

## تعیین سیاست بهینه در کنترل وضعیت با استفاده از تغییرات مومنتم زاویه‌ای

محسن رضایی<sup>۲</sup>

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا، گروه مهندسی هوافضا

سید حسین پورتاکدوست<sup>۱</sup>

دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی هوافضا

### چکیده

یکی از مانورهایی که یک ماهواره باید توانایی انجام آن را داشته باشد تغییر جهت‌گیری ماهواره و یا به عبارتی محورهای دستگاه بدنی آن نسبت به یک دستگاه مرجع می‌باشد. این مانور با استفاده از گشتاورهای کنترلی مناسب و با بهره‌گیری از مکانیزم چرخ‌های عکس‌العملی<sup>۳</sup> امکان‌پذیر است. سیستم مورد نظر یک سیستم چندمتغیره و غیرخطی است و معادلات حاکم بر حرکت دورانی ماهواره کوپله هستند که موجب پیچیده شدن مسأله می‌شود. در این مقاله با استفاده از ایده RHC<sup>۴</sup> افق زمانی مسأله بتدریج حرکت کرده و در هر مرحله معادلات حول حالت جاری خطی‌سازی شده و با کمک روش LQR<sup>۵</sup> و ایده RHC دستور کنترلی مناسب برای بازه زمانی مورد نظر تولید می‌گردد. استفاده از این روش موجب کنترلی حلقه بسته که دارای مقاومت خوبی در مقابل اغتشاشات بوده و قابل اعمال به یک سیستم غیرخطی می‌باشد شده است.

واژه‌های کلیدی: کنترل وضعیت ماهواره، LQR، RHC، کنترل بهینه، چندمتغیره، غیرخطی

## Determination of Optimal Attitude Control Law Utilizing Angular Momentum

H. Pourtakdust

Aerospace Eng. Dep't, Sharif Univ  
of Tech., Tehran, Iran

M. Rezaei

Mechanical and Aerospace Eng. Dep't, Science  
and Research Branch, Islamic Azad Univ.,  
Tehran, Iran

### ABSTRACT

One of the required maneuvers of remote sensing satellites is the pointing or reorientation maneuver of its body axes toward a reference direction. This maneuver can be accomplished using control torques from a tri-axes reaction wheel mechanism with an appropriate control law. The satellite attitude governing equations are usually categorized as multivariable nonlinear coupled system, which makes the design of a control law complicated. In this article the Receding Horizon Control (RHC) idea is utilized to design an optimal control policy through a step by step linearization approach. Where in each step the nonlinear equations are locally linearized around the current state to form a linear quadratic regulator (LQR) problem, for which the required optimal feedback control matrix can be determined by solution of the Ricatti equation. This approach of solution leads to a closed loop control that brings about some robustness against environmental and or system disturbances present in a typical satellite system.

**Key Words:** Attitude control, Receding Horizon Control, Optimal Control, Multivariable, Nonlinear

۱- استناد: pourtak@sharif.edu

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد (نویسنده پاسخگو): m.rezaei@srbiau.ac.ir

<sup>۳</sup> Reaction Wheel

<sup>۴</sup> Receding Horizon Control

<sup>۵</sup> Linear Quadratic Regulator

## ۱- مقدمه

۱۴]. در این مقاله نیز بازه زمانی مانور ثابت و مدت آن ۴۵ ثانیه در نظر گرفته شده است.

این مقاله در چهار فصل تنظیم شده است. بعد از این فصل معرفی کوتاهی در مورد روش LQR و همچنین الگوریتم RHC داده شده است. فصل ۳ شامل معادلات حاکم بر ماهواره، تابع هزینه و چگونگی بهینه سازی آن و در نتیجه بدست آوردن قانون کنترلی می باشد. نتایج و مزایای این روش در فصل ۴ مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲- روش LQR و الگوریتم RHC

## ۲-۱- روش LQR

روش کنترل بهینه خطی درجه دو (LQR) یکی از مسائل معروف و پایه‌ای در تئوری کنترل بهینه است. چندین دهه تحقیقات بسیاری تلاش کرده‌اند تا اصول کنترل LQR را تدوین کنند [۱۵-۱۷]. در روش LQR با تعریف یک معیار عملکرد استاندارد، تابع هزینه‌ای تولید می‌شود که در رابطه (۱) و (۲) قابل مشاهده است. سیاست کنترلی بهینه در جهتی ایجاد می‌شود که بتواند این تابع را کمینه کند. این تابع به صورت پیوسته و گسسته قابل تعریف است:

$$J = \frac{1}{2} X^T(t_f) H X(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} [X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t)] dt \quad (1)$$

$$J = \frac{1}{2} X^T(N) H X(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [X^T(k) Q(k) X(k) + U^T(k) R(k) U(k)] \quad (2)$$

در این رابطه  $H$ ،  $Q$  و  $R$  ماتریس‌های وزنی هستند که مقادیر آنها بستگی به اهمیت نسبی کنترل حالت‌های سیستم دارد. در الگوریتم LQR مایل هستیم که تعدادی یا تمامی متغیرهای حالت سیستم به صفر همگرا شوند. به تناسب اهمیتی که هر متغیر حالت، جهت صفر شدن دارد مقادیر درایه‌های ماتریس‌های وزنی  $H$ ،  $Q$  و  $R$  تعریف و طراحی می‌شوند. بدین صورت که هر متغیر حالتی که دارای اهمیت بیشتری به منظور صفر شدن است درایه متناظر آن در ماتریس‌های وزنی بزرگتر و در نتیجه فاصله آن از صفر هزینه بیشتری را تولید می‌کند. بنابراین الزاماً دستور کنترلی به گونه‌ای ایجاد می‌شود که حالت مورد نظر کمترین هزینه ممکن را تولید کند. در این روش دستورات کنترلی بر مبنای

غالباً نسل فعلی ماهواره‌ها و فضاپیماها نیازمند سیستم‌های کنترل وضعیت<sup>۱</sup> می‌باشند تا وظایفی مانند مانور وضعیت و پیگردی<sup>۲</sup> را بتواند انجام دهند. این مأموریت مبتنی است بر، دنباله‌ای از مانورهای چرخشی، حول هر کدام از محورهای کنترلی که دوران مطلوب را ایجاد می‌کنند. مانور وضعیت با زوایای بزرگ که سریع و با صرف انرژی بهینه باید صورت پذیرد، به طور فزاینده‌ای جهت انجام موفقیت آمیز مأموریت‌های تعریف شده برای ماهواره‌ها و فضاپیماهای کنونی و آینده دارای اهمیت شده است. متعاقباً تحقیقات اخیر در مورد مانور وضعیت ماهواره‌ها با به کارگیری رویکرد کنترل بهینه مورد توجه قرار گرفته است. تئوری کنترل بهینه برای کنترل ماهواره‌های صلب از تمایل به کنترل اجسام صلب ناشی شده است. ورود اصلی این تحقیقات به طور خاص در جهت بهینه سازی سوخت و زمان صورت گرفته است که در مراجع [۱-۶] نمونه‌هایی از آنها قابل مشاهده می‌باشد.

در زمینه کنترل یک فضاپیما با حداقل مصرف انرژی، سی‌والد<sup>۳</sup> و دیگران [۷] راه حلی را برای جهتگیری با مصرف بهینه سوخت برای یک فضاپیما صلب و متقارن با سه محور مستقل کنترل مورد بررسی قرار داده‌اند. ودلی<sup>۴</sup> و جانکینز<sup>۵</sup> [۴] به جهتگیری یک فضاپیما صلب و غیر متقارن با چرخ-های عکس‌العملی متعدد پرداخته‌اند که در آن از یک انتگرال از توابع وزن‌دار درجه دو بر روی فعالیت‌های کنترلی به عنوان تابع هزینه استفاده کرده‌اند.

در عمل، محدوده ورودی‌های کنترلی در اجرا باید در نظر گرفته شود. به طور کلی، حل مسائل کنترل بهینه با فعالیت‌های کنترلی محدود برای ماهواره‌ها یا فضاپیماهای متقارن و نامتقارن با استفاده از اصل پونتریاگن<sup>۶</sup> انجام می‌گردد [۸]. برای پیدا کردن دستورات کنترلی این گونه مسائل کنترل بهینه در مقالات بسیاری، از کمینه کردن یک تابع هزینه در یک بازه زمانی ثابت استفاده می‌کنند [۴، ۹-۹].

<sup>1</sup> Attitude Control

<sup>2</sup> Tracking

<sup>3</sup> Seywald

<sup>4</sup> Vadali

<sup>5</sup> Junkins

<sup>6</sup> Pontryagin

۳- اندازه گیری حالت به دست آمده در زمان  $i+1$   
 ۴- تکرار کردن حل بهینه سازی برای افق زمانی ثابت در زمان  $i+1$  و در بازه  $[i+1, i+N-1]$  و آغاز از حالت فعلی  $x_{i+1}$ . در غیاب اغتشاشات، حالت اندازه گیری شده در مرحله ۳ برابر آن چیزی خواهد بود که مدلسازی پیش گویی کرده است. با این حال استفاده کردن از حالت اندازه گیری شده به جای حالت پیش بینی شده قابلیت اطمینان بالاتری را ایجاد می کند. در توضیح بالا فرض شده است که حالت در زمان  $i+1$  اندازه گیری شده است. بنابراین در عمل نوعی مشاهده-گر برای تخمین  $x_{i+1}$  بر مبنای داده های موجود استفاده می شود.

به علت محاسبه آن لاین دستورات کنترلی، RHC از مزایای زیادی مثل بازده خوب در پیگردی، کنترل عدم قطعیت ها، حل سیستم های غیر خطی وابسته به زمان و غیره [۱۸-۲۳] برخوردار است. بعلاوه، RHC برحسب حالت جاری تولید می شود که موجب یک کنترل حلقه بسته می گردد [۲۱].

### ۳- معادلات و چگونگی بهینه سازی

در این مقاله سه چرخ عکس العملی برای یک ماهواره صلب فرض شده است که هر کدام از آنها در راستای یکی از محورهای اصلی دستگاه بدنی نصب و تنظیم شده اند تا بتوانند وضعیت جهت گیری ماهواره را در فضا کنترل کنند. بنابراین معادلات دینامیکی حاکم بر این ماهواره صلب و حرکت زاویه ای چرخهای عکس العملی آن به صورت زیر خواهد بود:

$$(J_1 - I_1)\dot{\Omega}_1 = (J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 - h_3\Omega_2 + h_2\Omega_3 - u_1 \quad (3)$$

$$(J_2 - I_2)\dot{\Omega}_2 = (J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 - h_1\Omega_3 + h_3\Omega_1 - u_2 \quad (4)$$

$$(J_3 - I_3)\dot{\Omega}_3 = (J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 - h_2\Omega_1 + h_1\Omega_2 - u_3 \quad (5)$$

$$\dot{h}_{1,2,3} = u_{1,2,3} - I_{1,2,3}\dot{\Omega}_{1,2,3} \quad (6)$$

که در آن  $J_1, J_2, J_3$  و  $I_1, I_2, I_3$  به ترتیب نمایانگر ممان اینرسی محورهای اصلی دستگاه بدنی ماهواره و چرخهای عکس العملی می باشند و نیز  $\Omega_1, \Omega_2$  و  $\Omega_3$  بیانگر سرعت های زاویه ای دستگاه بدنی ماهواره هستند

ایده برنامه ریزی پویا<sup>۱</sup> از انتها به ابتدا و به شکل یک دنباله از دستورات کنترلی تولید می شود که بنابراین سیاست های کنترلی به صورت برون خطی<sup>۲</sup> تولید خواهند شد و کنترل حلقه باز می باشد. با اعمال این سری کنترلی به سیستم انتظار داریم تا حالت ها در جهت مقادیر مطلوب حرکت و تغییر کنند.

### ۲-۱- الگوریتم RHC

مفهوم اصلی RHC برای مسائل رگولیشن<sup>۳</sup> به طور خلاصه عبارت است از حل کردن یک مسأله بهینه سازی برای یک افق زمانی محدود در آینده و تولید یک سیاست کنترلی برای تغییر در حالت فعلی سیستم که در آن صرفاً دستور کنترلی متناظر با حالت فعلی از بین سری کنترلی ایجاد شده انتخاب و اعمال می گردد. این فرآیند در هر بازه زمانی تکرار خواهد شد به صورتیکه در هر تکرار افق زمانی به سمت جلو می -غزد.

بهینه سازی با افق زمانی ثابت<sup>۴</sup> FH موجب ایجاد یک دنباله کنترلی  $\{u_i, \dots, u_{i+N-1}\}$  می شود که در زمان فعلی  $i$  آغاز و در زمان آینده  $i+N-1$  به پایان می رسد. FH در معرض دو اشکال می باشد:

۱- گاهی ممکن است وضعیت های غیر قابل انتظاری برای سیستم در بازه زمانی آینده  $[i, i+N-1]$  بوجود آیند که توسط مدل ریاضی غیر قابل پیش بینی باشند. این امر موجب می شود که سری سیاست کنترلی تولید شده  $\{u_i, \dots, u_{i+N-1}\}$  ناکارا گردد.

۲- وقتی یک مدل به زمان نهایی  $i+N-1$  نزدیک می شود، قانون کنترلی فعالیت خود را رها می کند چرا که برای نزدیک شدن به هدف مطلوب برحسب تابع هدف بهره ها بسیار کوچک می شوند.

دو مشکل بالا با ایده RHC قابل حل است. همان طور که در بالا اشاره شد در این ایده:

۱- در زمان  $i$  و در حالت فعلی  $x_i$  مسأله با در نظر گرفتن قیدهای فعلی و آینده برای بازه زمانی ثابت آینده توسط رویکرد کنترل بهینه حل می شود مثلاً در بازه  $[i, i+N-1]$ .

۲- به کارگیری صرفاً استپ اول در نتیجه دنباله کنترل بهینه

<sup>1</sup> Dynamic Programming

<sup>2</sup> Offline

<sup>3</sup> Regulation

<sup>4</sup> Fixed Horizon

این سری حول نقطه  $x = x_0$  بسط داده شده است. نقطه  $x_0$  را نقطه کار<sup>۲</sup> یا نقطه تعادل<sup>۳</sup> می‌نامند.

در حالت کلی‌تر که تابع برداری  $\bar{f}(\bar{x})$  به چندین متغیر مانند  $x_1, x_2, \dots, x_n$  وابسته است، معادله بالا به صورت  $\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  و  $\bar{f}^T(\bar{x}) = [f_1(x) \ f_2(x) \ \dots \ f_n(x)]$  خواهد بود. ماتریس  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}}$  را ماتریس جاکوبین<sup>۴</sup> و به صورت  $J_x$  نشان داده می‌شود.  $(i, j)$  امین عنصر ماتریس  $J_x$  عبارتست از:

$$(J_x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (18)$$

با اعمال روند خطی‌سازی بالا به معادلات غیرخطی سیستم، حول نقطه کار  $(x_0, u_0)$  و با تعریف:

$$x(t) = x_0(t) + \Delta x(t) \quad (19)$$

$$u(t) = u_0(t) + \Delta u(t) \quad (20)$$

که در آن  $\Delta x$  و  $\Delta u$  به ترتیب انحرافات کوچک حول نقطه کار را می‌دهند، داریم:

$$\dot{x}_0(t) + \Delta \dot{x}(t) = f(x_0, u_0, t) + J_x(x_0, u_0, t)\Delta x(t) + J_u(x_0, u_0, t)\Delta u(t) + HOT \quad (21)$$

و لذا با صرفنظر کردن از عبارات مرتبه بالاتر (HOT)، بدست می‌آوریم:

$$\Delta \dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t) \quad (22)$$

که در آن

$$A(t) = J_x(x_0, u_0, t), B(t) = J_u(x_0, u_0, t) \quad (23)$$

در هر حلقه برای محاسبه سری کنترلی با کمک روش LQR، ما به یک سیستم خطی نیاز داریم که این سیستم در هر حلقه تغییرناپذیر با زمان می‌باشد، بنابراین بازنویسی معادله (۲۲)، معادلات حالت و خروجی خطی سازی شده سیستم را حول نقطه کار به صورت زیر بدست می‌دهند.

[۲۴]

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (24)$$

برای خطی‌سازی معادلات غیرخطی نیاز به نقاط کاری داریم تا معادلات را حول آنها خطی کنیم. در حالی که در این مسأله صرفاً حالت ابتدایی و نهایی سیستم برای ما روشن

ممان زاویه‌ای نسبی چرخ‌ها حول محورهای ویژه بدنی با  $h_i, i=1,2,3$  نمایش داده شده است و  $u_1, u_2, u_3$  گشتاور ورودی چرخ‌ها می‌باشند.

برای تحلیل این سیستم بردار حالت آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{x}^T = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \varphi \ \theta \ \psi \ h_1 \ h_2 \ h_3] \quad (7)$$

بنابراین معادلات حالت سیستم به صورت زیر خواهند بود:

$$\dot{\Omega}_1 = \frac{1}{(J_1 - I_1)} [(J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 - h_3\Omega_2 + h_2\Omega_3 - u_1] \quad (8)$$

$$\dot{\Omega}_2 = \frac{1}{(J_2 - I_2)} [(J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 - h_1\Omega_3 + h_3\Omega_1 - u_2] \quad (9)$$

$$\dot{\Omega}_3 = \frac{1}{(J_3 - I_3)} [(J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 - h_2\Omega_1 + h_1\Omega_2 - u_3] \quad (10)$$

$$\dot{\varphi} = \Omega_1 \quad (11)$$

$$\dot{\theta} = \Omega_2 \quad (12)$$

$$\dot{\psi} = \Omega_3 \quad (13)$$

$$\dot{h}_1 = u_1 - \frac{I_1}{(J_1 - I_1)} [(J_2 - J_3)\Omega_2\Omega_3 - h_3\Omega_2 + h_2\Omega_3 - u_1] \quad (14)$$

$$\dot{h}_2 = u_2 - \frac{I_2}{(J_2 - I_2)} [(J_3 - J_1)\Omega_3\Omega_1 - h_1\Omega_3 + h_3\Omega_1 - u_2] \quad (15)$$

$$\dot{h}_3 = u_3 - \frac{I_3}{(J_3 - I_3)} [(J_1 - J_2)\Omega_1\Omega_2 - h_2\Omega_1 + h_1\Omega_2 - u_3] \quad (16)$$

که این معادلات غیرخطی و کوپله هستند. غالباً دینامیک حاکم بر اکثر فرآیندهای صنعتی و سیستم‌های واقعی غیرخطی است، لیکن تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل برای حالت غیرخطی بسیار دشوار و پیاده سازی کنترل کننده‌های غیرخطی در بسیاری از موارد عملی و کاربردی امری غیرضروری است. در واقع، در عمل نشان داده شده است که سیستم‌های کنترل خطی، رده بسیار وسیعی از سیستم‌های واقعی و فرآیندهای پیچیده صنعتی را بخوبی کنترل می‌نمایند. از اینرو، بدست آوردن مدل‌های دقیق خطی از سیستم‌های غیرخطی از نظر مهندسی بسیار مهم و اجتناب‌ناپذیر است. یک روش کاربردی و موفق در خطی سازی معادلات غیرخطی سیستم، بر اساس بسط سری تیلور<sup>۱</sup> است. تابع کلی  $f(x)$  را در نظر بگیرید. با فرض تحلیلی بودن تابع، بسط سری تیلور، این تابع را به صورت سری بی‌نهایت زیر توصیف می‌کند.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n \quad (17)$$

<sup>2</sup> Operating point

<sup>3</sup> Equilibrium point

<sup>4</sup> Jacobian

<sup>1</sup> Taylor series

که در آن  $P(0) = H$  می‌باشد و با استفاده از  $P(0)$  طبق رابطه (۲۷)،  $F(N-1)$  قابل محاسبه است. با ضرب  $F(N-1)$  و  $X(N-1)$  سیاست کنترلی بهینه  $U^*(N-1)$  یعنی سیاست کنترلی که حالت ماقبل آخر را به حالت نهایی می‌برد بدست می‌آید. بنابراین همانطور که مشاهده می‌شود ابتدا آخرین سیاست کنترلی قابل محاسبه است. با استفاده از  $F(N-1)$  و معادله (۲۸)، مقدار  $P(1)$  قابل استحصال و متعاقباً  $F(N-2)$  و در نتیجه  $P(2)$  بدست خواهد آمد. این روند ادامه خواهد یافت تا نهایتاً سیاست کنترلی ابتدایی تولید شود [۲۵]. از آنجایی که سیستم ما به صورت تکه به تکه خطی سازی می‌شود و با توجه به رویکرد RHC، برای ما صرفاً سیاست کنترلی ابتدایی اهمیت خواهد داشت تا از حالت فعلی به حالت بعدی، سیستم را تغییر داده و حول حالت جدید، سیستم را خطی سازی نماییم.

بنابراین بر مبنای ایده RHC برای حالت جاری سیستم، دستور کنترلی متناظر با حالت فعلی از بین سری کنترلی ایجاد شده، انتخاب و اعمال می‌گردد. با اعمال این دستور کنترلی به سیستم غیرخطی حالت جدید حاصل می‌شود که از این حالت می‌توان به عنوان نقطه کار بعدی استفاده کرد و یک حلقه در برنامه این کار را تا رسیدن به شرایط نهایی صفر ادامه داده و سیاست کنترلی را در طول مسیر به صورت آن لاین به ما می‌دهد.

#### ۴- نتایج

همان‌طور که اشاره شد سیستم مورد بررسی یک سیستم چندمتغیره و غیرخطی است که کنترل چنین سیستمی با استفاده از رویکردهای کنترل چندمتغیره و کنترل غیرخطی و همچنین پیاده سازی آن مستلزم پیچیدگی‌های خاص خود است و از طرفی الزامی بر بهینه بودن چنین کنترلی نیز وجود ندارد. این درحالی است که روش پیشنهادی علاوه بر اینکه قابل اعمال به یک سیستم چندمتغیره غیرخطی است قابلیت بهینه سازی بر مبنای تابع هزینه دلخواه را داراست. بعلاوه کنترل در این روش به صورت حلقه بسته بوده و دارای مقاومت بالایی در برابر اغتشاشات می‌باشد. نمودارهای زیر بیان‌گر تاریخچه تغییر زوایای وضعیت ماهواره صلب، سیاست کنترلی بهینه و اندازه مومنوم زویه-ای چرخ‌های عکس‌العملی نسبت به زمان می‌باشد.

است. بنابراین ما نیاز به راهکاری داریم تا بتوانیم نقاط کار را تولید و معادلات را حول آنها خطی کنیم. روشی که برای ایجاد نقاط کار در این مقاله به کار گرفته شده این است که با گسسته سازی معادلات و خطی‌سازی آنها حول شرایط اولیه سری دستوره‌های کنترلی را بر اساس روش LQR بدست می‌آوریم. برای استفاده از روش LQR نیاز است که تابع هزینه مسأله را به شکل منطبق بر قالب استاندارد مسائل LQR درآوریم. با توجه به رویکرد گسسته تابع هزینه را به صورت رابطه (۲) تعریف می‌کنیم. که در آن  $H$  و  $Q(k)$  ماتریس‌های حقیقی، متقارن، مثبت و نیمه معین<sup>۱</sup> با ابعاد  $n \times n$  هستند و  $R(k)$  ماتریس حقیقی، متقارن، مثبت و معین با ابعاد  $m \times m$  می‌باشد.  $n$  و  $m$  به ترتیب برابر تعداد متغیرهای حالت سیستم و تعداد فعالیت‌های کنترلی<sup>۲</sup> است.  $N$  یک عدد صحیح و مثبت می‌باشد.

برای تابع هزینه بالا سیاست کنترلی بهینه و هزینه کمینه بین مرحله  $N-K$  تا  $N$  از رابطه (۲۵) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} u^*(N-K) &= -[R(N-K) + B^T(N-K)P(K-1)B(N-K)]^{-1} \\ &\times B^T(N-K)P(K-1)A(N-K)X(N-K) \quad (25) \\ &= F(N-K)X(N-K) \end{aligned}$$

هزینه کمینه بین مرحله  $N-K$  تا  $N$  به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} J_{N-K,N}^*(X(N-K)) &= \frac{1}{2} X^T(N-K) \{ [A(N-K) \\ &+ B(N-K)F(N-K)]^T \\ &\times P(K-1)[A(N-K) + B(N-K)F(N-K)] \\ &+ F^T(N-K)R(N-K)F(N-K) \\ &+ Q(N-K) \} X(N-K) \quad (26) \\ &= \frac{1}{2} X^T(N-K)P(K)X(N-K) \end{aligned}$$

برای محاسبه بهره فیدبک  $F$  از رابطه زیر داریم:

$$\begin{aligned} F(N-K) &= -[R(N-K) + B^T(N-K)P(K-1)B(N-K)]^{-1} \\ &\times B^T(N-K)P(K-1)A(N-K) \quad (27) \end{aligned}$$

که ماتریس  $P$  از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(K) &= [A(N-K) + B(N-K)F(N-K)]^T P(K-1) \\ &\times [A(N-K) + B(N-K)F(N-K)] \\ &+ F^T(N-K)R(N-K)F(N-K) + Q(N-K) \quad (28) \end{aligned}$$

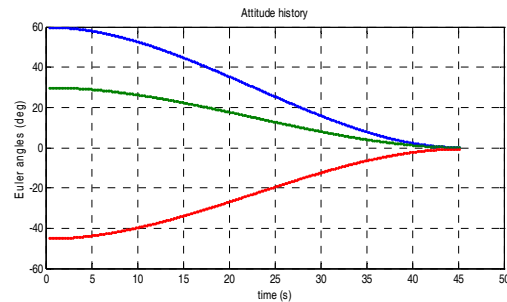
<sup>1</sup> Semi-definite

<sup>2</sup> Control action

## مراجع

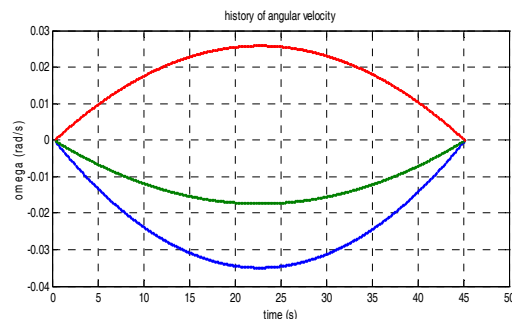
- Dixon, V. T., Edelbaum, J. E., Potter, and Vandervelde, W.E. "Fuel optimal reorientation of axis symmetric spacecraft", J. Spacecr., No. 7, pp. 1345-1351, 1970.
- Junkins, J.L., and Turner, J.D. "Optimal continuous torque attitude maneuvers", J. Guidance Control Dyn., Vol. 3, No. 3, pp. 210-217, 1980.
- Vadali, S.R., Kraige, L.G., and Junkins, J.L. "New results on the optimal spacecraft attitude maneuver problem", J. Guidance Control Dyn., Vol. 7, No. 3, pp. 378-380, 1984.
- Vadali, S.R., and Junkins, J.L. "Optimal open-loop and stable feedback control of rigid spacecraft attitude maneuvers", J. Astronaut. Sci., No. 32, pp. 105-122, 1984.
- Li, F., and Bainum, P.M. "Numerical approach for solving rigid spacecraft minimum time attitude maneuvers", J. Guidance Control Dyn., Vol. 13, No.1, pp. 38-45, 1994.
- Scrivener, S.L., and Thomson, R.C. "Survey of time-optimal attitude maneuvers", J. Guidance Control Dyn., Vol. 17, No.2, pp. 225-233, 1994.
- Seywald, H., Kumar, R.R., Deshpande, S.S., and Heck, M.L. "Minimum fuel spacecraft reorientation", J. Guidance Control Dyn., Vol. 17, No.1, pp. 21-29, 1994.
- Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V., and Mishchenko, E.F. "The Mathematical Theory of Optimal Processes", Gordon and Beach, New York, 1986.
- Dwyer, T.A.W. "The control of angular momentum for asymmetric rigid bodies", IEEE Trans. Autom. Control, No. 3, pp. 686-688, 1982.
- Lin, Y.Y., and Kraige, L.G. "Enhanced techniques for solving the two-point boundary-value problem associated with the optimal attitude control of spacecraft", J. Astronaut. Sci., No. 37, pp. 1-15, 1989.
- Carrington, C.K., and Junkins, J.L. "Optimal nonlinear feedback control for spacecraft attitude maneuvers", J. Guidance Control Dyn., Vol. 9, No. 1, pp. 99-107, 1986.
- Vadali, S.R., and Junkins, J.L. "Spacecraft large angle rotational maneuvers with optimal momentum transfer", J. Astronaut. Sci., No. 31, pp. 217-235, 1983.
- Schaub, H., and Junkins, J.L. "New penalty functions and optimal control formulation for spacecraft attitude control problems", J. Guidance Control Dyn., Vol. 20, No. 3, pp. 428-434, 1997.
- Dwyer, T.A.W. "Exact nonlinear control of spacecraft slowing maneuvers with internal

در شکل ۱ تغییرات زوایای اوپلر ماهواره را که بیانگر وضعیت جهت‌گیری ماهواره است در طول ۴۵ ثانیه نشان می‌دهد. همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود زوایای از شرایط ابتدایی خود به سمت صفر رگوله می‌شوند و این تغییرات به صورتی انجام می‌پذیرد که تابع هزینه کمینه شود.



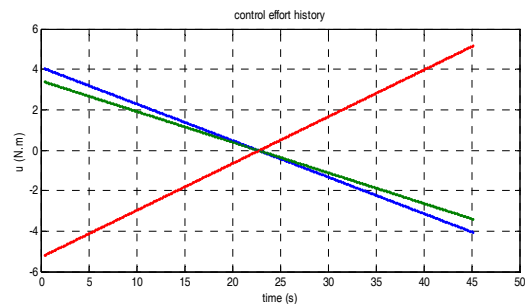
شکل (۱): تغییر زوایای اوپلر از حالت اولیه به صفر.

شکل ۲ تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای نسبت به زمان را در طول ۴۵ ثانیه نشان می‌دهد. همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود سرعت‌های زاویه‌ای از شرایط ابتدایی خود که صفر هستند افزایش پیدا کرده و مجدداً به سمت صفر رگوله می‌شوند.



شکل (۲): تغییرات سرعت‌های زاویه‌ای نسبت به زمان.

نمودار زیر (شکل ۳) تغییرات سیاست کنترلی نسبت به زمان را در طول ۴۵ ثانیه نشان می‌دهد.



شکل (۳): تغییرات سیاست کنترلی نسبت به زمان.

- maneuver transfer”, J. Guidance Control Dyn., Vol. 9, No. 2, pp. 240–247, 1986.
15. Anderson, B.D.O., and Moore, J.B. “Optimal Control: Linear Quadratic Methods”, Prentice-Hall International, London, 1989.
  16. Bryson, A.E., and Ho, Y.C. “Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control”, John Wiley & Sons, New York, 1975.
  17. Lewis, F.L., and Syrmos, V.L. “Optimal Control”, John Wiley & Sons, New York, 1995.
  18. Kothare, M.V., Balakrishnan, V., and Morari, M. “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities”, Automatica, Vol. 32, No. 10, pp. 1361–1379, 1996.
  19. Kwon, W.H., and Pearson, A.E. “A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system”, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 22, No. 5, pp. 838–842, 1977.
  20. Kwon, W.H., and Pearson, A.E. “On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems”, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 23, No. 3, pp. 479–481, 1978.
  21. Kwon, W.H., and Han, S. “Receding Horizon Control: Model Predictive Control for State Models”, Springer-Verlag, London, 2005.
  22. Kwon, W.H., and Kim, K.B. “On stabilizing receding horizon controls for linear continuous time-invariant systems”, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 45, No. 7, pp. 1329–1334, 2000.
  23. Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L., and Papon, J. “Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes”, Automatica, Vol. 14, No. 5, pp. 413–428, 1978.
  24. Donald E.K. “Optimal Control Theory”, 1st Edition, Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2004.
۲۵. خاکی صدیق، ع. “اصول کنترل مدرن”، انتشارات دانشگاه تهران، تهران، ویرایش اول، ۱۳۸۴.