases} E_j^n = U_j^n - \tilde{U}_j^n, & j = 0, 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, M, \\ R_j^n = O(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2). \end{cases}$$

به کمک روابط (6) و (8) بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} a_{j-1}E_{j-1}^1 + b_jE_j^1 + c_{j+1}E_{j+1}^1 = -E_j^0 + \Delta\tau^\alpha R_j^1, & n = 1, \\ a_{j-1}E_{j-1}^n + b_jE_j^n + c_{j+1}E_{j+1}^n \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) E_j^{n-k} - \psi_n E_j^0 + \Delta\tau^\alpha R_j^n, & n \geq 2, \end{cases} \quad (13)$$

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

همچنین، شرایط اولیه-مرزی ایجاب می کند

$$\begin{cases} E_j^0 = 0, & j = 0, 1, \dots, N, \\ E_0^n = E_N^n = 0, & n = 0, 1, \dots, M, \end{cases}$$

مشابه با اثبات پایداری، دو تابع شبکه‌ای به فرم زیر تعریف می کنیم

$$E^n(x) = \begin{cases} E_j^n, & x \in \left(x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2}\right], \\ 0, & x \in \left[b_d, b_d + \frac{\Delta x}{2}\right] \cup \left[b_u - \frac{\Delta x}{2}, b_u\right], \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

9

$$R^n(x) = \begin{cases} R_j^n, & x \in \left(x_j - \frac{\Delta x}{2}, x_j + \frac{\Delta x}{2}\right], \\ 0, & x \in \left[b_d, b_d + \frac{\Delta x}{2}\right] \cup \left[b_u - \frac{\Delta x}{2}, b_u\right], \end{cases} \quad n = 0, 1, \dots, M$$

و دارای توسیع سری فوریه به صورت زیر می باشند

$$E^n(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \vartheta_j^n e^{i \frac{2\pi j x}{L}} \quad (i^2 = -1), \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

$$R^n(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \nu_j^n e^{i \frac{2\pi j x}{L}} \quad (i^2 = -1), \quad n = 0, 1, \dots, M,$$

9

جایی که  $L = b_u - b_d$  و

$$\vartheta_j^n = \frac{1}{L} \int_0^L E^n(x) e^{i \frac{2\pi j x}{L}} dx, \quad \nu_j^n = \frac{1}{L} \int_0^L R^n(x) e^{i \frac{2\pi j x}{L}} dx, \quad j = 0, \pm 1, \dots$$

قرار دهید  $E^n = (E_1^n, E_2^n, \dots, E_{N-1}^n)^t$  و  $R^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{N-1}^n)^t$  و نرم متناظر با

آن‌ها را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\|E^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |E_j^n|^2 = \int_0^L |E^n(x)|^2 dx = \|E^n(x)\|_{L^2}^2, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

$$\|R^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |R_j^n|^2 = \int_0^L |R^n(x)|^2 dx = \|R^n(x)\|_{L^2}^2, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

9  
۳۶۱

که با استفاده از تساوی پارسوال نتیجه می‌گیریم

$$\|E^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |E_j^n|^2 = L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\vartheta_j^n|^2, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (14)$$

$$\|R^n\|_2^2 = \sum_{j=1}^{N-1} \Delta x |R_j^n|^2 = L \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j^n|^2, \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (15)$$

به طور مشابه، بر اساس آنالیز بالا و  $x_j = b_d + j\Delta x$ ، فرض می‌کنیم که  $E_j^n = \vartheta^n e^{iq(b_d + j\Delta x)}$  و  $R_j^n = v^n e^{iq(b_d + j\Delta x)}$  ( $q = \frac{2\pi l}{L}$ ,  $l = 0, \pm 1, \dots$ ) و با جایگذاری این رابطه‌ها در (13) نتیجه می‌دهد

$$\begin{cases} (a_{j-1}e^{-iq\Delta x} + b_j + c_{j+1}e^{iq\Delta x})\vartheta^1 = \Delta\tau^\alpha v^1, & n = 1, \\ (a_{j-1}e^{-iq\Delta x} + b_j + c_{j+1}e^{iq\Delta x})\vartheta^n \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)\vartheta^{n-k} + \Delta\tau^\alpha v^n, & n \geq 2, \end{cases} \quad (16)$$

که به کمک رابطه  $\sin^2\left(\frac{q}{2}\right) = -\frac{1}{4}(e^{iq} - 2 + e^{-iq})$  می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \left[ -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_1) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_1 - 1 \right] \vartheta^1 \\ = \Delta\tau^\alpha v^1, & n = 1, \\ \left[ -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_n) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_n - 1 \right] \vartheta^n \\ = \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)\vartheta^{n-k} + \Delta\tau^\alpha v^n, & n \geq 2, \end{cases}$$

لم ۴-۲-۵ فرض کنید که  $\vartheta^n$  جواب (16) باشد، آنگاه یک ثابت مثبت  $C_1$  وجود دارد به طوری

$$|\vartheta^n| \leq C_1 \frac{\Delta\tau^\alpha |v^1|}{\psi_n}, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad \text{که}$$



جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی... رضایی و یزدانیان

برهان: به دلیل اینکه  $R_j^n = O(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), j = 0, 1, \dots, N, n = 0, 1, \dots, M$  آنگاه یک ثابت مثبت  $C_2$  وجود دارد که

$$|R_j^n| \leq C_2(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

مطابق با (15) بدست می آوریم

$$\|R^n\|_2 \leq C_2\sqrt{L}(\Delta\tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), \quad n = 0, 1, \dots, M. \quad (17)$$

با توجه به همگرایی سری در طرف راست رابطه (15) نتیجه می دهد

$$|v^n| \equiv |v_j^n| \leq C_3|v_j^1| \equiv C_3|v^1|, \quad n = 2, 3, \dots, M.$$

که  $C_3$  ثابت مثبت است. از آنجا که

$$\left| -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_1) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_1 - 1 \right| \geq 1,$$

می توان نوشت

$$|\vartheta^1| = \frac{\Delta\tau^\alpha |v^1|}{\left| -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_1) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_1 - 1 \right|} \\ \leq \Delta\tau^\alpha |v^1| \leq \frac{\Delta\tau^\alpha |v^1|}{\psi_1}.$$

حال با استفاده از استقراء ریاضی، فرض می کنیم  $n = 2, 3, \dots, n-1$

و ثابت می کنیم  $|\vartheta^n| \leq C_1 \frac{\Delta\tau^\alpha |v^1|}{\psi_n}$  که در اینجا  $C_1 = \max\{1, C_3\}$ .

$$|\vartheta^n| = \frac{\left| \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \vartheta^{n-k} + \Delta\tau^\alpha v^n \right|}{\left| -4\lambda\phi e^{2\beta x_j} \sin^2\left(\frac{q\Delta x}{2}\right) + 2i\phi(\mu e^{2\beta x_j} + \eta_n) \sin(q\Delta x) - \phi\zeta_n - 1 \right|} \\ \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \vartheta^{n-k} + \Delta\tau^\alpha v^n \right| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_{k+1} - \psi_k) \vartheta^{n-k} \right| + \Delta\tau^\alpha |v^n| \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) |\vartheta^{n-k}| + C_3 \Delta\tau^\alpha |v^1| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) \frac{C_1 \Delta\tau^\alpha |v^1|}{\psi_{n-k}} \\ + C_3 \Delta\tau^\alpha |v^1| \leq \frac{C_1 \Delta\tau^\alpha |v^1|}{\psi_n} \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) + C_3 \Delta\tau^\alpha |v^1|$$

$$\leq \frac{C_1 \Delta \tau^\alpha |v^1|}{\psi_n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_k - \psi_{k+1}) + \psi_n \right) = C_1 \frac{\Delta \tau^\alpha |v^1|}{\psi_1}.$$

اثبات کامل شد.

قضیه ۴-۲-۶ فرض کنید که  $U(x, \tau)$  جواب دقیق (3) و  $\tilde{U}(x, \tau)$  جواب دقیق (8) باشد، آنگاه طرح تفاضلی غیرصریح (8) همگرا با مرتبه همگرایی  $O(\Delta \tau^{2-\alpha} + \Delta x^2)$  است.

برهان: چون  $n = 1, 2, \dots, M$ ، آنگاه به کمک لم ۳ داریم

$$\begin{aligned} |\vartheta^n| &\leq C_1 \frac{\Delta \tau^\alpha |v^1|}{\psi_n} = \frac{C_1}{\psi_n n^\alpha} n^\alpha \Delta \tau^\alpha |v^1| \leq \frac{C_1}{1-\alpha} (n \Delta \tau)^\alpha |v^1| \\ &\leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha |v^1|, \end{aligned}$$

که با بکارگیری (14)، (15) و (17) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \|E^n\|_2 &\leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha \|R^1\|_2 \leq \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha C_2 \sqrt{L} (\Delta \tau^{2-\alpha} + \Delta x^2) \\ &= C (\Delta \tau^{2-\alpha} + \Delta x^2), \end{aligned}$$

جایی که  $C = \frac{C_1}{1-\alpha} T^\alpha C_2 \sqrt{L}$  و اثبات کامل شد.

##### ۵- نتایج پژوهش

در این بخش، صحت و کارایی طرح تفاضلی غیرصریح را با ذکر دو مثال که فرم بسته جواب دقیق آن موجود است، بررسی می‌نماییم. در تمامی مثال‌ها نرخ بهره  $r(t)$  و سود سالانه  $D(t)$  را، توابع وابسته به زمان به صورت زیر در نظر می‌گیریم (Yang, et al, 2008)

$$r(t) = 0.1 + 0.05e^{-t}, \quad D(t) = 0.03 + 0.001e^{0.01t}.$$

$\hat{U}_j^n = \hat{U}(j\Delta x, n\Delta \tau)$  را جواب عددی طرح تفاضلی غیرصریح (8) قرار می‌دهیم که با حل عددی معادله تفاضلی بدست آمده به کمک نرم افزار متلب<sup>۴۷</sup> محاسبه می‌شود. مرتبه همگرایی طرح تفاضلی غیرصریح مثال‌های فوق را برای نرم ماکزیمم بدست می‌آوریم که برای طول گام مکانی  $\Delta x$

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

و طول گام زمانی  $\Delta\tau$ ، به ترتیب،  $\log_{\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}}\left(\frac{Error_1}{Error_2}\right)$  و  $\log_{\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2}}\left(\frac{Error_1}{Error_2}\right)$  هستند.  $Error_i$  نشان دهنده خطا برای  $\Delta x = \Delta x_i$  یا  $\Delta\tau = \Delta\tau_i$  است و نرم ماکزیمم به صورت زیر تعریف می شود

$$E(\Delta x, \Delta\tau) = \max_{0 \leq n \leq M} \left( \max_{0 \leq j \leq N} |U_j^n - \hat{U}_j^n| \right).$$

همچنین، از خطای ریشه-میانگین-مربع<sup>۴۸</sup> ( $RMSE$ ) برای بدست آوردن اندازه باقی مانده های جواب دقیق و عددی استفاده می کنیم، به این معنا که

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^M (U_j^n - \hat{U}_j^n)^2}{(N+1)(M+1)}} = \frac{\|U - \hat{U}\|_2}{\sqrt{(N+1)(M+1)}}.$$

مثال ۵-۱ معادله زمان-کسری با شرایط مرزی همگن زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha U(x, \tau) = a(x) \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + b(x, \tau) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - c(\tau)U(x, \tau) \\ \quad + f(x, \tau), \\ U(0, \tau) = 0, \quad U(1, \tau) = 0, \\ U(x, \tau) = x^2(1-x), \end{cases}$$

جایی که  $a(x) = \frac{1}{2}\delta^2 e^{2\beta x}$ ،  $b(x, \tau) = r(T - \tau) - D(T - \tau) - a(x)$ ،  $c(\tau) = r(T - \tau)$  و  $U(x, \tau) = (\tau + 1)^2 x^2(1-x)$  جواب دقیق معادله است، و جمله منبع از روی جواب دقیق به صورت زیر بدست می آید

$$f(x, \tau) = \left( \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) x^2(1-x) - (\tau + 1)^2 (a(x)(2-6x) + b(x, \tau)(2x-3x^2) - c(\tau)x^2(1-x)).$$

جدول های ۱ و ۲ نشان دهنده خطای نرم ماکزیمم، مرتبه همگرایی متناظر با این خطا،  $RMSE$  و زمان اجرای برنامه ( $CPU$  time) برای طول گام های مکانی و زمانی متفاوت مثال ۵-۱ هستند. در اینجا منظور از زمان اجرای برنامه، زمان یافتن جواب تقریبی و اندازه گیری خطای نرم ماکزیمم است. همان طور که از جدول ها قابل مشاهده است مرتبه همگرایی مکانی ۲ و همگرایی زمانی

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸

$\alpha - 2$  است که این موضوع قضیه ۴-۲-۶ را تأیید می‌نماید و همچنین با کاهش طول گام مکانی و زمانی، خطای ماکزیمم نرم و خطای ریشه میانگین مربعات به سمت صفر میل می‌کنند.

جدول ۱: خطا و مرتبه همگرایی برای مثال ۵-۱ وقتی که  $\alpha = 0.76$ ,  $\beta = -0.8$ ,  $\delta = 0.32$ ,  $M = 1000$  و  $T = 1$

$\Delta x$	$E(\Delta x, \Delta \tau)$	Order	RMSE	CPU time
1/4	1.3026e-02		4.5280e-03	8.77 s
1/8	3.3819e-03	1.9455	1.2489e-03	8.81 s
1/16	8.4275e-04	2.0047	3.2071e-04	8.99 s
1/32	1.9898e-04	2.0825	7.6408e-05	9.73 s
1/64	3.8013e-05	2.3881	1.4076e-05	10.11 s
1/128	6.4633e-06	2.5562	2.9967e-06	13.91 s

جدول ۲: خطا و مرتبه همگرایی برای مثال ۵-۱ وقتی که  $\alpha = 0.76$ ,  $\beta = -0.8$ ,  $\delta = 0.32$ ,  $N = 100$  و  $T = 1$

$\Delta \tau$	$E(\Delta x, \Delta \tau)$	Order	RMSE	CPU time
1/10	4.8109e-03		2.1357e-03	$5.36 \times 10^{-2} s$
1/20	2.0689e-03	1.2174	9.2300e-04	$7.88 \times 10^{-2} s$
1/40	8.7389e-04	1.2433	3.9224e-04	$1.27 \times 10^{-1} s$
1/80	3.5981e-04	1.2802	1.6292e-04	$2.49 \times 10^{-1} s$
1/160	1.4023e-04	1.3594	6.4676e-05	$5.83 \times 10^{-1} s$
1/320	4.6849e-05	1.5817	2.2878e-05	1.63 s

با توجه به تأثیر هر یک از پارامترهای: مرتبه مشتق کسری  $\alpha$ ، ضریب الاستیسیته نوسان‌پذیری  $\beta$  و مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای  $\delta$  روی حافظه طولانی مدت، در جدول ۳ اثر هر یک از این پارامترها را روی روند حافظه در بازارهای مالی با طول گام‌های مکانی مختلف  $\Delta x = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \right\}$  بررسی می‌نماییم.

مثال ۵-۲ معادله زمان-کسری با شرایط مرزی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha U(x, \tau) = a(x) \frac{\partial^2 U(x, \tau)}{\partial x^2} + b(x, \tau) \frac{\partial U(x, \tau)}{\partial x} - c(\tau)U(x, \tau) \\ \quad + f(x, \tau), \\ U(0, \tau) = (\tau + 1)^2, \quad U(1, \tau) = 3(\tau + 1)^2, \\ U(x, \tau) = x^3 + x^2 + 1, \end{cases}$$

جدول ۳: RMSE مثال ۵-۱ برای طول گام‌های  $\Delta x = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \right\}$  وقتی که  $T = 0.8$  و  $M = 400$

		$RMSE_{\frac{1}{4}}$	$RMSE_{\frac{1}{8}}$	$RMSE_{\frac{1}{16}}$	$RMSE_{\frac{1}{32}}$	$RMSE_{\frac{1}{64}}$
$\delta = 0.27$ $\beta = -1.00$	$\alpha_1 = 0.7$	4.2861e-03	1.1825e-03	3.0196e-04	6.9724e-05	1.0689e-05
	$\alpha_2 = 0.75$	4.0858e-03	1.1247e-03	2.8390e-04	6.2096e-05	6.9033e-06
	$\alpha_3 = 0.80$	3.8883e-03	1.0665e-03	2.6449e-04	5.2997e-05	6.8057e-06
$\alpha = 0.7$ $\delta = 0.27$	$\beta_1 = -1.50$	4.5962e-03	1.2682e-03	3.2492e-04	7.5568e-05	1.2067e-05
	$\beta_2 = -1.00$	4.2861e-03	1.1825e-03	3.0196e-04	6.9724e-05	1.0689e-05
	$\beta_3 = -0.50$	3.7817e-03	1.0391e-03	2.6382e-04	6.0201e-05	8.6193e-06
$\alpha = 0.7$ $\beta = -1.00$	$\delta_1 = 0.17$	4.8553e-03	1.3489e-03	3.4600e-04	8.1005e-05	1.3625e-05
	$\delta_2 = 0.27$	4.2861e-03	1.1825e-03	3.0196e-04	6.9724e-05	1.0689e-05
	$\delta_3 = 0.37$	3.5701e-03	9.8433e-04	2.5034e-04	5.6752e-05	7.6202e-06

جایی که  $a(x)$ ,  $b(x, \tau)$ ,  $c(\tau)$  همان توابع مثال قبل هستند و  $U(x, \tau) = (x^3 + x^2 + 1)(\tau + 1)^2$  جواب دقیق معادله است، به طور مشابه جمله منبع به صورت زیر بدست می‌آید

$$f(x, \tau) = \left( \frac{2\tau^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + \frac{2\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) (x^3 + x^2 + 1) - (\tau + 1)^2 (a(x)(6x + 2) + b(x, \tau)(3x^2 + 2x) - c(\tau)(x^3 + x^2 + 1)).$$

به طور مشابه، جدول‌های ۴ و ۵ بیانگر خطای نرم ماکزیمم، مرتبه همگرایی متناظر با این خطا، خطای ریشه میانگین مربعات و زمان اجرای برنامه برای طول گام‌های مکانی و زمانی متفاوت مثال ۵-۲ هستند. جدول‌ها مرتبه همگرایی مکانی ۲ و همگرایی زمانی  $2 - \alpha$  را نشان می‌دهند که قضیه

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸

۴-۲-۶ را تأیید می‌کند و همچنین با کاهش طول گام مکانی و زمانی، خطای ماکزیمم نرم و ریشه میانگین مربعات به سمت صفر میل می‌کنند.

در جدول ۶ تأثیر هر یک از پارامترهای مرتبه مشتق کسری، ضریب الاستیسیته نوسان‌پذیری و مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای روی روند حافظه در بازارهای مالی با طول گام‌های مکانی مختلف

$$\Delta x = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \right\}$$

نشان می‌دهیم.

جدول ۴: خطا و مرتبه همگرایی برای مثال ۵-۲ وقتی که  $\alpha = 0.36$ ,  $\beta = -2$ ,  $\delta = 0.62$

$$M = 1000 \text{ و } T = 1$$

$\Delta x$	$E(\Delta x, \Delta \tau)$	Order	RMSE	CPU time
1/4	1.5882e-02		5.5911e-03	9.70 s
1/8	4.4150e-03	1.8469	1.5733e-03	9.87 s
1/16	1.1348e-03	1.9600	4.1690e-04	10.17 s
1/32	2.9097e-04	1.9635	1.0951e-04	10.48 s

جدول ۵: خطا و مرتبه همگرایی برای مثال ۵-۲ وقتی که  $\alpha = 0.76$ ,  $\beta = -0.8$ ,  $\delta = 0.32$

$$N = 100 \text{ و } T = 1$$

$\Delta \tau$	$E(\Delta x, \Delta \tau)$	Order	RMSE	CPU time
1/10	6.9369e-02		3.3241e-02	0.10 s
1/20	3.0030e-02	1.2079	1.4439e-02	0.14 s
1/40	1.2872e-02	1.2222	6.2105e-03	0.25 s
1/80	5.4889e-03	1.2296	2.6549e-03	0.54 s
1/160	2.3356e-03	1.2327	1.1313e-03	1.16 s
1/320	9.9398e-04	1.2325	4.8163e-04	2.80 s

شکل ۱، ارزش اختیار معامله هر دو مثال ۵-۱ و ۵-۲ را بر اساس طول عمرهای مختلف اختیار تا تاریخ سررسید یعنی  $\tau = \left\{ T, \frac{3T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{T}{4}, 0 \right\}$  است که در اینجا  $T = 1$ . همان طور که در شکل قابل مشاهده است با افزایش طول عمر اختیار، ارزش اختیار معامله بیشتر می‌شود که این با ارزش زمانی اختیار معامله سازگار است. شکل ۲ نشان دهنده خطای مطلق مثال ۵-۱ و ۵-۲ و شکل ۳ بیانگر خطای نسبی هر دو مثال در نقاط مکانی مختلف دامنه جواب است.

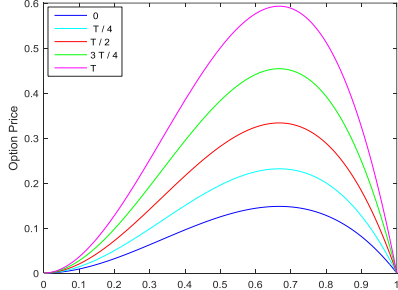
جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

جدول ۶:  $RMSE$  مثال ۵-۲ برای طول گام‌های  $\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right\}$  و  $\Delta x$  وقتی که  $T = 0.8$  و  $M = 100$

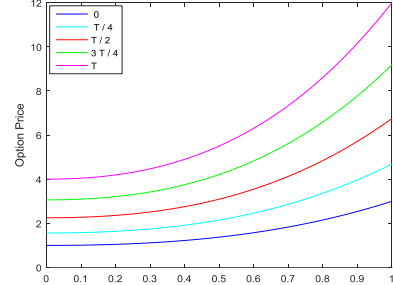
		$RMSE_{\frac{1}{4}}$	$RMSE_{\frac{1}{8}}$	$RMSE_{\frac{1}{16}}$	$RMSE_{\frac{1}{32}}$	$RMSE_{\frac{1}{64}}$
$\delta = 0.27$ $\beta = -1.00$	$\alpha_1 = 0.7$	5.0545e-03	2.0743e-03	1.2605e-03	1.0583e-03	1.0110e-03
	$\alpha_2 = 0.75$	5.1107e-03	2.3191e-03	1.5672e-03	1.3838e-03	1.3425e-03
	$\alpha_3 = 0.80$	5.2505e-03	2.6586e-03	1.9738e-03	1.8115e-03	1.7772e-03
$\alpha = 0.7$ $\delta = 0.27$	$\beta_1 = -1.50$	5.3821e-03	2.1870e-03	1.3213e-03	1.1080e-03	1.0583e-03
	$\beta_2 = -1.00$	5.0545e-03	2.0743e-03	1.2605e-03	1.0583e-03	1.0110e-03
	$\beta_3 = -0.50$	4.5172e-03	1.8803e-03	1.1586e-03	9.7932e-04	9.3751e-04
$\alpha = 0.7$ $\beta = -1.00$	$\delta_1 = 0.17$	5.6464e-03	2.2736e-03	1.3500e-03	1.1225e-03	1.0694e-03
	$\delta_2 = 0.27$	5.0545e-03	2.0743e-03	1.2605e-03	1.0583e-03	1.0110e-03
	$\delta_3 = 0.37$	4.3064e-03	1.8341e-03	1.1565e-03	9.8751e-04	9.4822e-04

کارایی روش عددی و طرح تفاضلی پیشنهادی در محاسبه‌ی تقریب عددی جواب و دقت محاسبات انجام شده برای مقادیر مختلف  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$ ، به ترتیب در شکل‌های ۴ تا ۹ نشان داده شده است. همان طور که در شکل‌های ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود با افزایش تعداد نقاط گره‌ای، لگاریتم نرم ماکزیمم خطای مطلق برای مقادیر مختلف پارامترها در هر دو مثال نزولی است، و این موضوع صحت و درستی نتایج عددی و همچنین همگرایی جواب‌های تقریبی به جواب واقعی را تأیید می‌نماید (توجه داشته باشید که در این شکل‌ها  $N = M$  در نظر گرفته شده است). لگاریتم نرم ماکزیمم خطای نسبی مقادیر مختلف  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$ ، به ترتیب در شکل‌های ۷ تا ۹ نشان داده شده است. مجدداً مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط گره‌ای، لگاریتم نرم ماکزیمم خطای نسبی برای مقادیر مختلف پارامترهای بیان شده در هر دو مثال به جزء برخی از نقاط محدود نزولی است.

Example 1: option price for  $\alpha = 0.85, \beta = -0.6, \delta = 0.25, T = 1, N = M = 100$

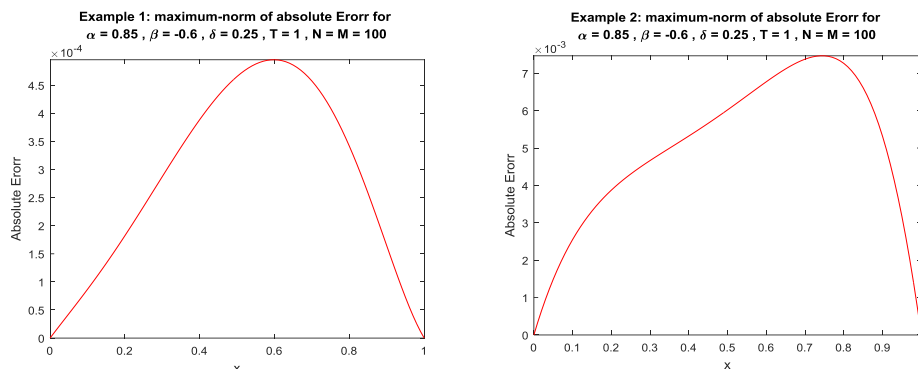


Example 2: option price for  $\alpha = 0.85, \beta = -0.6, \delta = 0.25, T = 1, N = M = 100$

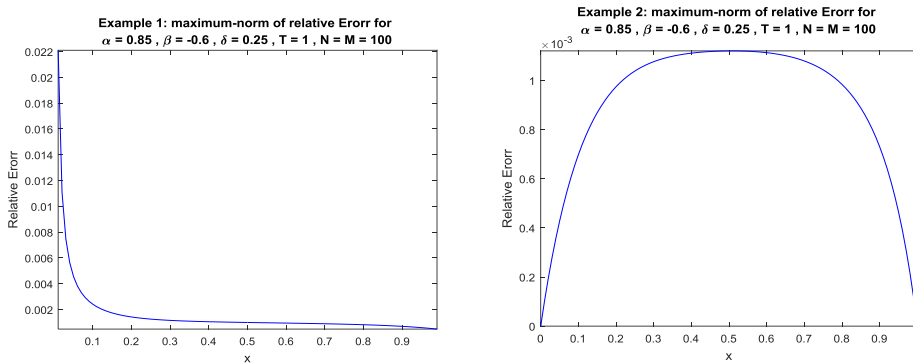


شکل ۱: ارزش اختیار معامله مثال‌ها بر اساس عمر اختیار تا سررسید.

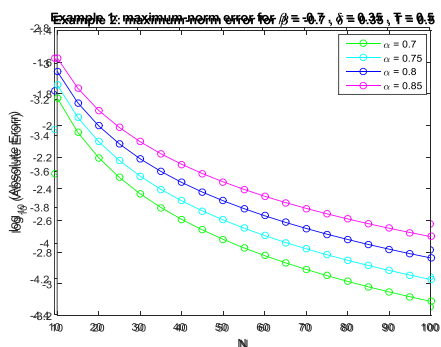
فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸



شکل ۲: نرم ماکزیمم خطای مطلق مثال‌ها.



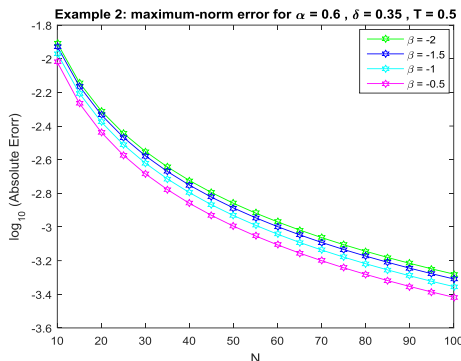
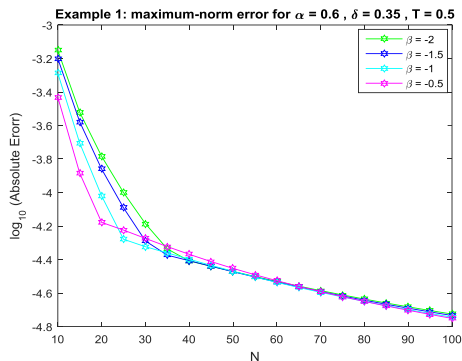
شکل ۳: نرم ماکزیمم خطای نسبی مثال‌ها.



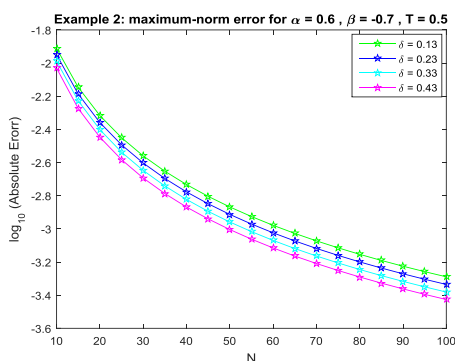
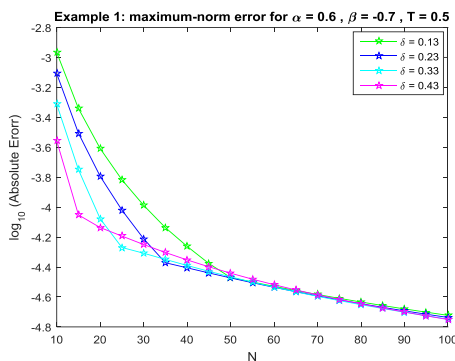
شکل ۴: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای مطلق مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\alpha$



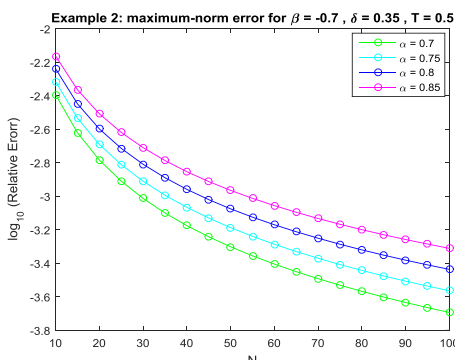
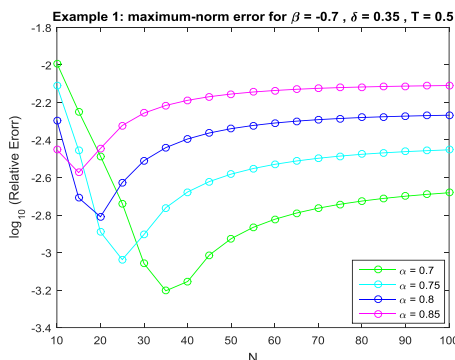
جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی... رضایی و یزدانیان



شکل ۵: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای مطلق مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\beta$

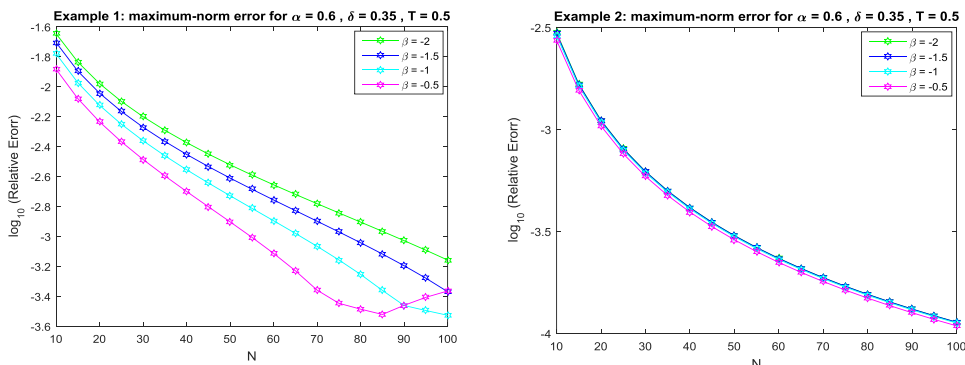


شکل ۶: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای مطلق مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\delta$  مختلف.

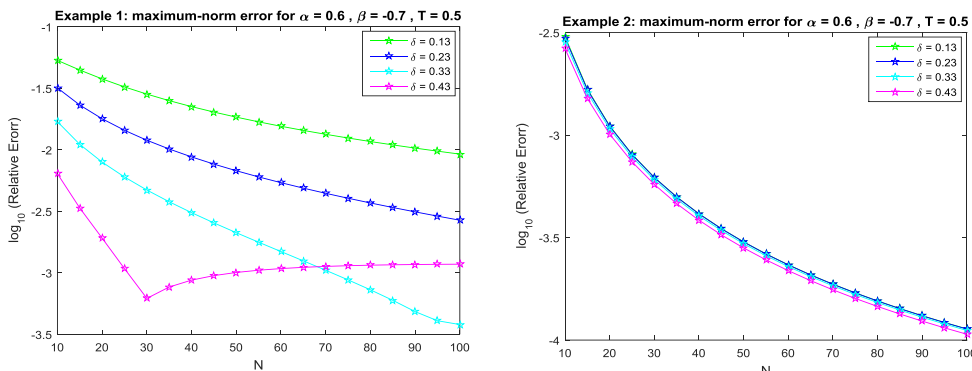


شکل ۷: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای نسبی مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\alpha$

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره سی و نهم / تابستان ۱۳۹۸



شکل ۸: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای نسبی مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\beta$



شکل ۹: لگاریتم نرم ماکزیمم خطای نسبی مثال‌های ۱-۵ و ۲-۵ برای  $\delta$

۶- نتیجه‌گیری

در بازارهای مالی معمولاً روند حرکتی قیمت سهام با میزان نوسانات آن رابطه عکس دارد و برای توصیف چنین پدیده‌ای از مدل  $CEV$  استفاده می‌کنند. این مدل جایگزینی برای مدل حرکت براونی هندسی در توصیف روند حرکتی قیمت سهام می‌باشد که در آن بدون اضافه کردن فرآیند تصادفی اضافی، نوسان‌پذیری آن تابعی از دو پارامتر الاستیسیته نوسان‌پذیری ( $\beta$ ) و مقیاس ثابت نوسان اولیه لحظه‌ای ( $\delta$ ) است. از طرفی معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری یک ابزار ریاضی مفید برای توصیف اثر حافظه طولانی مدت در بازارهای مالی است. در این مقاله فرض می‌کنیم ارزش اختیار معامله از دستگاه انتقال فرکتال تبعیت می‌کند و تمامی پارامترهای معادله‌ی بلک-شولز را وابسته به زمان در نظر گرفتیم. در ادامه به کمک روش تفاضلات متناهی جواب عددی مسأله ارزش‌گذاری

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیار مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

اختیار فروش مانع دوگانه اروپایی تحت مدل  $CEV$  که به صورت معادله دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری با پارامترهای وابسته به زمان خواهد بود را بدست آوردیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که ضمن کارا بودن طرح تفاضلی پیشنهادی، دارای دقت مرتبه ۲ مکانی و دقت مرتبه  $2 - \alpha$  زمانی است. پایداری بدون شرط و همگرایی طرح تفاضلی پیشنهاد شده با استفاده از آنالیز تبدیل فوریه نیز مورد بررسی قرار گرفت. بررسی‌ها نشان می‌دهد روش عددی ارائه شده در این مقاله را می‌توان برای سایر مدل‌های کسری جهت تعیین ارزش انواع مختلف اختیار معامله توسعه داد.

فهرست منابع

- 1) Black, F., Scholes, M. (1973). The valuation of options and corporate liability. *Journal of Political Economy*. 81, 659-683.
- 2) Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*. 29, 449-470.
- 3) Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*. 3, 125-144.
- 4) Hull, J. C., White, A. D. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*. 42, 281-300.
- 5) Davis, M. H. A., Panas, V. G., Zariphopoulou, T. (1993). European option pricing with transaction costs. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 31, 470-493.
- 6) Björk, T., Hult, H. (2005). A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model. *Finance and Stochastics*. 9, 197-209.
- 7) Liang, J. R., Wang, J., Zhang, W. J., Qiu, W. Y., & Ren, F. Y. (2010). Option pricing of a bi-fractional Black-Merton-Scholes model with the Hurst exponent  $H$  in  $[1/2,1]$ . *Applied Mathematics Letters*. 23, 859-863.
- 8) Zhou, Z., Gao, X. (2016). Numerical methods for pricing American options with time-fractional PDE models. *Mathematical Problems in Engineering*. 2016.
- 9) Farhadi, A., Salehi, M., Erjaee, G. H. (2017). A New Version of Black-Scholes Equation Presented by Time-Fractional Derivative. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*. 1-8.
- 10) Wyss, W. (2000). The fractional Black-Scholes equation. *Fractional Calculus & Applied Analysis for Theory and Applications*. 3, 51-61.
- 11) Jumarie, G. (2010). Derivation and solutions of some fractional Black-Scholes equations in coarse-grained space and time. Application to Merton's optimal portfolio. *Computers & Mathematics with Applications*. 59, 1142-1164.
- 12) Cartea, A., del-Castillo-Negrete, D. (2007). Fractional diffusion models of option prices in markets with jumps. *Physica A*. 374, 749-763.
- 13) Elbeleze, A. A., Kilicman, A., Taib, B. M. (2013). Homotopy perturbation method for fractional Black-Scholes European option pricing equations using sumudu transform. *Mathematical Problems in Engineering*. 2013.
- 14) Hariharan, G. (2013). An efficient wavelet based approximation method to time fractional Black-Scholes European option pricing problem arising in financial market. *Applied Mathematical Sciences*. 69, 3445-3456.
- 15) Chen, W., Xu, X., Zhu, S. (2015). Analytically pricing double barrier options based on a time-fractional Black-Scholes equation. *Computers & Mathematics with Applications*. 69, 1407-1419.
- 16) Zhang, H., Liu, F., Turner, I., Yang, Q. (2016). Numerical solution of the time fractional Black-Scholes model governing European options. *Computers & Mathematics with Applications*. 71, 1772-1783.

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارات مانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

- 17) De Staelen, R. H., Hendy, A. S. (2017). Numerically pricing double barrier options in a time-fractional Black-Scholes model. *Computers & Mathematics with Applications*. 74, 1166-1175.
- 18) Gatheral, J., Hsu, E. P., Laurence, P., Ouyang, C., Wang, T. H. (2012). Asymptotics of implied volatility in local volatility models. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*. 22, 591-620.
- 19) Shi, Q., Yang, X. (2014). Pricing Asian options in a stochastic volatility model with jumps. *Applied Mathematics and Computation*. 228, 411-422.
- 20) Cox, J. (1975). Notes on option pricing I: Constant elasticity of variance diffusions. Unpublished note. Stanford University. Graduate School of Business. September.
- 21) Cox, J., Ross, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*. 3, 145-166.
- 22) Cox, J. (1996). Notes on option pricing I: constant elasticity of variance diffusions. *The Journal of Portfolio Management*. 22, 15-17.
- 23) Wong, H. Y., Zhao, J. (2008). An artificial boundary method for American option pricing under the CEV model. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 46, 2183-2209.
- 24) Lee, M. K. (2016). Asymptotic approach to the pricing of geometric Asian options under the CEV model. *Chaos, Solitons & Fractals*. 91, 544-548.
- 25) Thakoor, N., Tangman, D. Y., Bhuruth, M. (2014). Efficient and high accuracy pricing of barrier options under the CEV diffusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 259, 182-193.
- 26) Boyle, P. P. (1999). Pricing lookback and barrier options under the CEV process. *Journal of financial and quantitative analysis*. 34, 241-264.
- 27) Liang, J. R., Wang, J., Zhang, W. J., Qiu, W. Y., Ren, F. Y. (2010). The solution to a bifractional Black-Scholes-Merton differential equation. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 58, 99-112.
- 28) Sun, Z. Z., Wu, X. N. (2006). A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system. *Applied Numerical Mathematics*. 56, 193-209.
- 29) Strikwerda, J. C. (2004). Finite difference schemes and partial differential equations. Siam.
- 30) Liu, F., Zhuang, P., Liu, Q. (2015). *Numerical Methods of Fractional Partial Differential Equations and Applications*, Science Press, Beijing.
- 31) Yang, R., Qin, X., Xia, B. (2008). Pricing Barrier Options with Time-Dependent Parameters and Curved Boundaries. *ISECS International Colloquium on Computing, Communication, Control, and Management*. 3, 299-303.

- 1 Standard options
- 2 Path-dependent option
- 3 Risk free interest rate
- 4 Dividend yield
- 5 Volatility
- 6 European double-knock-out barrier option
- 7 Constant elasticity of variance
- 8 Stochastic interest model
- 9 Jump-diffusion model
- 10 Stochastic volatility model
- 11 Transactions costs
- 12 Standard geometric brownian motion
- 13 Vanilla options
- 14 Strike price
- 15 Expiry date
- 16 Payoff
- 17 Knock-out option
- 18 Knock-in option
- 19 Holder
- 20 Writer
- 21 Exotic options
- 22 American or European options
- 23 Path-dependent option
- ۲۴ این دو اختیار از اختیارهای خاص با ریسک محدود هستند که ارزان‌تر از اختیارهای استاندارد هستند. به دلیل عدم وجود ترجمه مناسب برای آنها، خود این اصطلاحات را بکار می‌بریم.
- 25 European-style path-independent option
- 26 Implicit finite difference method
- 27 Compact finite difference
- 28 Local volatility model
- 29 Heteroscedasticity
- 30 Leverage effect
- 31 Elasticity of volatility
- 32 Square-root model of Cox and Ross
- 33 Bachelier model
- 34 Asian options
- 35 Lookback Options
- 36 Local volatility function
- 37 Scale parameter fixing the initial instantaneous volatility
- 38 Stochastic differential equation

جواب عددی معادله بلک-شولز زمان-کسری برای اختیارمانع دوگانه اروپایی.../رضایی و یزدانیان

---

- 39 Itô Lemma
- 40 European double barrier put option price
- 41 Fractal transmission system
- 42 Modified right Riemann-Liouville derivative
- 43 Caputo fractional derivative
- 44 Grid function
- 45 Parseval identity
- 46 Source term
- 47 MATLAB R2015a
- 48 Root-mean-square error