مقایسه دو روش اجزاء پراکنده و بدون جزء گالرکین در حل عددی مسأله بوسینسک در خاک

محمد مهدی احمدی[i]; علی نعمتی حیاتی[ii]

چکیده

بیش از یک دهه است که روشهای بدون جزء (Meshless) مورد توجه ویژه‌ای در حل مسائل در مهندسی و علوم قرار گرفته‌اند. عمده تفاوت این روشها با روش اجزاء محدود در توابع شکل آنها می‌باشد. در این میان، در روش اجزاء پراکنده (Diffuse Element Method) از تقریب حداقل مربعات (LS) و در روش بدون جزء گالرکین (Element-Free Galerkin Method) از تقریب حداقل مربعات متحرک (MLS) جهت تشکیل توابع شکل استفاده می‌شود. برای مقایسه تحلیل انجام شده به این دو روش در یک محیط خاکی، مسأله بوسینسک که دارای جواب تحلیلی است مورد توجه قرار گرفته است و جوابهای بدست آمده در حوزه تغییرشکل‌ها و تنشها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نتایج بر این واقعیت تأکید دارند که خطای روش اجزاء پراکنده در هر دو حوزه مورد بررسی بیشتر از روش بدون جزء گالرکین می‌باشد. این خطا در حوزه تنشها به‌دلیل ثابت فرض شدن تابع وزنی در روش اجزاء پراکنده به‌طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر است.

کلمات کلیدی: روشهای بدون جزء، روش بدون جزء گالرکین، روش اجزاء پراکنده، تقریب حداقل مربعات، تقریب حداقل مربعات متحرک، مسأله بوسینسک

---

[i] استادیار گروه ژئوتکنیک، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف: mmahmadi@sharif.edu

[ii] دانشجوی دکترای ژئوتکنیک، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف: alinhayati@civil.sharif.edu

۱- مقدمه

نیرولز و همکاران [۱] در سال ۱۹۹۲ روش بسیار جالب و امیدوارکننده‌ای را ارائه دادند که آن را "روش اجزاء پراکنده " نامیدند. در این روش تنها با استفاده از شبکه‌ای از گره‌ها و تعریف یک مرز برای مدل می‌توان روابط گالرکین را استخراج نمود. توابعی که به‌منظور تقریب زدن در این روش استفاده می‌شوند، توابع چندجمله‌ای هستند که به روش "حداقل مربعات " مقادیر گرهی را تخمین می‌زنند. در این روش به شبکه اجزاء محدود نیازی نیست.

هر چند توسط نیرولز و همکاران او عنوان نشد، توابع تقریبی که آنها در روش خود به کار بردند قبلاً توسط لانکستر و سالکوکاس [۲]، مکلین، گردون، ویکسوم و بارنهیل ابداع و به نام توابع تقریب حداقل مربعات متحرک در برازش منحنی و سطح مورد مطالعه قرار گرفته بود.

تقریب حداقل مربعات متحرک که از این پس به اختصار MLS نامیده می‌شود، در گره‌ها دارای مقدار برابر واحد نیست؛ یا به عبارت دیگر از داخل گره‌ها نمی‌گذرد، مگر آنکه توابع وزنی مورد استفاده منفرد باشند. روش گالرکین با تقریب MLS در سال ۱۹۹٤ توسط بلیشکو و

همکارانش [۳] با انجام اصلاحاتی، "روش بدون جزء گالرکین " نام گرفت که به اختصار روش EFG نامیده می‌شود.

در مقاله حاضر، دو روش اجزاء پراکنده و بدون جزء گالرکین در حل عددی مسأله بوسینسک در خاک مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. با توجه به در دسترس بودن جواب تحلیلی برای مسأله فوق، مقادیر تغییرشکل و تنش بدست آمده در اعماق مختلف در دو روش مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در ادامه، جهت جلوگیری از اشتباه، از حروف توپر برای نمایش بردارها و ماتریس‌ها استفاده شده است.

۲- تقریب حداقل مربعات (LS) و حداقل مربعات متحرک (MLS)

فرض کنیم تابع u (x) در محدوده Ω تعریف شده باشد. در روش MLS تقریب تابع فوق در نقطه x با uh(x) بیان و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u^h(x)=\sum_{j}^{m}p_j(x)a_j(x)=P^T(x)a(x) \qquad (1)$$

که p1(x)=1 و pj(x) ها تک جمله‌ای‌هایی در مختصات فضایی xT=[x,y,z] هستند بطوریکه یک بردار پایه کامل را تشکیل می‌دهند. تابع پایه خطی در فضای دو بعدی به‌صورت زیر بیان می‌شود .

$$P^T(x)=[1,x,y], m=3 \qquad (2)$$

بردار ضرایب a(x) در رابطه (۱) با استفاده از مقدار تابع در مجموعه‌ای از گره‌های دامنه Ω که در دامنه حمایتی نقطه x قرار دارند تعیین می‌شود. دامنه حمایتی نقطه x عبارت است از گره‌هایی از دامنه Ω که برای تقریب زدن تابع u(x) در نقطه x از آنها استفاده می‌شود. این تقریب با uh(x) نمایش داده می‌شود.

بردار ضرایب a(x) باید بگونه‌ای تعیین شود که مربع تفاضلات مقادیر گرهی و مقادیر تقریب زده شده گرهی به‌صورت وزندار، که با J نشان داده می‌شود، برابر مینیمم شود.

$$J=\sum_{I}^{n}w(x-x_I)[u^h(x)-u_I]^2 \qquad (3)$$

با توجه به رابطه (۱) مقدار تابع uh(x) در گره‌ها برابرست با:

$$x=x_I \Rightarrow u^h(x,x_I)=P^T(x_I)\,a(x),\quad I=1,2,\dots,n \qquad (4)$$

که بدین ترتیب رابطه (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$J=\sum_{I}^{n}w(x-x_I)[P^T(x_I)a(x)-u_I]^2 \qquad (5)$$

که n تعداد گره‌های موجود در دامنه حمایتی x می‌باشد که در آنها $w(x-x_I)\neq 0$ است. $w(x-x_I)$ تابع وزنی و uI مقدار گرهی u در x=xI می باشد.

مینیمم کردن J در رابطه (۵) و مشتق‌گیری نسبت به a(x) منجر به رابطه خطی زیر بین a(x) و uI می‌شود:

$$\frac{\partial J}{\partial a}=0 \Rightarrow A(x)\,a(x)=B(x)\,U_s \qquad (6)$$

یا

$$a(x)=A^{-1}(x)B(x)\,U_s \qquad (7)$$

که Us برداری است که مؤلفه‌های گرهی گره‌های موجود در دامنه حمایتی را در بر دارد:

$$U_s=[u_1,u_2,\dots,u_n]^T \qquad (8)$$

A(x) ماتریس گشتاور وزندار[1] است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A=\sum_{I=1}^{n}w(x-x_I)\,P(x_I)\,P^T(x_I) \qquad (9)$$

و B(x) ماتریسی است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_I=w(x-x_I)P(x_I) \qquad (10)$$

با جایگزینی رابطه (۷) در رابطه (٤) بدست می‌آید:

$$u^h(x)=\sum_{I=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{jI}\,u_I=\sum_{I=1}^{n}\varphi_I(x)\,u_I \qquad (11)$$

که تابع شکل $\varphi_I(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi_I(x)=\sum_{j=1}^{m}p_j(x)(A^{-1}(x)B(x))_{jI}=P^TA^{-1}B_I \qquad (12)$$

در روابط بالا m تعداد جملات پایه p(x) می‌باشد که معمولاً بسیار کوچکتر از n (تعداد گره‌های موجود در دامنه حمایتی) است و به همین دلیل ماتریس A معکوس‌پذیر است و در نتیجه A^{-1} وجود خواهد داشت.

رابطه (۱۱) را می توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

---

1 weighted moment matrix

$$u^h(x) = \Phi(x) U_s \qquad (۱۳)$$

که

$$\Phi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)] \qquad (۱٤)$$

با توجه به اینکه در محاسبات مربوط به تنش و کرنش نیاز به مشتق نسبی مرتبه اول تابع شکل می‌باشد، محاسبه آن به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Phi^T_{I,k} &= (P^T A^{-1} B_I)_{,k} \\ &= P^T_{,k} A^{-1} B + P^T A^{-1}_{,k} B + P^T A^{-1} B_{,k} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که $A^{-1}_{,k} = -A^{-1} A_{,k} A^{-1}$ اندیس k که بعد از کاما آمده است، بیانگر مشتق مکانی است.

باید گفت که تابع تقریب زده شده بوسیله رابطه (۱۳) حتی در صورتیکه توابع پایه P(x) از نوع چندجمله‌ای باشند نیز به‌صورت چندجمله‌ای نیست. اما در صورتیکه u(x) چندجمله‌ای از درجه P(x) باشد، مقدار تقریب زده شده با رابطه uh(x) در گره‌ها با مقدار دقیق برابر خواهد شد. علاوه بر آن، در صورتیکه تابع وزنی w(x-xI) به همراه t مشتق اولیه آن پیوسته باشند، تابع شکل $\varphi_I(\mathbf{x})$ نیز با t مشتق اولیه آن پیوسته خواهد بود.

تفاوت تقریب حداقل مربعات و تقریب حداقل مربعات متحرک در تابع وزنی بکار رفته در آنهاست؛ بدین ترتیب که در تقریب LS از تابع وزنی با مقدار ثابت استفاده می‌شود؛ درحالیکه در تقریب MLS، تابع وزنی اکیداً نزولی است و با دور شدن از گره، مقدار آن کاهش می‌یابد.

درونیاب‌های استاندارد حداقل مربعات با انتخاب تابع وزنی ثابت در کل دامنه مسأله بدست می‌آیند که با این کار تمام مجهولات مسأله به‌طور کامل دخیل می‌شوند. در صورتیکه محدوده کوچکی برای دامنه تأثیر تابع وزنی در نظر گرفته شود ماتریس سختی مسأله به‌صورت پراکنده[1] در خواهد آمد.

قابل ذکر است که تابع شکل روش اجزاء محدود استاندارد را می‌توان با تعریف تابع وزنی برای هر جزء بدست آورد.

دو ویژگی اصلی تقریب MLS که موجب کاربرد زیاد آن می‌شوند عبارتند از:

تابع تقریب زده شده در کل محدوده مسأله پیوسته و دارای شیب پیوسته است.

قابلیت تقریب با درجه سازگاری دلخواه را دارا می باشد (با انتخاب درجات مختلف توابع پایه).

۳- فرمول‌بندی روش اجزاء پراکنــده و بــدون جزء گالرکین

در اینجا برای نشان دادن نحوه فرمول‌بندی معادلات گسسته سیستم در یک مسأله دارای تقارن محوری، یک مسأله خطی مکانیک جامدات در فضای دوبعدی در نظرگرفته می‌شود. معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی و شرایط مرزی برای مسأله دوبعدی مکانیک جامدات به‌صورت زیر بیان می‌شود:

رابطه تعادل در دامنه مسأله Ω:

$$L^T \sigma + b = 0 \qquad (۱٦)$$

شرایط مرزی تکیه‌گاهی روی مرز Γ_u:

$$u = \bar{u} \qquad (۱۷)$$

شرایط مرزی طبیعی (مرزهای اعمال بار) با رابطه زیر بیان می‌شوند:

روی مرز اعمال بار سطحی Γ_t:

$$\sigma n = \bar{t} \qquad (۱۸)$$

که L عملگر دیفرانسیلی، σ تانسور تنش، u بردار تغییرشکل، b بردار نیروی جرمی، $\bar{t}$ بردار نیروی سطحی، $\bar{u}$ تغییرمکان اولیه مرزهای تکیه‌گاهی و n بردار واحد عمود بر مرز اعمال نیروی سطحی می‌باشد.

با استفاده از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی، رابطه بابنو-گالرکین را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\Pi = 2\pi \left(\frac{1}{2}\int_\Omega (Lu)^T . D_e . (Lu) \ .r \, d\Omega - \int_\Omega u^T . b \ .r \, d\Omega \right.$$
$$\left. - \int_{\Gamma_t} u^T . \bar{t} \ .r \, d\Gamma\right) - \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2}(u - \bar{u})^T . \alpha (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \qquad (۱۹)$$

که α ماتریس قطری دربردارنده ضرایب پنالتی، Lu تانسور تنش و De ماتریس مشخصه مصالح می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۹) و انجام یک سری محاسبات جبری، روابط گسسته کل را می‌توان به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\left[K + K^\alpha\right] U = F + F^\alpha \qquad (۲۰)$$

[1] sparse

$$K_{IJ} = 2\pi \int_{\Omega} B_I^T D_e B_J . r \, d\Omega \tag{۲۱}$$

$$B_I = L\Phi_I = \begin{bmatrix} \varphi_{I,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{I,y} \\ \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} \\ \frac{\varphi_I}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

$$\Phi_I = \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 \\ 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

$$f_I = 2\pi \left(\int_{\Omega} \Phi_I^T b . r \, d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{t} . r \, d\Gamma \right) \tag{۲٤}$$

$$K_{IJ}^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \Phi_J d\Gamma \tag{۲۵}$$

$$F_I^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \alpha \bar{u} d\Gamma \tag{۲٦}$$

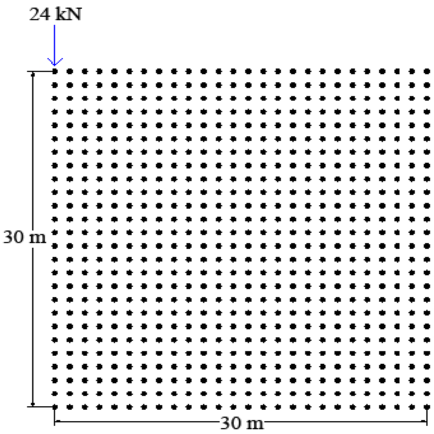
در روابط بالا، اندیسهای x, و y, نشان دهنده مشتق مکانی نسبت به x و y هستند.

٤- حل عددی مسأله بوسینسک

بوسینسک [٤] با استفاده از تئوری ارتجاعی روابطی را ارائه کرد که با استفاده از آنها می‌توان تنشها و تغییرشکل‌ها را در یک توده نیمه‌بینهایت الاستیک تحت بار نقطه‌ای وارد بر سطح محاسبه کرد. این روابط که به روابط بوسینسک مشهورند، در محاسبه نشست آنی پی‌ها تحت بار متمرکز در مهندسی پی کاربرد دارند.

با توجه به سه‌بعدی بودن مسأله و تقارن آن نسبت به راستای اعمال بار نقطه‌ای، می‌توان مسأله را با مدلسازی یک نیمه آن، با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری، به‌صورت دوبعدی تحلیل کرد.

ابعاد هندسه مدل برابر ۳۰×۳۰ متر می‌باشد که تحت بار نقطه‌ای ٢٤ کیلونیوتن قرار دارد. شبکه گرهی شامل ٦٧٦ گره می‌باشد که در فواصل افقی و قائم یکسان و برابر ۱/۲ متر از یکدیگر قرار گرفته‌اند (شکل ۱). شرایط تکیه‌گاهی مسأله بگونه‌ای هستند که گره‌های واقع بر مرز پایین مدل در دو جهت افقی و قائم مقید شده‌اند. مدول الاستیسیته مصالح برابر ٤٠ مگاپاسکال و ضریب پواسون آن برابر ۰/۳ انتخاب شده است.



شکل (۱): شبکه گرهی

شبکه‌ای که به منظور انتگرالگیری معادلات گسسته کل استفاده می‌شود، منظم و دارای ٦٢٥ المان است که رئوس آن منطبق بر گره‌ها می‌باشند. تعداد نقاط گوسی در هر سلول شبکه انتگرالگیری برابر ٤ و نسبت تعداد نقاط گوسی به تعداد گره‌ها برابر ۳/۷ می‌باشد که حداقل تعداد لازم برای دستیابی به جواب قابل قبول را طبق مرجع [٥] برآورده می‌سازد.

در اینجا در تحلیل EFG از تابع وزنی اسپیلاین درجه ۳ که یک تابع آزمایش شده و بسیار مورد استفاده می‌باشد [٥]، استفاده می‌شود که رابطه آن به‌صورت زیر است:

$$w(x - x_I) \equiv w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \le \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \le 1 \end{cases} \tag{۲۷}$$

در روابط بالا

$$\bar{d} = \frac{|x - x_I|}{d_w} = \frac{d}{d_w} \tag{۲۸}$$

که d_w همان دامنه تأثیر تابع وزنی است و محدوده‌ای که در آن تابع وزنی مخالف صفر است را مشخص می‌کند. در حالت کلی d_w می‌تواند از نقطه‌ای به نقطه دیگر متفاوت باشد.

با استفاده از دامنه تأثیر مستطیلی برای گره‌ها، می‌توان نوشت:

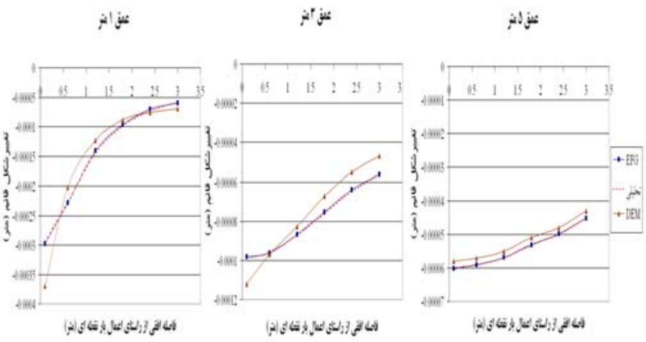
$$d_w = D_{max} \times c_I \tag{۲۹}$$

که cI فاصله گره‌ها و D_{max} ضریب تأثیر می‌باشد.

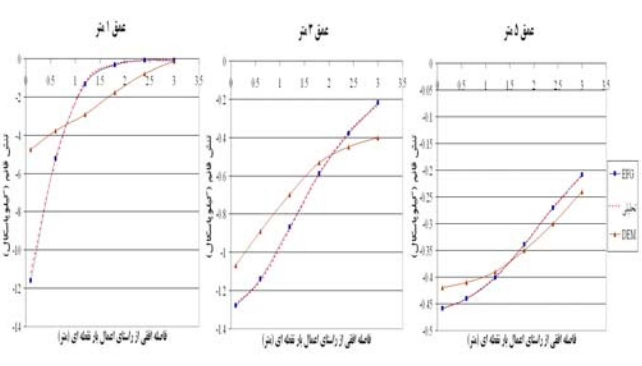
تابع وزنی مورد استفاده در روش DEM، همانطور که در

مورد درونیاب‌های LS گفته شد، در کل دامنه مسأله ثابت و برابر $w(x-\bar{x})=1$ انتخاب شده است.

به‌منظور تحلیل مسأله بوسینسک به دو روش شرح داده شده، یک برنامه کامپیوتری به زبان فرترن نوشته شد. نتایج بدست آمده از تحلیل‌ها برای تغییرشکل‌ها و تنشهای نقاط واقع در اعماق ۱، ۳ و ۵ متری از سطح به ترتیب در شکلهای ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند. همانطور که در این شکلها ملاحظه می‌شود، روش EFG جوابهای بسیار دقیقتری نسبت به روش DEM می‌دهد که این مطلب در مورد تنشها بارزتر است. دلیل این موضوع را باید در توابع شکل بکار رفته در این دو روش جستجو کرد. در روش اجزاء پراکنده ارائه شده توسط نیرولز، با توجه به استفاده از تقریب LS، تابع $a(x)$ ثابت فرض شده و از عبارت $P^T A^{-1}_{,k} B + P^T A^{-1} B_{,k}$ در رابطه (۱۵) صرفنظر شده است. همانطور که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، در نظر نگرفتن تغییرات مکانی $a(x)$ بطور قابل توجهی از دقت روش، خصوصاً در حوزه تنشها می‌کاهد که این عیب روش اجزاء پراکنده در روش بدون جزء گالرکین، با متغیر بودن تابع وزنی و در نظر گرفتن عبارت فوق، برطرف شده است.



شکل (۲): تغییرشکل‌های قائم در اعماق ۱، ۳ و ۵ متری از سطح



شکل ۳: تنشهای قائم در اعماق ۱، ۳ و ۵ متری از سطح

۵- خلاصه و نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، دو روش بدون جزء گالرکین و اجزاء پراکنده که هر دو روش از جمله روشهای بدون جزء هستند، با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفتند. با توجه به اینکه در روشهای بدون جزء از شبکه اجزاء برای تشکیل توابع شکل استفاده نمی‌شود، یکی از موارد عمده تفاوت این روشها با یکدیگر در نحوه تشکیل تابع شکل می‌باشد. در روش اجزاء پراکنده از توابع شکل مبتنی بر تقریب حداقل مربعات، و در روش بدون جزء گالرکین از تقریب حداقل مربعات متحرک استفاده می‌شود. دو روش یاد شده در حل عددی مسأله بوسینسک که دارای جواب تحلیلی است مورد مقایسه قرار گرفتند. نمودارهای بدست آمده بیانگر این بودند که جوابهای بدست آمده از روش اجزاء پراکنده دارای دقت بسیار کمتری، خصوصاً در حوزه تنشها، نسبت به روش بدون جزء گالرکین هستند که این به دلیل ثابت بودن تابع وزنی و در نتیجه صرفنظر شدن از بعضی عبارات در رابطه مربوط به مشتق تابع شکل در روش اجزاء پراکنده می‌باشد.

۶- مراجع

1- B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, 1992, "*Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse element*", Comput. Mech., Vol. 10, 307-318

2- P. Lancaster, K. Salkauskas,1981, "*Surfaces generated by moving least squares methods*", Math. Comput., Vol. 37, 141-158

3- T.Belytschko, Y.Y. Lu and L. Gu, 1994, "*Element-Free Galerkin Methods*", International journal for numerical methods in engineering, Vol. 37, 229-256

4- Boussinesq, J., 1854, "*Application des potentials a letude de lequilibre de movement des solides elastiques. Ed.Gauthier-Villars*", Paris

5- G.R. Liu, 2002, "*Mesh free methods: moving beyond the finite element method*", CRC Press LLC

6- S.P. Timoshenko & J.N. Goodier, 1970, "*Theory of Elasticity, 3rd ed.*", McGraw-Hill

7- R.W. Clough & Y.R. Rashid, 1965, "*Finite element analysis of axi-symmetric solids*", Proc. ASCE, 91, EM.1, 71