



قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک روش نیکی وورو - اوواروف

مهدی ابوالی^۱

مریم خلیلی عراقی^۲

حسن حسن آبادی^۳

احمد یعقوب نژاد^۴

تاریخ دریافت مقاله : ۹۸/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله : ۹۹/۰۱/۲۹

چکیده

اوراق اختیار معامله یکی از ابزارهای مهم در بازارهای مالی بوده و قیمت گذاری این اوراق با معادله قیمت گذاری بلک شولز بسیار متداول است. این معادله جهت قیمت گذاری انواع اختیارهای اروپائی استفاده می شود. با توسعه و بکارگیری علوم ریاضی در مباحث مالی، امکان ارائه مدل های جدیدتر قیمت گذاری اختیار معامله فراهم شده است. در این مقاله با بکارگیری روش جدید حل معادله دیفرانسیل نیکی وورو - اوواروف، امکان ارائه مدل متفاوت و جدید قیمت گذاری اختیار معامله بررسی گردید. افزایش دقت قیمت گذاری، رفع نواقص مدل بلک شولز، حل منطقی با مدلی جدید و قابلیت مقایسه خروجی با حل عددی، اهمیت و نوآوری پژوهش حاضر می باشند. نتایج نشان داد؛ امکان ارائه مدلی جدید برای قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با بکارگیری روش نیکی وورو - اوواروف امکان پذیر بوده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد بین قیمت گذاری روش جدید و مدل بلک شولز تفاوت معنادار وجود ندارد. دقت بیشتر قیمت گذاری برای مبالغ بالا، امکان بکارگیری معادله در قیمت گذاری اوراق اختیار معامله های اروپایی و آمریکایی و در نهایت اعمال محدودیت های کمتر اثبات معادله، مزیت های مدل جدید هستند. به منظور مقایسه مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز از اطلاعات ۵۰ اختیار معامله زعفران در فرابورس ایران از سال ۱۳۹۵ لغایت ۱۳۹۸ استفاده و از آزمون مقایسه ای دو گروه مستقل ناپارامتریک من وینتی استفاده گردید.

کلمات کلیدی

اختیار معامله، معادله قیمت گذاری بلک شولز، معادله شرودینگرگونه و روش پارامتری نیکی وورو - اوواروف. طبقه بندی موضوعی: F_{20} , E_{37} , G_{12} .

۱- گروه مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. Mehdiabvali@yahoo.com

۲- گروه مالی، واحد علوم تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
m.khaliliaraghi@gmail.com

۳- گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران. hha1349@gmail.com

۴- گروه حسابداری، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران. yaghoobacc@gmail.com



مقدمه

در سال ۱۹۷۳ میلادی داد و ستد اوراق اختیار معامله در بورس اختیار معامله‌ی شیکاگو آغاز شد. بعدها روش نوآورانه‌ی فیشر بلک^۲، رابرت مرتون^۳ و میرون شولز^۴ جهت قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله ارائه گردید. روش آنها با عنوان الگوی قیمت‌گذاری بلک‌شولز مشهور است. در مدل قیمت‌گذاری بلک‌شولز عواملی نظیر قیمت توافقی، قیمت پایه دارایی، نوسان‌پذیری انتظاری، زمان تا سررسید و نرخ بهره بدون ریسک تأثیرگذار می‌باشند.

مشکلاتی همانند مفروضات مدل، عدم تطبیق با توزیع آماری داده‌های قیمت سهام، فرض بازار کامل، عدم دخالت هزینه‌ی معامله‌های و عدم کاربرد در قیمت‌گذاری اوراق اختیار آمریکایی بر مدل بلک‌شولز مترتب می‌باشند. با بکارگیری علوم ریاضی و فیزیک در مباحث مالی، مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک‌شولز توسط پژوهشگران و با روش‌های مختلف تعدیل شده است. بتازگی روش‌های حل بر اساس پارامترهای وابسته به زمان و بدون وقفه‌ی بازپرداخت، پیشنهاد شده است (کومار و سینگ، ۲۰۱۴، صص ۱۷۷-۱۸۳). تجزیه و تحلیل قیمت اختیار معامله را می‌توان در طول زمان با یک معادله دیفرانسیل جزئی توصیف کرد. توسعه‌ی مدل بر اساس تطبیق معکوس عددی با تبدیل لاپلاس و روش اختلاف محدود و یا تحولات متغیر بر اساس تغییر ملین و روش‌های حل تقریبی برای حل معادله صورت پذیرفته است. (آهن، کوون و کانگ^۵، ۲۰۱۰، صص ۲۴۷-۲۵۵) در این مقاله معادله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک-شولز را از طریق تمرکز بر روش حل مبنایی معادله‌ی بلک‌شولز یعنی معادله‌ی شرودینگرگونه‌ی اصلی و حل آن به کمک روش نیکی‌وورو - اوواروف^۶ توسعه می‌دهیم. مبنای پژوهش در این مقاله تحلیلی و کاربردی است. در حوزه‌ی تحلیلی، ارائه‌ی معادله جدید قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بررسی و در حوزه‌ی کاربردی امکان بکارگیری و قیمت‌گذاری اوراق با مدل جدید، ارزیابی می‌شود. اهمیت و هدف این پژوهش، کاهش نواقص مدل قیمت‌گذاری بلک‌شولز همانند امکان قیمت‌گذاری هر دو نوع اوراق اروپایی و آمریکایی با مدل پیشنهادی و افزایش قابلیت آن با بکارگیری روش‌های جدید حل معادلات دیفرانسیل همانند روش پارمتری نیکی‌وورو - اوواروف است.

مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

مبانی نظری

قیمت‌گذاری قرارداد اختیار به سه عامل اثرگذار تفاوت قیمت توافقی آن اختیار معامله و دارایی پایه، تعداد روزهای باقی‌مانده به انقضا و نوسان‌پذیری انتظاری آن دارایی در روزهای باقیمانده وابسته است.

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

طرح مفاهیم انتظارات تصادفی و سنج‌های معادل به ریاضیدانان مالی امکان داد؛ فرمول‌هایی برای قیمت‌گذاری اوراق مشتقه بیابند. این طرح در ابتدا به هنری لوپگ^۶ تعلق داشت. هنری لوپگ و دیگران در آغاز قضایای درستی برای احتمالات تعریف نمودند. یکی از فرمول‌های ریاضی که امروزه بسیار مورد استفاده‌ی مهندسان مالی است؛ اصطلاحاً *لم ایتو* نامیده می‌شود. این عنوان از نام ریاضیدان ژاپنی کیوشی ایتو گرفته شده است. وی برای مدل‌سازی فرایندهای مارکوف، معادلات دیفرانسیل تصادفی را شکل داد. *لم ایتو* از معادلات ارائه شده به شکل جدیدی از معادلات دیفرانسیل تصادفی می‌رسد. عملاً ایتو پدر معادلات دیفرانسیل تصادفی شناخته می‌شود و پایه‌های حسابان تصادفی را می‌ریزد. بعدها آقایان فیشر بلک و میرن شولز و رابرت مرتون بر پایه مطالعات ایتوگام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. در اوایل دهه ۱۶۳۰، استفاده از اختیار معامله برای خرید و فروش پیمز لاله‌های هلندی در بازار معامله‌های آمستردام رواج پیدا کرد. (جان هال^۸، ۱۳۸۸، صص ۱۵۲-۲۵۰) در سال ۱۹۷۳، کمیته مبادلات شیکاگو یک بورس انحصاری برای اختیار معامله‌های بر روی سهام تشکیل داد. بورس اختیار معامله شیکاگو در ۲۶ آوریل ۱۹۷۳، درهای خود را به‌روی معامله‌های اختیار خرید گشود و مبادله اختیار معامله روی سهام در سال ۱۹۷۵ در بورس سهام آمریکا و بورس سهام فیلادلفیا راه‌اندازی گردید. در حال حاضر، بخش اعظم این معامله‌ها در بورس‌های سازمان‌یافته صورت می‌پذیرد. (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹-۹۹۳) در بازارهای مالی قیمت‌گذاری صحیح این اوراق اهمیت فراوانی دارند. طبیعی است که اختیار معامله‌های پرنوسان، گران‌تر از اختیارهای کم نوسان باشند. اولین مدل در زمینه قیمت‌گذاری اختیار معامله توسط لوئیس باچلییر^۹ در سال ۱۹۰۰ ارائه شده است. وی نتیجه گرفت که ارزش مورد انتظار اختیار معامله در زمان سررسید برابر معادله^{۱۰} یک می‌باشد:

$$c = s - \delta \left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) - x \delta \left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) + \delta\sqrt{t} + \delta \left(\frac{s-x}{\delta\sqrt{t}} \right) \quad (1)$$

در این فرمول S قیمت سهام عادی پایه، x قیمت توافقی قرارداد اختیار معامله، t زمان تا سررسید، δ انحراف معیار بازدهی و $Q(i)$ توزیع نرمال تجمعی استاندارد است. مدل باچلییر سپس توسط کروایزینگ^{۱۰} در سال ۱۹۵۶ میلادی مورد تعدیل قرار گرفت. اکثر پیشرفت‌های بدست‌آمده در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله، برای بیش از نیم قرن مدل‌های اقتصادسنجی موردی^{۱۱} بوده‌اند. (العلیص^{۱۲}، ۲۰۱۸، صص ۴۴۳) معادله دو، مدل ارائه شده توسط کاسوف^{۱۳} در سال ۱۹۶۹ نمونه‌ای از این دست مدل‌ها می‌باشد.

$$c = x \left\{ \left[\left(\frac{s}{x} \right)^y + 1 \right]^{\frac{1}{y}} - 1 \right\}, 1 \leq y \leq \infty \quad (2)$$

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پاییز ۱۳۹۹

طبق این فرمول حد بالای قیمت اختیار خرید برابر با قیمت سهام و حد پایین قیمت اختیار برابر با ارزش ذاتی آن یعنی $\text{Max}(s-x,0)$ می‌باشد. در ادامه و در دهه ۶۰ میلادی یکی از مشهورترین مدل‌های قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت عنوان مدل قیمت‌گذاری بلک شولز ارائه گردید. این مدل با فرمولی مشخص قیمت اختیار معامله را برآورد می‌نماید. مدل بلک شولز مرتون، مدلی ریاضی از یک بازار مالی شامل ابزارهای سرمایه‌گذاری مشتقه است. کاربرد این مدل قیمت‌گذاری اوراق اختیار اروپایی است. معادله‌ی ۳ به فرمول بلک شولز معروف است. (جان هال، ۱۳۸۸، صص ۲۵۰-۳۸۰)

$$v_0 = v_s N(d_1) - \quad (3)$$

$$\frac{E}{e^{rt}} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{v_s}{E}\right) + \left[r + \frac{1}{2}(\delta^2)\right]t}{\delta\sqrt{t}}$$

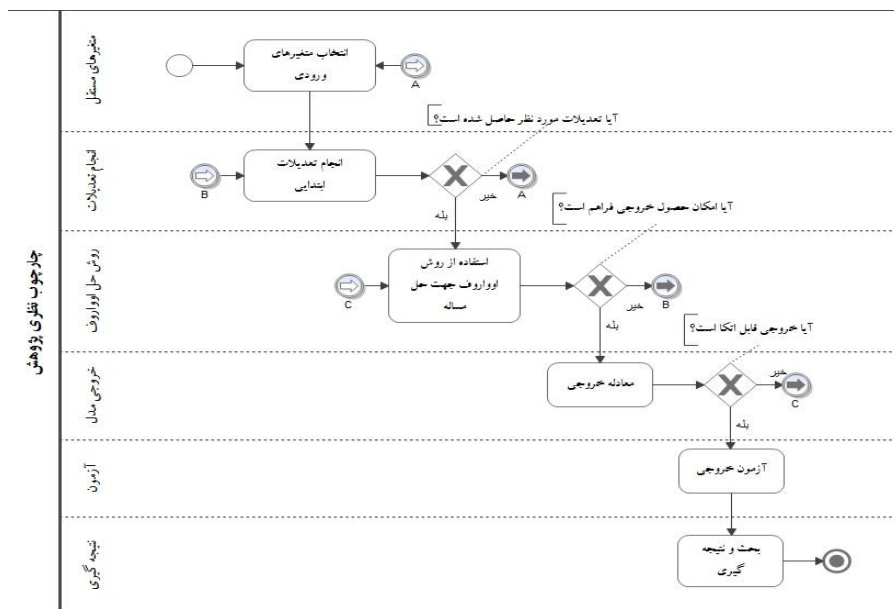
$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{v_s}{E}\right) + \left[r - \frac{1}{2}(\delta^2)\right]t}{\delta\sqrt{t}} = d_1 - \delta\sqrt{t}$$

در این فرمول v_0 ارزش یک اختیار خرید، v_s قیمت جاری سهام، E قیمت توافقی، r نرخ بهره مرکب سالانه، t زمان تا سررسید اختیار معامله، $N(d_i)$ تابع توزیع فراوانی نرمال و δ انحراف معیار بازده سالانه سهم است. کاربرد مفاهیم فیزیک و ریاضی برای حل مسائل مالی مستلزم ایجاد ارتباط دقیق بین مفاهیم فیزیکی با مسائل و مشکلات مالی و اقتصادی دارد. اخیراً، پژوهشگران و تحلیلگران مالی با استفاده از روش‌های پیشرفته ریاضی توانسته‌اند؛ مدل‌های نوینی طراحی کنند که در مقابل تغییرات بازار از خود واکنش نشان داده و برخی از مشکلات مدل بلک شولز را پوشش دهد. مدل‌های ریاضی همانند روش‌های شبیه‌سازی، درختی و بویژه روش‌های حل دیفرانسیلی از پیشرفته‌ترین روش‌های قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله هستند. وجود برخی از مشکلات مترتب بر مدل بلک شولز کاربرد گسترده‌ی آنها با چالش مواجه کرده است. در نتیجه توسعه‌ی این مدل همواره مورد توجه پژوهشگران مالی قرار گرفته است.

پژوهش‌های زیادی در حوزه‌های مالی ریشه در تحقیقات فیشر بلک، مایرون شولز و مرتن دارند و بر پایه‌ی کار آنان شکل می‌گیرند. مفهوم اساسی در این تحقیقات مفهوم نیکویی^{۱۴} است. استفاده از این واژه مربوط به پایداری^{۱۵} مدل‌های مالی تحت فرضیات مختلف و پارامترهای مختلف است. چقدر سیستم‌های اقتصادی و مالی در بازارهای مختلف و شرایط مختلف بازار مؤثر و پایداری می‌باشند. در ریاضیات مالی این مفهوم نخست در شکل قیمت‌گذاری اختیار معامله نمایان شد. ما با حل معادله‌ی پایه بلک شولز که از لِم ایتو مستخرج و به معادله شروودینگرگونه مشهور است؛ از طریق روش حل معادله دیفرانسیل به

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی،خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

روش نیکی وورو - اووارف سعی داریم مدلی جدید ارائه نموده که در دامنه وسیع تری از اوراق همانند قیمت گذاری اختیار معامله های اروپایی و آمریکایی کاربرد داشته باشد. این مدل می تواند یکی از نواقص مترتب بر مدل اصلی بلک شولز را مرتفع سازد. در حل بسیاری از مسائل می توان از توابع خاص برای ارائه ی جواب ها استفاده کرد. توابع خاص از حل معادله دیفرانسیل هایی معروف همانند فوق هندسی^{۱۶}، ژاکوبی^{۱۷}، لژاندر^{۱۸} و غیره بدست می آیند. روش نیکی وورو - اووارف مبتنی بر حل معادله دیفرانسیل بر اساس روش فروبینیوس^{۱۹} می باشد که منجر به توابع خاص می شود. از آنجاییکه ویژگی های توابع خاص شناخته شده هستند، می توان از این ویژگی ها برای بررسی رفتار جواب های بدست آمده در مسائل استفاده نمود. روش نیکی وورو - اووارف می تواند بطور مستقیم به حل معادلات دیفرانسیل پرداخته و حتی مؤثرتر و کارآمدتر از سایر روش های استاندارد موجود و در دستگاه های مختصات مختلف، حل معادلات دیفرانسیل درجه دو را نتیجه دهد. این روش با حل منطقی معادلات درجه دوم، مقادیر دقیق این معادلات را مشخص می کند. توابع نتیجه شده از حل معادلات با این روش، متعامد می باشند که این مصداقی بر مفید و مؤثر بودن روش بکار رفته است. این توابع بر حسب شرایط در سامانه و پتانسیل در نظر گرفته شده به صورت توابع لاگر، فوق هندسی، رودریگز و غیره ظاهر می شوند. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل درجه دو با روش نیکی وورو - اووارف، قابل مقایسه با حل حاصل از روش های عددی مختلف بوده و این حاکی از میزان دقت فوق العاده ی نتایج حاصل از این روش می باشد. از مزیت های دیگر این روش آن است که تابع بدست آمده برای اختیار خرید بر حسب چند جمله ای توابع لاگر بوده که تابعی دقیق و با رفتار مشخص و معینی هستند. همچنین علاوه بر مزیت دقت و سادگی، می توان بیان داشت که برای محاسبه ی فرم اختیار خرید هیچ تقریبی در نظر گرفته نشده است. جنبه ی نوآوری ایجاد شده در این پژوهش ماهیتی موضوعی، روشی و مفهومی دارد. موضوع استفاده شده جهت حل مسأله از طریق روش نیکی وورو - اووارف، کاملاً جدید بوده و معادله ی جدید نسبت به معادله ی بلک شولز از محدودیت های کمتری برخوردار می باشد. چارچوب نظری این پژوهش در ابتدا شامل شناسایی متغیرهای تأثیرگذار بر مدل بلک شولز همانند نرخ بهره بدون ریسک، قیمت توافقی، قیمت اعمال، زمان تا سررسید و نوسان پذیری انتظاری است. سپس با تعدیل هایی روی این متغیرها معادله شرودینگرگونه را به روش نیکی وورو - اووارف حل نموده و امکان ارائه مدلی جدید را بررسی می کنیم. در صورت تحقق این مهم، قیمت های خروجی حاصل از مدل جدید با قیمت های مستخرج از مدل بلک شولز مقایسه و آزمون می شوند. تشریح این رویه به شرح فرآیند ۱ است:



فرآیند ۱. چارچوب نظری پژوهش

پیشینه پژوهش

بررسی پیشینه‌ی پژوهش حاضر معطوف به مطالعه‌ی تحقیقات انجام شده در ارتباط با معادله‌ی بلک شولز، تغییرهای صورت گرفته پیرامون آن و در نهایت استفاده از روش‌های حل متنوع جهت ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت از معادله‌ی بلک شولز استوار است.

تحقیقات خارجی

ماتیواستارم، توماس هانگتینتون و داگلاس^{۲۰} در مقاله‌ای با عنوان "استفاده از رویکرد مدل قیمت‌گذاری اختیارات برای ارزیابی تصمیمات استراتژیک در محیط‌های پر تلاطم" نشان دادند؛ نسخه اصلاح شده از فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله بلک شولز، به طور گسترده‌ای در مباحث مالی استفاده می‌شوند. (ماتیواستارم، توماس هانگتینتون و داگلاس، ۲۰۱۷، صص ۴۳۷ - ۴۴۹)

وی‌ال خاستکویچ^{۲۱} در مقاله‌ای با عنوان "یک راه حل منحصر به فرد برای معادله دیفرانسیل بلک شولز با مشتقات جزئی نیمه خطی برای ارزیابی دارایی‌ها در اختیارات آمریکایی" یک روش برای حل مشکل مرزی قیمت‌گذاری اختیارات بر اساس معادله بلک شولز در نظریه اختیارات و براساس نمایندگی از شرایط مرزی مشخص ارائه نمودند. نتایج امکان‌پذیر بودن حل مشکل مرزی قیمت‌گذاری را اثبات می‌کند. (وی‌ال خاستکویچ، ۲۰۱۵، صص ۱۱۵۷ - ۱۱۶۴)

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی،خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

رومان و ایوانف^{۲۲} در مقاله‌ای با عنوان "فرآیند توزیع حداکثر گامای واریانس و مسیر قیمت گذاری اختیارات" در مورد امکان دستیابی به نتایج صریح برای فرآیند گامای واریانس بحث کردند. این مقاله یک فرآیند گاما واریانس را به عنوان تغییر زمان حرکت براونری بررسی می‌کند. (رومان و ایوانف، ۲۰۱۵، صص ۹۷۹ - ۹۹۳)

نوآوری معاویا الغلیص^{۲۳} در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیارات: فرمول بسیار ساده" اقدام به ارائه فرمول‌های ساده‌ای نمودند که رابطه مثبت بین قیمت اختیار و نوسان و زمان بلوغ را نشان می‌دهد. (معاویا الغلیص، ۲۰۱۴، صص ۷۱ - ۷۶)

همنتا و امرشی^{۲۴} در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیار کراک با کپسول"^{۲۵} از این اختیار برای قیمت گذاری استفاده کردند. نتایج آنها نشان داد که همپوشانی و مدل‌های استاندارد، قیمت نامناسبی را ارائه می‌دهند و مدل کلیتون^{۲۶} مناسب‌تر است. مدل آنها به ادبیات مشتقات انرژی با نشان دادن کاربرد مدل‌های مخروطی به قیمت گذاری، کمک می‌کند. (همنتا و امرشی، ۲۰۱۴، صص ۱۰۰ - ۱۲۱)

استیون لی^{۲۷} در مقاله‌ای تحت عنوان "هزینه تلویحی تعاملات توسط مدل قیمت گذاری اختیارات لندن"^{۲۸} با هدف ارائه یک روش جایگزین برای برآورد هزینه‌های معامله در بورس از طریق هزینه‌های معامله تلویحی با استفاده از مدل قیمت گذاری اختیار لندن اقدام نمودند. نتایج پژوهش، بررسی دقت هزینه‌های معامله تلویحی معامله شده در میان اختیارات بدون مالیات و بلوغ و تغییر هزینه‌های معامله معقول در دوره بحران مالی اخیر جهانی بوده است. (استیون لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

ژان پییر و پی تاشمن^{۲۹} در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیارات تحت مدل استرس بتا" یک مکانیزم رژیم سوئیچینگ^{۳۰} را به یک مدل قیمت گذاری سرمایه نسبت داده‌اند. آنها دریافتند این مدل که یکی از ویژگی‌های برجسته در بازار اختیارات آتی است؛ قادر به ایجاد چولگی نوسانی می‌باشد. (ژان پییر و پی تاشمن، ۲۰۱۲، صص ۲۰ - ۱۸۲)

لی منگ می وانگ^{۳۱} در مقاله‌ای با عنوان "مقایسه فرمول بکل شولز با فرمول بلک شولز فرکشنال"^{۳۲} در بازار مشتقات بورس با تغییر نوسان "فرمول قیمت گذاری اختیار معامله فرکشنال را با استفاده از فرمول بلک شولز اختیار معامله استنتاج کردند. نتایج آنها نشان داد؛ هنگامی که نوسان‌ها کوچکتر است، خطای میانگین خطی تقارن بلک شولز بزرگتر از مدل سنتی است. (لی منگ می وانگ، ۲۰۱۰، صص ۹۹ - ۱۱۱)

دودو و اسکایلت^{۳۳} در مقاله‌ای با عنوان "قیمت گذاری اختیار معامله های آمریکایی تحت نوسان تصادفی و نرخ بهره تصادفی" رویکرد جدیدی را برای قیمت گذاری اختیار معامله های آمریکایی ارائه

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پائیز ۱۳۹۹

نمودند. نتایج آنها نشان داد که اثرات حاصل از به کارگیری نرخ بهره و نوسان تصادفی قیمت‌ها در تعیین قیمت صحیح‌تر و واقعی‌تر اختیار معامله، بسیار حائز اهمیت است. (دودو و اسکایلت، ۲۰۱۰، صص ۷-۲۴) دی‌مادان^{۳۴} در مقاله‌ای با عنوان "ترکیب فرمول‌های بلک‌شولز با حرکت براونین و اتصال محدود" برخی از روابط جالب بین فرمول بلک‌شولز و آخرین پیام‌های نمایشی براونین را کشف کردند. از نتایج این پژوهش فرمول یوری مشتق شده است. (دی‌مادان، ۲۰۰۸، صص ۹۷-۱۱۵)

کریستوفرسن و همکاران^{۳۵} در مقاله‌ای با عنوان "تعیین قیمت اختیار معامله با مولفه‌های نوسان کوتاه‌مدت و بلندمدت" مدل جدیدی برگرفته از مدل انجل و لی^{۳۶} (۱۹۹۹) و هستون و نندی^{۳۷} (۲۰۰۰) برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های اروپایی ارائه نمودند. مدل پیشنهادی آنها امکان قیمت‌گذاری آسان‌تر اختیار معامله‌های اروپایی را ممکن ساخت. (کریستوفرسن و همکاران، ۲۰۰۸، صص ۸-۱۵)

ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان^{۳۸} در مقاله‌ای با عنوان "قیمت‌گذاری اختیارات برای تغییر مسیر نمایی لوی مدل تحت مم^{۳۹}" مطالعه و ارزیابی منطقی قیمت اختیار اروپایی هنگامیکه فرآیند قیمت اساسی با تغییر فرآیند لوی تغییر می‌کند؛ را بررسی کردند. نتایج آنها ارائه فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی تحت اندازه‌گیری حداقل مارتینگال آن‌تروپی^{۴۰} بوده است. (ژوچنگ و ژیان‌پینگ‌وان، ۲۰۰۷، صص ۶۵۱-۶۶۴)

تحقیقات داخلی

خلیلی عراقی و همکاران در پژوهشی با عنوان "قیمت‌گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون" با ورود عامل تلاطم در مدل قیمت‌گذاری با استفاده از مدل هستون، مدلی کارا تر برای قیمت‌گذاری اوراق ارائه نمودند. نتایج پژوهش مؤید این نکته می‌باشد که تفاوت معناداری بین مدل هستون و مدل رایج قیمت‌گذاری اوراق در بورس اوراق بهادار وجود داشته است. (خلیلی عراقی و همکاران، ۱۳۹۵، صص ۷-۱۶)

جلوداری ممقانی و پیکر در مقاله‌ای تحت عنوان "محاسبه ارزش اختیار با استفاده از روش گیلز" به کاربرد همزمان روش وابسته به مسیر برای شبیه‌سازی و برآورد تابع عایدی پرداختند. نتایج نشان داد که استفاده از روش آلاگانندو^{۴۱} در صورت امکان، به نتایج بهتری می‌انجامد. (جلوداری ممقانی و پیکر، ۱۳۹۱، صص ۸-۱۵)

خضری‌پور قرایی و ستارداغی در مقاله‌ای با عنوان "یک روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی صریح برای حل معادله غیرخطی بلک شولز" اثر بازارهای غیرنقدی در ارزش اختیار معامله را بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که برای موارد غیرخطی، یعنی ارزش‌گذاری اختیار معامله با وجود تغییر

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

قیمت، روش عددی تفاضلات متناهی صریح، جواب عددی قابل قبولی را فراهم می‌آورد. (خضری‌پور قرایی و ستارداغی، ۱۳۹۱، صص ۶ - ۱۷)

شاگران در مقاله‌ای تحت عنوان "روش عددی جدید برای ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی" از مدل تلاطم تصادفی هستون^{۴۲} استفاده نمود. آزمون‌های عددی نشان دهنده صحت و دقت روش عددی جدید معرفی شده در این مقاله می‌باشد. بهبود مدل لانگ استف و شوارتز^{۴۳} با کاهش زمان محاسباتی و تورش قیمت‌گذاری، نتیجه این پژوهش بوده است. (شاگران، ۱۳۹۱، صص ۳ - ۱۸)

زمانی و زرگری طی پژوهشی تحت عنوان "یک شمای تفاضل متناهی برای محاسبه قیمت اختیار در مدل تلاطم تصادفی" اشاره داشته‌اند که در مدل تلاطم تصادفی، قیمت اختیارهای اروپایی، جواب یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای سهموی است. نتایج نشان داد که در مدل‌های تلاطم تصادفی، بازار کامل نیست و در این بازارها نمی‌توان ریسک را کاملاً پوشش داد. (زمانی و زرگری، ۱۳۸۷، صص ۷ - ۲۰)

چنانچه ملاحظه گردید؛ در تمام تحقیقات از روش بلک‌شولز استفاده شده و این مدل ضمن دارا بودن محدودیت‌های مالی، زمینه بهبود و بررسی مجدد را دارا می‌باشد. ما قصد داریم بررسی کنیم که آیا می‌شود با استفاده از معادله‌ای دیگر که محدودیت کمتری دارد، به نتیجه‌ای متفاوت دست یافت؟

فرضیه‌های پژوهش

فرضیه‌ها

- با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی بلک‌شولز به کمک روش نیکی وورو - اوواروف، می‌توان به فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافت.
- بین خروجی مدل جدید ارائه شده و مدل اصلی بلک‌شولز تفاوتی وجود ندارد.

روش‌شناسی پژوهش

ما در صدد ارائه‌ی مدلی جدید برای قیمت‌گذاری اختیار معامله هستیم. از منظر هدف اجرا، این پژوهش ماهیتی بنیادی و کاربردی دارد (علی دلاور، ۱۳۷۳، صص ۱۱۰-۲۵۰). در بخش بنیادی، ارائه‌ی مدل متفاوت معادله‌ی بلک‌شولز بررسی شده و در حوزه‌ی کاربردی، امکان بهره‌گیری از این مدل و مقایسه آن با مدل اصلی بلک‌شولز به منظور استفاده در بازارهای مالی بررسی می‌گردد. جهت ارائه مدلی کاراتر، ضمن بهره‌گیری از روش نیکی وورو - اوواروف، امکان استفاده از این روش جدید را فراهم می‌نماییم. در ادامه با بکارگیری ابزارهایی همانند نرم افزارهای ماتیماتیکا^{۴۴} و اسپیس‌اس^{۴۵}، امکان مقایسه‌ی نتایج فراهم می‌گردد. در حوزه‌ی نظری، متغیرهای قابل تعریف شامل ابزار مشتقه و اختیار

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پائیز ۱۳۹۹

معامله می‌باشند. اوراق مشتقه در مباحث مالی ابزاری هستند که ساختار پرداخت و ارزش آنها از ارزش دارایی پایه و شاخص‌های مربوطه نشأت می‌گیرند. اختیار معامله قراردادی قانونی است که توسط یک فروشنده به یک خریدار در ازای مبلغ معینی فروخته می‌شود. قراردادهای اختیار خرید^{۴۶} و فروش^{۴۷}، به دارندگان این حق را می‌دهند تا دارایی را در تاریخی معین و به قیمت مشخصی خریداری و یا به فروش برسانند. در حوزه‌ی عملیاتی مفاهیم قابل تعریف عبارتند از:

▪ **معادله شرودینگر:** معادله‌ای است که چگونگی تغییر حالت کوانتومی یک سامانه فیزیکی با زمان را توصیف می‌کند؛ (الغیض، ۲۰۱۸، ص ۴۴۳)

▪ **معادله بلک شولز:** برآوردی نظری از قیمت اختیارات سبک اروپایی است؛ (همنتا و امرشی^{۴۸}، ۲۰۱۳، صص ۱۰۰ - ۱۲۱)

▪ **روش نیکی‌وروو - اوواروف:** بر اساس حل عمومی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با توابع خاص بنا شده است؛

▪ **چند جمله‌ای لاگر:** در ریاضیات، جواب‌های معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$ می‌باشند. (استیون‌لی، ۲۰۱۲، صص ۳۳۳ - ۳۶۰)

در خصوص گردآوری اطلاعات مربوط به ادبیات موضوع و پیشینه پژوهش از روش کتابخانه‌ای و جهت جمع‌آوری اطلاعات برای تأیید یا رد فرضیه‌های پژوهش از روش میدانی استفاده گردید. با لحاظ محدودیت استفاده از اوراق مشتقه در بازار ایران، فرابورس به‌عنوان جامعه آماری انتخاب و اطلاعات معامله‌های زعفران محدود به بازه زمانی ۱۳۹۵ لغایت ۱۳۹۸ به‌عنوان نمونه آماری در این مقاله لحاظ گردید. از منظر روش آماری، پژوهش حاضر از نوع استنباطی می‌باشد. (غلامرضا خاکی، ۱۳۹۰، صص ۹۰ - ۲۱۰)

تجزیه و تحلیل داده‌ها و آزمون فرضیه‌ها

سیر ارائه‌ی مطالب در این قسمت، شامل چگونگی اثبات و ارائه‌ی معادله‌ی جدید بلک شولز و سپس آزمون فرضیه‌ها و پاسخگویی به سوالات پژوهش خواهد بود. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی و اصلی بلک شولز به شرح معادله ۴ می‌باشد. (کریستوفر سن و جاکوب^{۴۹}، ۲۰۰۸، صص ۸ - ۱۵)

$$\frac{\partial p}{\partial t} + rs \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2 \partial^2 p}{2 \partial s^2} - \gamma p = 0 \quad (۴)$$

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

در این معادله p قیمت اختیار خرید، r نرخ بدون ریسک، S قیمت پایه دارایی، t زمان تا سررسید و δ انحراف معیار قیمت دارایی می‌باشند. (مادان ۵، ۲۰۰۸، صص ۹۷ - ۱۱۵) در ادامه‌ی حل معادله ۴ می‌توان بدین گونه رفتار کرد:

$$p = e^{(r-\nu)(T-t)} f(s) N(d_1) - e^{-\nu(T-t)} KN(d_2) \quad (5)$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \quad (6)$$

$$d_1 = \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r_f + \frac{\delta^2}{2}\right)t\right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} \quad (7)$$

$$d_2 = \frac{\left(\ln\left(\frac{s}{k}\right) + \left(r_f - \frac{\delta^2}{2}\right)t\right)}{\delta\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \delta\sqrt{T-t} \quad (8)$$

با جایگذاری معادله ۵ در معادله ۴ ما بدست آوردیم:

$$N(d_1)e^{(T-t)(r-\nu)} \left(2rf(s) - 2rsf'(s) - s^2\delta^2 f''(s)\right) = 0 \quad (9)$$

بنابراین معادله مربوط به $f(s)$ بصورت معادله ۱۰ می‌باشد:

$$f''(s) + \frac{2r}{\delta^2 s} f'(s) - \frac{2r}{s^2\delta^2} f(s) = 0 \quad (10)$$

با معرفی تبدیلی به شرح معادله ۱۱:

$$f(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u(s) \quad (11)$$

ما به معادله‌ای بر حسب u به صورت معادله ۱۲ دست یافتیم:

$$u'' - \frac{b}{s^2} u = 0 \quad (12)$$

که در آن b برابر است با:

$$b = \frac{r^2 + r\delta^2}{\delta^4} \quad (13)$$

اگر معادله ۱۲ را با روش پارامتری نیکی وورو - اوواروف حل کنیم؛ u به صورت معادله ۱۴ خواهد شد. (پی‌نوشت الف و ب)

$$u = s^{\frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2}} \quad (14)$$

با جایگذاری معادله ۱۴ در معادله ۱۱، حالت‌های $f_1(s)$ و $f_2(s)$ به صورت معادله ۱۵ و ۱۶ خواهند بود:



فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پائیز ۱۳۹۹

$$f_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_1(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 + \sqrt{1 + 4(r^2 + r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (15)$$

$$f_2(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u_2(s) = s^{-\frac{2r}{\delta^2}} s^{-\frac{1 - \sqrt{1 + 4(r^2 + r\delta^2)}}{\delta^4}} = s \quad (16)$$

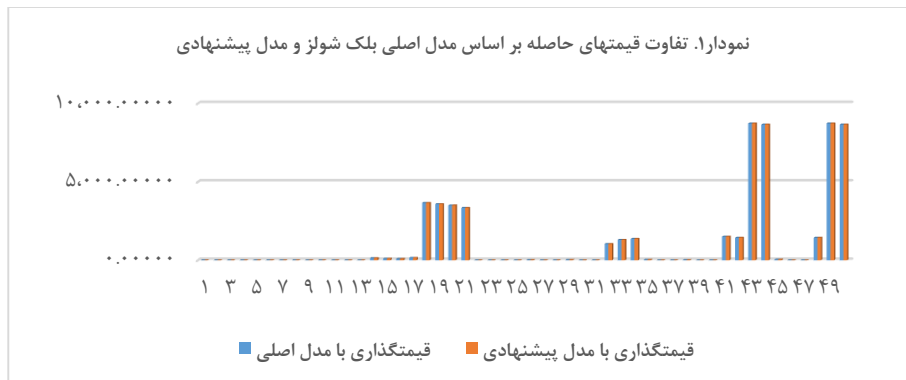
ما فرم نهایی $f(s)$ را بصورت ترکیبی خطی از $f_1(s)$ و $f_2(s)$ ارائه کردیم.

$$f(s) = c_1 s^{-\frac{2r}{\delta^2}} + c_2 s. \quad (17)$$

ما پیشنهاد می‌دهیم که $c_1 = c_2 = 1$ است. با جایگذاری معادله ۱۷ در معادله ۴ داریم:

$$p = e^{(r-\gamma)(T-t)} \left(s^{-\frac{r}{\delta^2}} + s \right) N(d_1) - e^{-\gamma(T-t)} KN(d_2) \quad (18)$$

در این مقاله اطلاعات آخرین ۵۰ قرارداد اختیار معامله‌ی خرید زعفران در بورس کالای ایران منتهی به سال ۱۳۹۸ مورد استفاده قرار گرفت. در این راستا ابتدا، اطلاعات ورودی: شامل قیمت‌های پایه دارایی از ۱۲۴،۲۴۵ تا ۱۲۷،۳۱۵ ریال، انحراف معیار نوسان قیمت زعفران ۱۵ درصد، نرخ بازده بدون ریسک ۲۰ درصد، زمان تا سررسید ۰/۲ تا ۰/۸ سال و قیمت اعمال از ۱۴۰،۰۰۰ تا ۱۶۰،۰۰۰ ریال در مدل جدید و مدل اصلی بلک شولز اعمال و سپس قیمت‌های خروجی حاصله، مورد مقایسه قرار گرفتند. نمودار یک تفاوت قیمت‌های محاسبه شده بر اساس مدل اصلی بلک شولز و مدل ارائه شده در این پژوهش را نشان می‌دهد.



در ادامه‌ی بررسی آماری پیرامون نتایج حاصله، ابتدا آزمون نرمال بودن (کولموگروف اسمیرنوف) قیمت‌های بدست‌آمده بر اساس دو مدل انجام و به شرح جدول شماره یک ارائه می‌گردند:

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی،خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

Table1. One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00001
N		50
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	1150.4971
	Std. Deviation	2461.30615
Most Extreme Differences	Absolute	.378
	Positive	.378
	Negative	-.320
Test Statistic		.378
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

نتایج بدست آمده در جدول شماره یک، ($sig = 0 < 0.05$) نشان دهنده نرمال نبودن قیمت های حاصل از بکارگیری معادله استاندارد بلک شولز دارد. در ادامه، آزمون نرمال بودن قیمت های حاصل از بکارگیری مدل جدید اجرا و نتایج ارزیابی به شرح جدول شماره دو ارائه می گردند:

Table2. One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		VAR00002
N		50
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	1150.5749
	Std. Deviation	2461.42909
Most Extreme Differences	Absolute	.378
	Positive	.378
	Negative	-.320
Test Statistic		.378
Asymp. Sig. (2-tailed)		.000

نتایج بدست آمده در جدول شماره دو، ($sig = 0 < 0.05$) نشان دهنده نرمال نبودن قیمت های حاصل از بکارگیری معادله جدید دارد. بنابراین فرض نرمال بودن نتایج حاصل از بکارگیری مدل پیشنهادی در سطح اطمینان ۹۵ درصد قابل پذیرش نیست. با توجه به عدم پذیرش فرض نرمال بودن دو گروه مورد بررسی، آزمون ناپارامتریک من ویتنی جهت ارزیابی دو گروه انتخاب گردید. در ادامه، آزمون برابری واریانس های دو گروه ارزیابی به شرح جدول شماره سه ارائه می گردد:

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پاییز ۱۳۹۹

Table3. Equivalence test for variances

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	.151	1	.151	.000	1.000
Within Groups	593716394.515	98	6058330.556		
Total	593716394.666	99			

با توجه به ($sig = 1 > 0.05$) فرض برابری واریانس‌ها در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد پذیرش قرار می‌گیرد. نتایج حاصل از ارزیابی آزمون من‌ویتنی به شرح جدول شماره چهار می‌باشد:

Table4. Test Statistics^a

	VAR00003
Mann-Whitney U	1223.000
Wilcoxon W	2498.000
Z	-.186
Asymp. Sig. (2-tailed)	.852

با توجه به ($sig = 0.852 > 0.05$) در سطح اطمینان ۹۵ درصد فرضیه اصلی پژوهش که مبتنی بر عدم وجود اختلاف معنادار بین نتایج مدل اصلی بلک‌شولز و مدل پیشنهادی و تعمیم‌یافته است؛ مورد تأیید قرار می‌گیرد.

آزمون فرضیه‌ها

▪ **فرضیه اول:** با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی بلک‌شولز به کمک روش نیکی وورو - اوواروف، می‌توان به فرمولی متفاوت برای قیمت‌گذاری اختیار معامله دست یافت. با اثبات و ارائه‌ی معادله ۱۸، فرضیه اول این پژوهش مورد تأیید قرار گرفت. در واقع روش حل و اثبات ارائه شده، مؤید امکان بروزرسانی معادله‌ی بلک‌شولز با معادله‌ی جدید می‌باشد.

▪ **فرضیه دوم:** بین خروجی مدل جدید ارائه شده و مدل اصلی بلک‌شولز تفاوتی وجود ندارد. با استناد به نتایج حاصل از آزمون آماری ناپارمتریک من‌ویتنی بین مدل جدید و مدل اصلی بلک‌شولز، فرضیه دوم این پژوهش در سطح اطمینان ۹۵ درصد مورد تأیید قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است؛ عدم معناداربودن خروجی‌های حاصله به معنی تشابه دو مدل نیست. بلکه ما نشان دادیم که معادله‌ی جدید ضمن اثبات با روشی نوآورانه، تفاوت از لحاظ متغیرهای موثر بر آن و در نهایت شکل نهایی متفاوت با

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

معادله اصلی بلک شولز، از لحاظ خروجی با معادله‌ی اصلی بلک شولز نزدیک است. ارائه‌ی معادله‌ای متفاوت با معادله بلک شولز و حصول نتایج (قیمت گذاری) نزدیک اما دقیق تر و با لحاظ محدودیت تعداد نمونه‌ی استفاده شده و در سطح اطمینان ۹۵ درصد، مزیت استفاده از روش جدید می‌باشند. تشابه مدل جدید با مدل بلک شولز توسط مدلسازی بوت استرپ نیز مورد تأیید قرار گرفته و تشریح آن در این مجال پرداخته نشده است.

نتیجه گیری و پیشنهادها

استفاده از مدل جدید برای قیمت گذاری صحیح تر اختیار معامله پیشنهاد می‌گردد. تحلیل گران مالی بویژه ارزشگذاران اختیار معامله، فعالان بازارهای سرمایه و مشاوران مالی که بدنبال محاسبه‌ی قیمت اختیار معامله هستند؛ کاربران اصلی این مقاله می‌باشند. نتیجه‌ی حاصله مؤید آن است که ما با حل معادله‌ی شرودینگرگونه اصلی به روش نیکی وورو - اواروف، به فرمی صریح و جدید از معادله‌ی قیمت گذاری اختیار معامله دست یافتیم. در واقع مدل اصلی بلک شولز یکی از حالت‌های خاص مدل بهبود یافته پیشنهادی می‌باشد. لذا برتری استفاده از مدل پیشنهادی نسبت به مدل اصلی قابل درک می‌باشد. یافته‌ی دیگر بیانگر آن است که نتایج قیمت گذاری بر اساس معادله‌ی جدید به قیمت حاصله بر مبنای روش بلک شولز نزدیک بوده و این تفاوت در مقادیر بالای معامله‌های اختیار معامله پررنگ خواهد بود. ما با بهبود مدل قیمت گذاری بلک شولز از این طریق، امکان استفاده از معادله‌ی جدید جهت قیمت گذاری صحیح تر قراردادهای اختیار معامله، را فراهم کردیم. در واقع، مزیت اصلی ارائه‌ی این روش شامل بهره‌گیری از روشی جدید و متفاوت برای اثبات معادله‌ی بلک شولز، دقت بیشتر قیمت گذاری برای مقادیر بالای معامله‌های اختیار، امکان بکارگیری از معادله‌ی جدید برای قیمت گذاری انواع گوناگون اوراق اختیار معامله همانند اوراق آمریکایی و در نهایت اعمال محدودیت‌های کمتر جهت اثبات معادله استوار می‌باشد.

نتایج این پژوهش با نتایج پژوهش ماتیو استارم، توماس هانگتینتون و داگلاس (۲۰۱۷) که نشان دادند نسخه اصلاح شده از فرمول قیمت گذاری اختیار معامله بلک شولز، به طور گسترده‌ای در حوزه مالی قابلیت استفاده دارند؛ همخوان می‌باشد. همچنین ارائه‌ی معادله‌ی متفاوت بلک شولز صورت گرفته در این پژوهش، نتایج پژوهش وی‌ال خاستکویچ^{۵۱} (۲۰۱۵) را تأیید می‌نماید. نتایج صورت پذیرفته با انتخاب و تعدیل متغیرهای ورودی واقعی تر و با رویکرد الغلیص (۲۰۱۸) برای قیمت گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی مطابقت دارد. اگر چه نتایج این پژوهش نشان‌دهنده‌ی عدم وجود تفاوت معنادار بین خروجی مدل اصلی و مدل جدید می‌باشد؛ ولیکن دو نکته پیرامون آن حائز اهمیت است. اولاً، این عدم تفاوت

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پاییز ۱۳۹۹

می‌تواند نشان‌دهنده‌ی اعتبار مدل جدید باشد. همانطور که مدل اصلی بلک‌شولز دارای وجاهت علمی در بین متخصصان مالی بوده، خروجی یک معادله جدید که تفاوت معناداری با قیمت‌گذاری مدل اصلی استاندارد ندارد، می‌تواند به اعتبار مدل جدید کمک نماید. ثانیاً، با توجه به وجود تفاوت بسیار جزئی، این تفاوت در مبالغ بالای معامله‌های اختیار بین‌المللی (برای مثال چند صد میلیون دلار و بالاتر) اهمیت دوچندان خواهد داشت. می‌توان ادعا نمود که برتری استفاده از مدل جدید در مقایسه با مدل اصلی اهمیت دو چندان‌ی پیدا نموده و با افزوده شدن ارزش معامله‌ی پایه اختیار، اهمیت این تفاوت بیشتر خواهد بود.

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

منابع

- ۱) خلیلی عراقی مریم و همکاران. (۱۳۹۵). "قیمت گذاری اوراق تبعی با استفاده از مدل هستون". پایان-نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه علوم تحقیقات تهران، صص ۳۰ - ۸۰.
- ۲) جلوداری ممقانی پیکر. (۱۳۹۱). "محاسبه ارزش اختیار به روش گیلز". پژوهش نامه اقتصاد، تهران، صص ۸-۱۵.
- ۳) خضری پور فرایی، رشید ستارداغی، صفا و قاسمی. (۱۳۹۱). "یک مقایسه از روش های شبیه سازی مونت کارلو و تفاضلات متناهی در ارزش گذاری اختیار معاملات توأم با مانع دوتایی در حالت گسسته". سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها، تهران، صص ۱۲ - ۲۱.
- ۴) سروستانی سلیمانی. ابراهیمی. (۱۳۹۱). "روش درخت دوجمله ای برای قیمت گذاری اختیارات آسیایی در مدل پرش". سومین کنفرانس ریاضیات مالی و کاربردها. تهران. صص ۸-۱۳.
- ۵) خاکی غلامرضا. (۱۳۹۱). "روش پژوهش با رویکردی به پایان نامه نویسی". تهران، انتشارات بازتاب چاپ سوم.
- ۶) هال جان. (۱۳۸۸). "مبانی مهندسی مالی و مدیریت ریسک". ترجمه سجاد سیاح و علی صالح آبادی، تهران، چاپ دوم، شرکت کارگزاری مفید.
- ۷) دلاور علی. (۱۳۷۳). "روش های پژوهش در روان شناسی و علوم تربیتی". تهران، مرکز چاپ و انتشارات دانشگاه پیام نور، چاپ پنجم.
- 8) Khalili, Iraqi, M., et al. (2016). *Pricing of subordinate bonds using the Heston model*. (Unpublished master's thesis). Islamic Azad University, Science and Research Branch, Iran. (in Persian)
- 9) Jelodari Mamaghani, Mohammad. (1391). "Calculation of Validity Values by Giles Method". *Economic Research*, Tehran, Pages 8-15. (in Persian)
- 10) Khedzipour, Ghareh., Stockbaghi, Rashid. (2012). A comparison of the Monte Carlo simulation methods and finite differences in the valuation of discrete double-ended dummy transactions. *Third Conference on Mathematical Finance and Applications, Tehran, 12-21*. (in Persian)
- 11) Sarvestani, Khadija., Soleimani, Ebrahimi. (2012). Binomial tree method for pricing Asian options in jump model. *Third Conference on Mathematical Finance and Applications, Tehran, 8-13*. (in Persian)
- 12) Khaki, G. (2012). *Research method with a thesis approach* (3rd ed.). Tehran, Iran: Baztab Publishing House. (in Persian)

- 13) Hall, John. (1388). "Fundamentals of Financial Engineering and Risk Management". Translation by Sajjad Seyah and Ali Saleh Abadi, Tehran, Second Edition, Brokerage Company. (in Persian)
- 14) Delawar, A. (1994). *Research methods in psychology and educational sciences* (5th ed.). Tehran, Iran: Payame Noor University Press and Publishing Center. (in Persian)
- 15) Alghalith, M. (2018). Pricing the American options using the Black-Scholes pricing formula. *Physica A*, 443 -450.
- 16) Sturm, Matthew., Goldstein, Henry. Huntington, Thomas. (2017). Using the pricing model approach to assess strategic decisions in turbulent environments: Black Scholes and airborne changes. *Climatic Change*, 2, 437-449.
- 17) Ivanov, Roman. (2015). The maximum gamma-ray variance distribution process and the pricing path of the options. *European Finance*, 2, 979-993.
- 18) Alghalith, Moawia. (2014). Pricing options: A very simple formula. *Dorsoduro*, 20(2), 71-73.
- 19) Kumar, S., Kumar, D., & Singh, J. (۲۰۱۴). Numerical computation of fractional Black-Scholes equation arising in financial market. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 1(3-4), 177-183.
- 20) Hemantha, Amershi. (2013). Pricing the option of expanding crack with capsules". *European Finance*. 37(1), 100-121.
- 21) Kumar, Vipul. (2013). Experimental competition in pricing options. *School of Management*, Volume, 19(2), 129-156.
- 22) Li, S. (2012). The implicit cost of interactions by the pricing model of lelend's powers. *Mathematical sciences*, 18(4), 333-360.
- 23) Jean-Pierre, P., Tashman, Adam. (2012). Option pricing under the beta stress model. *Semantic Scholar*, 183-20.
- 24) Meng, Li., Wang, Mei. (2010). Comparison of the Beckhelsell formula with the frequency Black-Scholes formula in the exchange derivatives market by changing the oscillation. *Basic and Applied Sciences*, 99-111.
- 25) Ahn, J., Kang, S., & Kwon, Y. H. (2010). A Laplace transform finite difference method for the Black-Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, volum 5, 247-255.
- 26) Bohner, M., & Zheng, Y. (2009). On analytical solutions of the Black-Scholes equation. *Applied Mathematics Letters*, 22(3), 309-313.
- 27) Madan, mark. (2008). Combination of Black Schulz formulas with Brownian motion and limited connections. *Applied Mathematics*, 15(2), 97-115.

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

- 28) Broadie, mark., Jain, Ashish. (2008). Key variables fluctuations in pricing models of transaction options and risk management. *Economics and Organization*, 7(4), 7-24.
- 29) Christoffersen, peter., Jacobs, kris., Ornthanalai, Chayawat. (2008). Option Valuation with Long-Run and Short-Run Volatility Components. *Journal of Financial Economics*, Vol. 90, No. 3, pp. 272-297
- 30) Chen, Xu., Wan, Jian-ping. (2007). Pricing options to change the route of the Levy model under the MEM. *Mathematical Statistics*, 23(4), 651-664.
- 31) Olga, Shishkina. (2007). The approximation of solutions and derivatives to the Black-Scholes equation doubles with unhealthy initial data. *Engineering Sciences*, 47(3), 442-462.
- 32) Christoffersen, Jacobs and Ornthanalai. (2008). "Determine the price of the transaction option with the short-term and long-term volatility components". *A Profesional development*, PP 8-15.
- 33) Xu Chen. Jian-ping Wan. (2007). "Pricing options to change the route of the Levy model under the MEM". *Mathematical Statistics*, vol 23, issue 4, pp 651 -664.
- 34) S. LiG. I. ShishkinL. P. Shishkina. (2007). "The approximation of solutions and derivatives to the Black-Scholes equation doubles with unhealthy initial data". *Engineering Sciences*, Volume 47, Issue 3, pp 442-462.

پی نوشت: الف

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$f''(s) + \frac{2r}{\delta^2} f'(s) - \frac{2r}{s^2} f(s) = 0, \quad (\text{الف} - ۱)$$

با معرفی تغییر متغیر زیر:

$$f(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} u(s), \quad (\text{الف} - ۲)$$

و با مشتق گیری اول و دوم از رابطه (الف - ۲) داریم:

$$f'(s) = -\frac{r s^{-1-\frac{r}{\delta^2}}}{\delta^2} u(s) + s^{-\frac{r}{\delta^2}} u'(s), \quad (\text{الف} - ۳)$$

$$f''(s) = -\frac{r s^{-2-\frac{r}{\delta^2}} \left(-1 - \frac{r}{\delta^2}\right)}{\delta^2} u(s) - \frac{2r s^{-1-\frac{r}{\delta^2}}}{\delta^2} u'(s) + s^{-\frac{r}{\delta^2}} u''(s), \quad (\text{الف} - ۴)$$

با جایگذاری روابط (الف - ۲) ، (الف - ۳) و (الف - ۴) در معادله (الف - ۱) داریم:

$$u''(s) - \frac{b}{s^2} u(s) = 0, \quad (\text{الف} - ۵)$$

که

$$b \equiv \frac{r(r + \delta^2)}{\delta^4}, \quad (\text{الف} - ۶)$$

با استفاده از روش نیکی وورو - اواروف که در ضمیمه ب توضیح می دهیم؛ می توان تابع $u(s)$ رابطه

(الف - ۵) را با استفاده از تعریف پارامترهای زیر محاسبه کنیم.

قیمت گذاری اوراق اختیار معامله با کمک .../ابوالی، خلیلی عراقی، حسن آبادی و یعقوب نژاد

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{b}{4},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{4}, \alpha_5 = \alpha_6 = \alpha_7 = 0, \alpha_8 = \frac{[1+4b]}{16}, \quad \text{الف - ۷}$$

$$\alpha_9 = 0, \alpha_{10} = \frac{1}{2} [2 + \sqrt{1+4b}], \alpha_{11} = 0,$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{4} [1 + \sqrt{1+4b}], \alpha_{13} = 0.$$

با استفاده از روابط (الف - ۷) و به دلیل اینکه $\alpha_3 = 0$ تابع موج معادله (الف - ۵) به فرم زیر به دست می‌آید.

$$u(s) = (s^2)^{\frac{1}{4}[1+\sqrt{1+4b}]} L_n^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4b}}(0). \quad \text{الف - ۸}$$

که $ln_n^m(x)$ تابع لاگر وابسته‌اند و $ln_n^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4b}}(0) = 1$ است. سپس رابطه (الف - ۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$u(s) = (s^2)^{\frac{1}{4}[1+\sqrt{1+4b}]}, \quad \text{الف - ۹}$$

با جایگذاری روابط (الف - ۹) در رابطه (الف - ۲) داریم:

$$f(s) = s^{-\frac{r}{\delta^2}} s^{\frac{1}{2}[1+\sqrt{1+4b}]}. \quad \text{الف - ۱۰}$$

پی‌نوشت ب: روش نیکی‌وورو - اواروف^{۵۲}

در این روش، معادله دیفرانسیل مرتبه دوم از نوع فوق هندسی یا یک معادله شرودینگر گونه معمول به صورت زیر است:

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\lambda_1 s^2 + \lambda_2 s - \lambda_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \psi_n(s) = 0. \quad \text{ب - ۱}$$

برای محاسبه توابع موج و ویژه مقادیر انرژی از این روش استفاده می‌کنیم:

فصلنامه مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار / شماره چهل و چهارم / پائیز ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), \quad \alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3), \quad \alpha_6 = \alpha_5^2 + \lambda_1, \quad \alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \lambda_2, \\ \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \lambda_3, \quad \alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6, \quad \alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \\ \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \\ \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad \alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \end{aligned} \quad (\text{ب} - ۲)$$

با استفاده از این مجموعه از پارامترها طیف انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha_2 N - (2N + 1)\alpha_5 + (2N + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + N(N - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0. \quad (\text{ب} - ۳)$$

سپس با استفاده از این روش تابع موج به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_N^{\left(\alpha_{10} - 1, \frac{\alpha_{11} - \alpha_{10} - 1}{\alpha_3}\right)} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (\text{ب} - ۴)$$

اگر $\alpha_3 = 0$ باشد؛ رابطه‌ی (ب - ۴) به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_N^{\alpha_{10} - 1}(\alpha_{11}s). \quad (\text{ب} - ۵)$$

یادداشت‌ها:

-
- 1 JEL
 - 2 Fisher Black
 - 3 Robert Merton
 - 4 Myron Scholes
 - 5 Ahn J, Kang S, Kwon YH
 - 6 Nikki Voro - Ovarov
 - 7 Henry Lobugh
 - 8 John Hall
 - 9 Louise Bachelier
 - 10 Kruisenga
 - 11 Adhoc Econometric Models
 - 12 Alghalith M
 - 13 Kassouf
 - 14 Robustness
 - 15 Sustainability

-
- 16 Geometric method
 - 17 Jacobi Method
 - 18 Legendre's Method
 - 19 Frobenius method
 - 20 Matthew Starm, Thomas Hunstantin and Douglas
 - 21 Soastkitch
 - 22 Roman and Ivanov
 - 23 Moawia Alghalith
 - Hemantha S. B. HerathEmail authorPranesh KumarAmin H. Amershi24
 - Crack spread option pricing with copulas25
 - 26 Clayton
 - 27 Steven Li
 - 28 Leland option pricing model
 - 29 -Jean-Pierre P. Tashman
 - 30 regime-switching mechanism
 - 31 Li MengMei Wang
 - 32 Fractional
 - 33 Doodo and Skylight
 - 34 D. Madan
 - 35 Christopherson et al
 - 36 Engle and Lee
 - 37 Heston and Nandi
 - 38 Zhucheng and Jian Ping Wan
 - 39 Lévy Model Under Memm
 - 40 Martigal Entropy
 - 41 Alargando
 - 42 Heston Stochastic Volatility Model
 - 43 Longstaff FA & Schwartz ES
 - 44 Mathematica
 - 45 SPSS
 - 46 Call Option
 - 47 Put Option
 - 48 Hemantha, Amershi
 - 49 Christoffersen and Jacob
 - 50 Madan
 - 51 V. L. Khatskevich
 - 52 A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, Special Functions of Mathematical Physics, Birkhäuser, Basel 1988.