

## تخمین تعداد لایه‌های مورد نیاز صفحات کامپوزیتی با استفاده از روش جمع آثار

جعفر اسکندری<sup>۱</sup> و سیدحسین تقویان حسین<sup>۲</sup>  
دانشگاه صنعتی مالکاشتر

ندا گرشاسبی<sup>۳</sup>  
پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی

تاریخ پذیرش: ۱۶ / ۹ / ۱۳۸۹

تاریخ دریافت: ۱۲ / ۷ / ۱۳۸۹

### چکیده

در این مطالعه به تدوین و ایجاد یک راهکار بسیار ساده به منظور برآورد تعداد لایه‌های مورد نیاز چند لایه‌های کامپوزیتی که تحت یک بارگذاری مرکب قرار دارند، پرداخته شده است. در این روش، که براساس تئوری جمع آثار می‌باشد، با استفاده از جهت و میزان تنش‌های اصلی و تفکیک آنها در المان در نظر گرفته شده، تعداد لایه‌ها در هر گروه-لایه بطور جداگانه تعیین می‌شوند. در این روش، با توجه به اینکه راستای تنش‌های اصلی و برشی بیشینه وابسته به میزان و جهت بارهای وارده می‌باشند، به تعیین استحکام تک لایه بر مبنای زاویه الیاف (زاویه بین الیاف و بار وارده در صفحه شامل تنش اصلی و یا صفحه شامل تنش برشی بیشینه) نیاز است. از اینرو، در این مقاله با استفاده از معیار حداکثر کرنش قابل تحمل، روشی بسیار ساده برای دستیابی به تابع استحکام تک لایه، برحسب زاویه الیاف پیشنهاد شده است.

**واژه‌های کلیدی:** کامپوزیت، چند لایه، روش جمع آثار، حداکثر تنش عمودی و برشی قابل تحمل، تخمین تعداد لایه‌ها

## Estimation of Number of Required in Composite Plate Layers Using Superposition Methods

J. E. Jam and S. H. Taghavian

Malek Ashtar University of Technology

N. G. Nia

Iran Polymer & Petrochemical Institute

### Abstract

To estimate the number of required layers for a composite laminate which stands a compound load, a very simple method has been developed and assembled. This method, which is based on superposition theory, the number of layers in each layer-group is settled separately according to the direction and the amount of main stresses and separating them from each other in desired elements. Since the direction of the main stresses and maximum shear stress depend on the amount and the direction of applied loads in this method, determining the strength of single-layer based on fiber angle (the angle between fiber and applied load in a plan which comprises main stress and or, a plan which comprises maximum shear stress) is needed. In this paper, according to the maximum strain criterion, a very simple method in order to obtain the function of single-layer strength (versus fiber angle) is suggested.

**Keywords:** Composite Laminate, Superposition Method, Maximum Allowed Normal and Shear Stresses, Estimation of Number of Layers

<sup>۱</sup> دانشیار (نویسنده پاسخگو): jejam@mail.com

<sup>۲</sup> دانشجو کارشناسی ارشد

<sup>۳</sup> دانشجو دکتری

## مقدمه

استحکام و سختی چند لایه‌های کامپوزیتی طراحی شده است.

در تمام پژوهش‌های فوق که به یک برنامه جامع طراحی منتهی شده است، یک عمل مشترک وجود دارد، که می‌توان آنرا مرز جدایش بین طراحی و تحلیل نامید. این نیاز در واقع تخمین اولیه چند لایه می‌باشد، که هر برنامه‌ای در ابتدای عملکرد خود به آن نیاز دارد، و طراح موظف است بر اساس تجربه و یا طراحی‌های مشابه، آنرا به عنوان یک داده به برنامه دهد. این چند لایه، مبداء تمام تحلیل‌ها خواهد بود، تا کاربر را به جواب نهایی رهنمون سازد. در این مطالعه سعی داریم با استفاده از روش جمع آثار، و با اعمال محدودیت‌های بکاربری این روش، راهکاری مشخص را برای دستیابی به این تخمین اولیه ارائه دهیم. این تخمین اولیه که در حقیقت یک طراحی مقدماتی محسوب می‌شود، تا حد زیادی نیاز طراح را به تجربه و یا شبیه سازی طرح با کارهای انجام شده کاهش می‌دهد.

## تئوری و فرضیات

همانطور که پیشتر بیان شد، روشی که برای تعیین تعداد هر گروه از لایه‌ها استفاده می‌شود، روش جمع آثار است. براساس این روش تعداد لایه‌ها بر مبنای سهم هر لایه در تحمل تنش‌های اعمالی بدست می‌آید. در این راهکار، هر گروه از لایه‌ها تنها موظف به تحمل تنشی می‌باشند که استحکام بیشتری در مقابل آن تنش دارند. در این تقسیم‌بندی تنش‌های اعمال شده به صفحه چند لایه را می‌توان به دو گروه کلی تقسیم کرد:

۱- تنش‌های عمودی  $N_x, N_y$ ، که بر اساس مختصات کلی صفحات چند لایه در دو راستای  $(x)$  و  $(y)$  تعریف می‌شوند و

۲- تنش‌های برشی  $N_{xy}$ ، که بر اساس مختصات کلی صفحات چند لایه بصورت زیر تعریف می‌شوند.

بطور کلی براساس بارگذاری صفحات چند لایه، سه گروه لایه تعریف می‌شود. اولین گروه لایه‌هایی هستند که در آنها الیاف با بردار نیرو هم راستا می‌باشد. این لایه‌ها که به لایه‌های صفر درجه معروفند، بر اساس تنش‌هایی که در بالا به آنها اشاره شده است، می‌توانند در راستای  $(x)$  و  $(y)$

بطور کلی، طراحی سازه‌های کامپوزیتی را می‌توان در دو شاخه کلی بررسی کرد. شاخه اول طراحی سازه‌هایی است که با توجه به نوع بارگذاری و هندسه سازه، دارای یک روش مشخص برای طراحی هستند (مانند انواع مخازن و لوله‌های تحت فشار)، و شاخه دوم طراحی سازه‌هایی می‌باشند که مانند سازه‌های فلزی، دارای اشکال مختلفی بوده و تحت بارگذاری‌های متنوعی قرار می‌گیرند. عموماً قطعاتی که در دسته دوم قرار دارند، در پوسته و بدنه موشک‌ها، هواپیماها و همچنین انواع خودروها بکار می‌روند. تعیین تعداد و همچنین چینش لایه‌ها، برای صفحات چند لایه‌ای که تحت یک بارگذاری مرکب قرار دارند از جمله موارد اصلی است که در طراحی این قبیل سازه‌ها مطرح می‌باشد. از آنجایی که تحلیل صفحات چند لایه بواسطه جهت‌دار بودن بلوک‌های تشکیل دهنده (تک لایه‌های با الیاف پیوسته) به تانسورهای چند بعدی مختلفی وابسته می‌باشد، استفاده از روابط تحلیلی برای طراحی سازه‌های کامپوزیتی و یافتن متغیرهای مختلف طراحی (مانند آنچه که در طراحی سازه‌های فلزی مرسوم است) عملاً غیرممکن می‌باشد. این مسئله زمانی پیچیده‌تر می‌شود که طراحی بلوک‌های تشکیل دهنده چند لایه (تعیین نسبت حجمی الیاف، راستای مناسب الیاف و...) به منظور هرچه بهتر شدن خواص مکانیکی چند لایه از جمله وظائف طراح محسوب می‌شود. بر این اساس مطالعات فراوانی در زمینه تبیین روش‌های مختلف طراحی صورت گرفته است، از جمله این تحقیقات می‌توان به تلاش‌های وبر و وو اشاره کرد، که به دست‌یابی به یک پایگاه اطلاعاتی پایه برای طراحی و همچنین سنجش طراحی‌های انجام شده، منجر شده است [۱-۳]. در این راستا آکیرا و همکارانش نیز با استفاده از تئوری شبکه‌های عصبی، روشی را براساس زبان برنامه نویسی ++C ارائه دادند که به بهینه‌سازی تعداد و چینش لایه‌ها می‌پردازد [۴-۵]. همچنین پارک و همکارانش نیز بر روی بهینه‌سازی استحکام چند لایه‌ها، با بهره‌گیری از تئوری شبکه‌های عصبی پرداخته‌اند که در نهایت به یک چینش بهینه ختم شده است [۶]. از دیگر پژوهش‌های صورت گرفته، می‌توان سیستم هوشمند کیم و دیگر همکارانش [۷-۱۴] را نیز مثال زد، که برای بهینه‌سازی

از اینرو برای انجام یک طراحی کاربردی، در گام نخست می‌بایستی حداکثر تنش عمودی و حداکثر تنش برشی قابل تحمل یک لایه زاویه‌دار را بر حسب تغییرات زاویه  $\theta$  بدست آورد. در این مطالعه برای نیل به این هدف، با استفاده از تئوری حداکثر کرنش قابل تحمل [۱۵]، منحنی تغییرات حداکثر تنش عمودی قابل تحمل و همچنین حداکثر تنش برشی قابل تحمل یک تک لایه، بر حسب زاویه الیاف (نسبت به راستای  $x$ ، در صفحه تحت بارگذاری مرکب) ارائه می‌شود. بر این اساس بر مبنای روابط موجود در مراجع مختلف، زمانی که یک تک لایه تحت تنش عمودی در راستای ( $x$ ) قرار می‌گیرد، تنش در راستای الیاف و عمود بر آن عبارت است از [۱۵]:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2 \theta, \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2 \theta, \quad (2)$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta. \quad (3)$$

بر همین اساس، زمانی که یک تک لایه در صفحه ( $x-y$ ) تحت تنش برشی قرار می‌گیرد، تنش در راستای الیاف و عمود بر آن عبارت است از [۱۵]:

$$\sigma_1 = 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta, \quad (4)$$

$$\sigma_2 = -2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta, \quad (5)$$

$$\tau_{12} = \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (6)$$

در روابط فوق،  $\sigma_1$ ،  $\sigma_2$  و  $\tau_{12}$  به ترتیب تنش‌های وارد در راستای الیاف، عمود بر آن و تنش برشی وارد در صفحه (۲-۱) می‌باشد. برای دستیابی به منحنی تغییرات  $\sigma_{x_{\max}}$  (حداکثر تنش قابل تحمل در راستای  $x$ ) با استفاده از تنش‌های بدست آمده در راستاهای یک و دو، و همچنین بهره‌گیری از معیار حداکثر کرنش قابل تحمل [۱۵، ۱۶]، مرز  $\sigma_x$  به قرار زیر بدست می‌آید:

(براساس مد طولی)

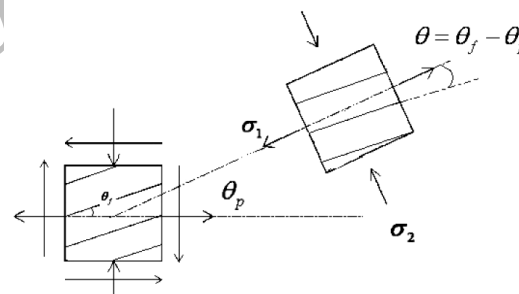
$$\sigma_{x_{\max}} = \frac{S_T^{(+)}}{\sin^2 \theta - g_{12} \cos^2 \theta} \quad (7)$$

چیده شوند. در گروه دوم که به لایه‌های زاویه‌دار معروفند، الیاف با راستای تنش‌های عمودی، زاویه می‌سازند. در آخر گروه سوم است که به لایه‌های نود درجه موسومند. در این لایه‌ها، راستای الیاف، نسبت به بردار تنش عمودی، زاویه نود درجه می‌سازد.

### تعیین سهم هرگروه از لایه‌ها در تحمل تنش‌های حاصل از بارگذاری مرکب

بطور کلی از آنجایی که مختصات صفحات چند لایه غالباً براساس هندسه سازه و عملی بودن فرآیند ساخت تعیین می‌شود، در حالتی که راستای تنش‌های اصلی نسبت به محورهای ( $x$ ) و ( $y$ ) زاویه پیدا می‌کنند، عملاً لایه‌ای به عنوان لایه صفر درجه وجود نخواهد داشت (شکل ۱). این مسئله تشخیص زاویه راه، در لایه‌های  $\theta^\circ$  نیز مخدوش می‌نماید (شکل ۲).

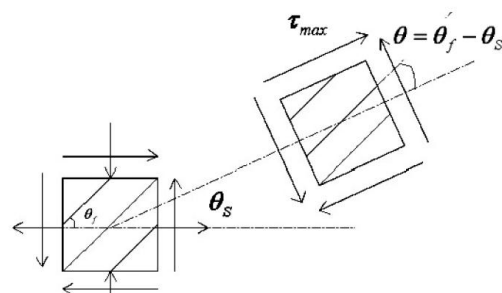
صفحه شامل تنش‌های اصلی



صفحه تحت بارگذاری مرکب

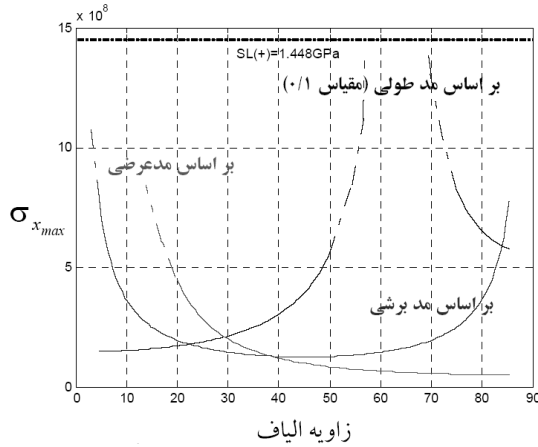
شکل (۱): زاویه الیاف در صفحه اصلی.

صفحه شامل تنش برشی بیشینه

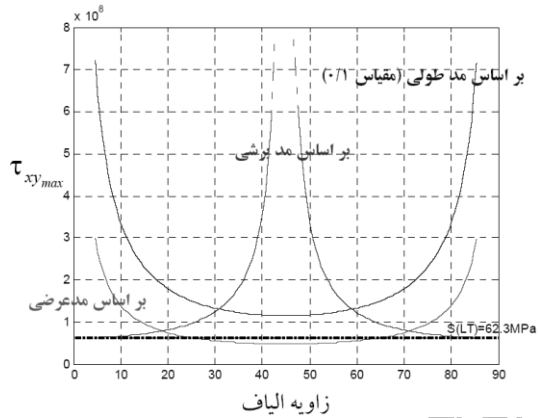


صفحه تحت بارگذاری مرکب

شکل (۲): زاویه الیاف در صفحه تنش برشی بیشینه.



شکل (۳): منحنی‌های مربوط به حداکثر تنش عمودی قابل تحمل تک لایه برحسب زاویه الیاف (در ۳ مد شکست).



شکل (۴): منحنی‌های حداکثر تنش برشی قابل تحمل تک لایه برحسب زاویه الیاف (در ۳ مد شکست).

با توجه به منحنی‌های بدست آمده نتایج زیر بدست می‌آید:

- حداکثر تنش عمودی قابل تحمل در هر لایه زمانی بدست می‌آید که راستای نیرو در راستای الیاف باشد.
- مد شکست بر اساس حد اکثر تنش عمودی قابل تحمل در هر لایه، در حدود زاویه ۴۰°، از مد برشی به مد عرضی انتقال می‌یابد.
- حداکثر تنش برشی قابل تحمل در یک تک لایه، با افزایش زاویه الیاف نسبت به محور (x)، افزایش می‌یابد. بگونه‌ای که مقادیر بدست آمده، از

(بر اساس مد عرضی)

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{S_T^{(+)}}{\sin^2 \theta - \mathcal{G}_{12} \cos^2 \theta} \quad (8)$$

(بر اساس مد برشی)

$$\sigma_{x_{max}} = \frac{S_{LT}}{\sin \theta \cos \theta} \quad (9)$$

همچنین، با بهره‌گیری از معیار حداکثر کرنش قابل تحمل، حداکثر تنش برشی قابل تحمل در یک تک لایه نیز، با فرض آنکه تنش برشی وارده باعث کشش در راستای دو می‌شود، به قرار زیر بدست می‌آید:

(بر اساس مد طولی)

$$\tau_{xy_{max}} = \frac{S_L^{(-)}}{2(\cos \theta \sin \theta + \mathcal{G}_{12} \cos \theta \sin \theta)} \quad (10)$$

(بر اساس مد عرضی)

$$\tau_{xy_{max}} = \frac{S_T^{(+)}}{2(\cos \theta \sin \theta + \mathcal{G}_{12} \cos \theta \sin \theta)} \quad (11)$$

(بر اساس مد برشی)

$$\tau_{xy_{max}} = \frac{S_{LT}}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} \quad (12)$$

در شکل‌های ۳ و ۴ منحنی تغییرات حداکثر تنش عمودی قابل تحمل و حداکثر تنش برشی قابل تحمل، برای یک تک لایه کربن/اپوکسی، که در جدول ۱ خواص مکانیکی آن ذکر گردیده است، نشان داده شده است.

جدول (۱) خواص مکانیکی کربن/اپوکسی.

$S_L^{(+)} = 1148 \text{ MPa}$	$S_L^{(-)} = 1172 \text{ MPa}$
$S_T^{(+)} = 48.3 \text{ MPa}$	$S_T^{(-)} = 248 \text{ MPa}$
$S_{LT} = 62.1 \text{ MPa}$	

اساس با استفاده از این تئوری می‌توان تعریف زیر را برای مواد اورتوتروپیک بیان کرد.

هنگامی تسلیم آغاز می‌گردد که بیشترین تنش برشی در هر جزء ماده با بیشترین تنش برشی که مجموع لایه‌های  $\theta^\circ$  می‌توانند تحمل کنند، برابر باشد. بر این اساس با فرض آنکه مجموع نیروهای برشی که n لایه  $\theta^\circ$  می‌توانند تحمل کنند، برابر است با بار برشی که به صفحه وارد می‌شود، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$n_{\theta^\circ} = \frac{(N_{xy})_{\max}}{t_{Layer} \tau_{xy_{all}}^{\theta^\circ}} \quad (13)$$

در رابطه اخیر  $(N_{xy})_{\max}$  حداکثر تنش برشی در نقطه مورد نظر،  $t_{Layer}$  ضخامت یک لایه و  $\tau_{xy_{all}}^{\theta^\circ}$  نیز حداکثر تنش برشی قابل تحمل تک لایه، در حالتی است که راستای الیاف با محور (x) (واقع در صفحه تنش برشی بیشینه) زاویه  $\theta^\circ$  می‌سازد (شکل ۲).

یکی از نکاتی که در این مرحله حائز اهمیت است، ویژگی است که در لایه‌های  $\pm 45^\circ$  نهفته است. همانطور که در شکل ۴ قابل رویت است، حداکثر تنش برشی قابل تحمل یک تک لایه، زمانی که زاویه الیاف در صفحه تنش برشی،  $45^\circ$  می‌باشد، به حداقل مقدار خود می‌رسد. بر این اساس اگر در رابطه اخیر از  $\tau_{xy_{all}}^{45^\circ}$  به جای  $\tau_{xy_{all}}^{\theta^\circ}$  استفاده شود، باتوجه به اینکه مخرج کسر حداقل مقدار خود را می‌یابد، حداکثر تعدادی که در بدترین شرایط نیاز است، بدست می‌آید. این نکته نشان می‌دهد که اگر تنها بر اساس مختصات هندسی سازه، از لایه‌های  $45^\circ$  استفاده شود، استفاده از رابطه فوق برای تعیین تعداد این لایه‌ها، یک طراحی در حاشیه امن محسوب می‌شود. در واقع این رابطه نشان می‌دهد که استفاده از لایه‌های  $\pm 45^\circ$  بر اساس هر مختصاتی که مطلوب سازنده باشد، قابل قبول است. زیرا در این حالت تنش‌های برشی بیشینه در هر صفحه‌ای که بوجود آیند، زاویه الیاف در آن صفحه (هرچه که باشد) استحکام برشی بیشتری را ارائه می‌دهد. از اینرو استفاده از رابطه فوق،

استحکام برشی لایه در راستای طولی - عرضی ( $S_{LT}$ ) بیشتر می‌شود. این نکته مؤید این مطلب است که، استفاده از الیاف زاویه‌دار (نسبت به راستای بار عمودی) می‌بایستی به خاطر افزایش استحکام برشی چند لایه باشد.

حداکثر تنش برشی قابل تحمل در یک تک لایه، در زاویه  $45^\circ$  به حداقل مقدار خود می‌رسد و این در حالی است که اصلی‌ترین عامل محدود کننده در این زاویه، مد شکست عرضی است. در این زاویه اگر بتوان لایه مورد نظر را در راستای عرضی تقویت کرد، با توجه به اینکه حداکثر تنش برشی قابل تحمل، در مد برشی، نامحدود است، استحکام برشی در این زاویه را می‌توان تا مرز شکست در مد طولی افزایش داد.

نتایج فوق در تعیین سهم گروه‌های مختلف لایه‌ای نقش اساسی را ایفا می‌کنند. مقادیر عددی بدست آمده براساس مواد انتخابی متفاوت است، که این مسئله نشان دهنده نیاز طراح به تدوین این منحنی‌ها، قبل از تعیین تعداد لایه‌ها است.

### تعیین معیار شکست برای تعیین تعداد لایه‌ها در هر گروه

همانطور که در سازه‌های همسانگرد برای تعیین پارامترهای طراحی از قبیل هندسه سازه و یا مواد مورد نیاز، از معیارهای مختلف شکست استفاده می‌شود، در اینجا نیز قصد بر آن است، با استفاده از دو نمونه از این معیارها، به روابط ساده برای محاسبه تعداد لایه‌های مورد نیاز در هر باگذاری دست یابیم.

### تئوری بیشترین تنش برشی (برای تعیین تعداد لایه‌های $\theta^\circ$ )

بطور کلی تعریف این تئوری برای مواد همسانگرد به شرح زیر می‌باشد:

هنگامی تسلیم آغاز می‌گردد که، بیشترین تنش برشی در هر جزء ماده با بیشترین تنش برشی در نمونه آزمایش کشش همان ماده، به هنگام آغاز تسلیم برابر شود [۱۷]. بر این

یک روش بسیار ساده و قابل قبول برای تعیین تعداد لایه‌های  $\pm 45^\circ$  در هنگام بارگذاری مرکب است.

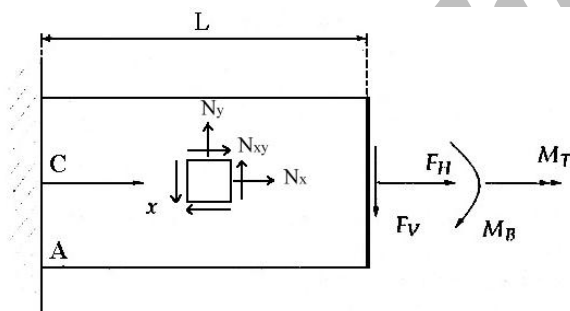
مقدار تنش عمودی که هر یک از لایه‌های  $0^\circ$  در راستای بار وارده و در صفحه تنش‌های اصلی تحمل می‌کنند.

$\theta$  زاویه الیاف لایه‌های  $0^\circ$  در صفحه تنش‌های اصلی (شکل ۱)

امروزه در طراحی یک چند لایه، بهینه‌سازی پارامترهای مختلف طراحی از جمله وزن کلی چند لایه و همچنین چینش بهینه لایه‌ها (برای حصول خواص مکانیکی بالاتر) از جمله ملزومات مهم یک طراحی خوب محسوب می‌شود. از اینرو مقادیری که بوسیله روابط بالا بدست می‌آید را می‌توان یک تخمین اولیه محسوب کرد. این تخمین راه گشای انواع تحلیل‌ها و فرآیندهای بهینه‌سازی بر روی سازه می‌باشد.

#### تشریح یک مدل عمومی

در طراحی یک پوسته کامپوزیتی (برای مثال پوسته بیرونی یک موشک بالستیک و یا بدنه اصلی یک هواپیما) که دارای شکل استوانه‌ای بوده و تحت مجموعه‌ای از بارگذاری‌های پیچشی، خمشی و محوری قرار دارد، در یک لحظه و نقطه بحرانی، جزء در نظر گرفته شده تحت تنش‌های  $N_x$ ،  $N_y$  و  $N_{xy}$  قرار دارد (شکل ۵).



شکل ۵: یک استوانه کامپوزیتی تحت بارگذاری مرکب.

بر این اساس، با فرض اینکه در این سازه از کامپوزیت گرافیت / اپوکسی، که مشخصات آن در جدول ۱ ارائه گردیده، استفاده شده است، و همچنین با توجه به اینکه بر اساس محدودیت‌های ساخت، تنها امکان استفاده از لایه‌های صفر درجه،  $90^\circ$  و  $\pm 45^\circ$  می‌باشد (راستای محوری استوانه راستای صفر درجه محسوب می‌شود)، تعداد لایه‌های

#### تئوری حداکثر تنش عمودی (برای تعیین تعداد لایه‌های صفر درجه)

تئوری بیشترین تنش عمودی بیان می‌دارد، زمانی شکست رخ می‌دهد که یکی از دو تنش اصلی با مقاومت ماده برابر گردد [۱۷]. این تعریف که برای مواد همسانگرد می‌باشد را می‌توان برای مواد اوتوتروپیک، بصورت زیر بیان کرد: شروع شکست زمانی است که بیشترین تنش اصلی وارد به سازه، با تنشی که مجموع لایه‌های صفر درجه می‌توانند تحمل کنند، برابر باشد.

بطور کلی تعریفی که در تمام مراجع برای لایه‌های  $0^\circ$  ارائه می‌شود این است که، لایه‌های صفر درجه لایه‌هایی هستند که الیاف در آنها در راستای نیرو آرایش یافته‌اند. اما بر مبنای آنچه که در بخش ۲ اشاره شد، در شرایط عملی این مختصات هندسی سازه است که لایه‌های صفر درجه را تعیین می‌کند. بطور مثال در لوله‌ها و مخازن تحت فشار، لایه‌های صفر درجه لایه‌هایی هستند که در آنها الیاف در امتداد طولی لوله و یا مخزن آرایش یافته‌اند. در چنین سازه‌ای زمانی که جزء در نظر گرفته شده تحت یک بارگذاری مرکب می‌باشد، با توجه به اینکه صفحه تنش‌های اصلی در هر زاویه‌ای می‌تواند باشد، و با توجه به اینکه وظیفه چند لایه تحمل تنش‌های اصلی است، دیگر لایه‌ای به نام صفر درجه لایه‌هایی هستند که تنها در راستای الیاف بار تحمل می‌کنند، می‌توان تعداد این لایه‌ها را، بطور جداگانه، برای بارهای  $N_1$  و  $N_2$ ، توسط رابطه زیر بدست آورد:

$$n_{(0^\circ)} = \frac{(N_{1(or)2})}{t_{Layer} \times \sigma_{x_{all}}^\theta} \quad (14)$$

در این رابطه:

$(N_{1(or)2})$  تنش‌های اصلی در راستاهای یک و دو (بیشترین تنش‌های عمودی وارد بر جزء در نظر گرفته شده است) (شکل ۱)

مقدار یک تخمین دست بالا محسوب می‌شود، چرا که در محاسبه تعداد این لایه‌ها، اثر گروه‌های لایه‌ای دیگر  $[0_m / 90_k]$  در تحمل بار اعمالی در نظر گرفته نشده است.

- برای لایه‌های  $90^\circ$

$$n_{(90^\circ)} = \frac{\overbrace{(80 \times 10^3)}^A}{\underbrace{(0.2 \times 10^{-3})}_{B} \times \underbrace{(1.5 \times 10^8)}_C} = 2.66 \cong 3$$

در رابطه فوق، نیز A تنش اصلی در راستای دو ( $N_2$ ) (شکل ۶)، B ضخامت تک لایه، و C حداکثر تنش عمودی قابل تحمل یک تک لایه در حالتی است که زاویه الیاف با راستای نیرو زاویه  $26/5^\circ$  می‌سازد.

در اینجا نیز بنا به دلیلی که برای لایه‌های صفر درجه بیان شد، تعداد بدست آمده یک تخمین دست بالا محسوب می‌شود؛ که این نکته در هنگام بهینه‌سازی چند لایه نهایی می‌بایستی لحاظ گردد.

- برای لایه‌های  $\pm 45^\circ$

$$n_{(\pm 45^\circ)} = \frac{\overbrace{(100 \times 10^3)}^A}{\underbrace{(0.2 \times 10^{-3})}_{B} \times \underbrace{(4.76 \times 10^7)}_C} = 10.5 \cong 11$$

در معادله بالا A حداکثر تنش برشی وارد به سازه در جزء در نظر گرفته شده می‌باشد. این تنش در زاویه  $18/5^\circ$  نسبت به راستای محوری سازه اعمال می‌شود. همچنین در این رابطه C حداکثر تنش برشی قابل تحمل تک لایه در حالتی است که راستای الیاف با راستای بار وارده زاویه  $45^\circ$  می‌سازد.

در اینجا لازم به ذکر است که بر اساس محدودیت‌های ساخت، زاویه الیاف در لایه‌های  $\pm 45^\circ$  نسبت به محور استوانه محاسبه می‌شود. از اینرو جمله C می‌بایستی بیان کننده استحکام برشی تک لایه در حالتی باشد که راستای الیاف با راستای تنش عمودی (در اینجا تنش متوسط در صفحه تنش برشی بیشینه) زاویه  $63/5^\circ$  می‌سازد:

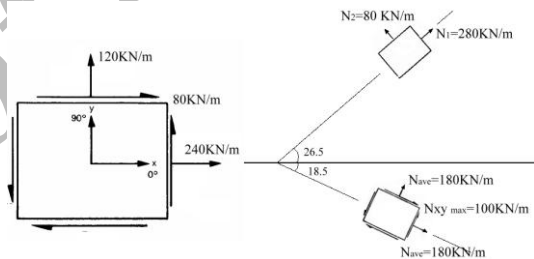
$$45 + 18/5 = 63/5$$

(در رابطه بالا  $18/5^\circ$  زاویه بین صفحه تنش برشی بیشینه و صفحه‌ای است که تحت بارگذاری مرکب می‌باشد).

پیشنهادی را می‌توان با تحلیل تنش‌های اصلی وارد به مدل و بر اساس روش جمع آثار بدست آورد. در این روش بعد از تعیین نقطه بحرانی و محاسبه تنش‌های وارد به سازه در این نقطه، زاویه صفحه تنش‌های اصلی، نسبت به محور سازه محاسبه می‌گردد.

#### تحلیل مدل ارائه شده

در شکل ۶ یک مثال از بارهای وارد به نقطه بحرانی سازه، ارائه شده است. بر اساس بارگذاری مفروض، تنش‌های اصلی و همچنین حداکثر تنش برشی، به ترتیب در زوایای  $26/5^\circ$  و  $18/5^\circ$  (نسبت به محور طولی استوانه) حادث می‌شوند. براین اساس برای تعیین تعداد لایه‌های صفر درجه،  $90^\circ$  و  $\pm 45^\circ$ ، با بهره‌گیری از مقادیر بیشینه بدست آمده (شکل ۶) و همچنین روابط معرفی شده، نتایج زیر بدست می‌آید.



شکل (۶): تنش‌های اصلی (راستاها و مقادیر)

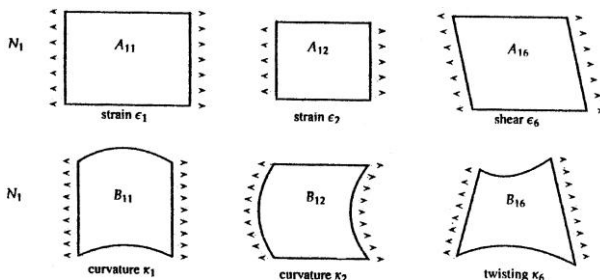
- برای لایه‌های  $0^\circ$

$$n_{(0^\circ)} = \frac{\overbrace{(280 \times 10^3)}^A}{\underbrace{(0.2 \times 10^{-3})}_{B} \times \underbrace{(1.5 \times 10^8)}_C} = 9.33 \cong 10$$

در رابطه فوق، A تنش اصلی در راستای یک ( $N_1$ ) (شکل ۶)، B ضخامت در نظر گرفته شده برای یک تک لایه ( $t_{Layer}$ )، و در نهایت C حداکثر تنش عمودی قابل تحمل یک تک لایه در حالتی است که زاویه الیاف با راستای نیرو زاویه  $26/5^\circ$  می‌سازد.

بطور کلی رابطه بالا نشان می‌دهد که حداکثر  $10$  لایه برای تحمل حداکثر تنش عمودی وارد به جزء در نظر گرفته شده لازم است. البته ذکر این نکته ضروری است که این

این اساس می‌توان گفت، محدودیت‌های حاصل از شرایط استفاده از روش جمع آثار، می‌بایستی بر روی ترتیب لایه‌چینی‌ها اعمال شود. در این راستا باید به این نکته توجه داشت که بارهای اعمالی به یک چندلایه، اثرات متفاوتی در هر لایه می‌گذارد، بطوری که در پاره‌ای از موارد باعث تغییر شکل ناخواسته سازه شده، که نه به علت عدم استحکام آن، بلکه بخاطر نوع لایه‌چینی آن صورت می‌گیرد. از اینرو می‌بایستی با شناخت و تفکیک دقیق نیروهای وارده، و همچنین تنش‌های حاصل از آنها، اثراتی را که روی چندلایه ایجاد می‌کنند، تعیین کرد. اما سؤال اینجا است که این اثرات را چگونه می‌توان بر اساس نوع بارگذاری پیدا کرد و از طرف دیگر چگونه می‌توان اثرات منفی را حذف کرد. برای پاسخ‌گویی به این سؤال می‌توان با استفاده از ماتریس‌های A، B و D که حاصل تئوری کلاسیک صفحات لایه‌ای می‌باشند، بهره برد. در شکل ۷ نحوه تأثیرگذاری هر کدام از ضرایب ماتریس سختی‌های A، B، D نشان داده شده است.



شکل (۷): تأثیر ضرایب ماتریس‌های سختی بروی

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{bmatrix} \quad \text{عکس‌العمل صفحه}$$

این تغییرات در واقع خمیدگی‌ها و اعوجاج‌های صفحه میانی را در اثر بار  $N_x$  نشان می‌دهند. بر اساس این شکل بدیهی است برای از بین بردن هر اثری که در طرح ما نامطلوب است، کافی است ضریب مربوط به آن اثر صفر منظور گردد، یعنی به عبارتی لایه‌چینی صفحه چند لایه به طریقی صورت گیرد که این ضرایب در نهایت صفر شوند. اما سؤال اینجا است که کدام اثرها نامطلوب هستند. برای پاسخ به این سؤال تعریف زیر را می‌توان بر اساس رفتار مکانیکی مواد همسانگرد ارائه داد.

اما همانطور که در قسمت نتایج بخش ۲ بیان شد، استفاده از استحکام لایه‌های  $45^\circ$ ، یک طراحی در حاشیه امن محسوب می‌شود که در اینجا از آن استفاده شده است. در این مرحله با استفاده از نتایج بدست آمده می‌توان چند لایه موردنظر را تشکیل داده و در مورد آرایش لایه‌ها تصمیم‌گیری کرد. آنچه که در این بخش از طراحی حائز اهمیت است، این است که ترتیب لایه‌ها نباید محدودیت‌های مربوط به استفاده از روش جمع آثار را نقض کند. بطور کلی این محدودیت‌ها عبارتند از:

- ۱- تنش‌های موجود نباید از حد تناسب ماده تجاوز کنند،
- ۲- مقطع مورد استفاده در تحلیل نباید به نقاط اثر نیروهای مفروض خیلی نزدیک باشد و
- ۳- تغییر شکل‌های ناشی از یکی از بارگذاری‌ها نباید تأثیری بر تعیین تنش‌های ناشی از بارگذاری‌های دیگر داشته باشد.

محدودیت‌های ۱-۲ مواردی هستند که در تحلیل تمام سازه‌ها از جمله سازه‌هایی که متشکل از مواد همسانگرد می‌باشند و چه آنهایی که از مواد اورتوتروپیک ساخته شده‌اند، می‌بایستی رعایت شوند. اما محدودیت سوم در طراحی سازه‌های متشکل از مواد اورتوتروپیک بحرانی‌تر است و نیاز به توجه بیشتر دارد. با توجه به این محدودیت و شرایط سازه‌هایی که از صفحات چندلایه ساخته شده‌اند، باید گفت این موضوع در این قبیل سازه‌ها، شرایط را برای استفاده از روش جمع آثار سخت‌تر می‌کند چرا که در صفحات چند لایه، زمانی که یک لایه در یک بارگذاری دچار تغییر شکل می‌شود، ممکن است بر چگونگی تعیین تنش در لایه‌های دیگر، چه در همان بارگذاری و چه در بارگذاری‌های دیگر تأثیر بگذارد. بطور مثال اگر یک چندلایه تحت بارهای  $N_x$  و  $N_{xy}$  قرار گیرد و لایه‌های  $45^\circ \pm$  دچار کرنش برشی شوند، این پدیده در میزان کرنش‌های طولی لایه‌های  $0^\circ$  که تحت این بارگذاری هستند، اثر گذاشته و تنش‌های ایجاد شده در این لایه‌ها را برحسب دوری و یا نزدیکی آنها از لایه‌های  $45^\circ \pm$  تغییر می‌دهند. از اینرو در هنگام استفاده از این روش باید اثر کرنش لایه‌ها را بر یکدیگر از بین برد. این مسئله عموماً بوسیله الگوی چینش لایه‌ها قابل حل است. بر



در اینجا لازم به ذکر است، آنچه که در مورد محدودیت‌های مربوط به چینش لایه‌ها مطرح شد، برای آن دسته از طراحی‌هایی است که در آنها، سازه بر اساس بارهای وارده تنها مجاز به عکس‌العمل‌های متعارف می‌باشد. اما در حالاتی که نیاز طرح به استفاده از خمش‌ها، کرنش‌ها و یا اعوجاج‌هایی است که حاصل چیدمان‌های مختلف لایه‌ای می‌باشد، الگوهای متنوعی موجود است که می‌توان از آنها استفاده کرد. نکته‌ای که در این شرایط حائز اهمیت است آن است که، با توجه به اینکه در روش جمع آثار، اثر تنش‌های اعمالی از طرف دیگر لایه‌ها بر روی هر گروه از لایه‌ها در نظر گرفته نشده است، این امکان وجود دارد که تخمین بدست آمده برای هر گروه از لایه‌ها، جوابگوی تنش‌های اعمالی بر روی لایه‌های بحرانی نباشد. از اینرو در زمان استفاده از الگوهای چینشی که محدودیت‌های اصل برهم نهی را رعایت نمی‌کنند، تحلیل سازه و اطمینان از عدم واماندگی کلیه لایه‌ها امری ضروری بنظر می‌رسد.

#### نتیجه‌گیری

بطور کلی با توجه به اینکه در طراحی سازه‌های کامپوزیتی، دو فرآیند تصمیم‌گیری موازی، یعنی تعیین و آرایش مواد تشکیل دهنده و همچنین طراحی ابعادی سازه مطرح است، مجهولات بسیاری وجود دارد که به هنگام طراحی می‌بایستی تعیین گردند. آنچه که در این مطالعه بدست آمد روشی بسیار ساده برای ارائه پیشنهاد اولیه است. در این روش که براساس تعیین سهم هر گروه از لایه‌ها در تحمل بارهای وارده و بر مبنای روش جمع آثار می‌باشد، نادیده گرفتن مباحث مختلفی از جمله وجود تنش‌های بین لایه‌ای و همچنین اثر هر گروه از لایه‌ها در تحمل بارهای مربوط به گروه‌های دیگر، دقت این محاسبات را در حد یک تخمین اولیه کاهش می‌دهد. ولی در هر صورت از آنجایی که این تخمین یک برآورد دست بالا محسوب می‌شود، در مواردی که مسائل بهینه‌سازی مطرح نباشد، قابل قبول خواهد بود.

از جمله نتایج دیگری که در این بررسی بدست آمد، چگونگی پیچش لایه‌های  $\pm 45^\circ$  در هنگام ساخت سازه می‌باشد. بر این اساس اگر تعداد لایه‌های  $\pm 45^\circ$  با استفاده از رابطه (۱۳) محاسبه گردد، با توجه به اینکه در این حالت، بر مبنای زاویه الیاف، کمترین استحکام این گروه از لایه‌ها

کرنش‌هایی که بر اثر هرنوع بارگذاری ایجاد می‌شوند، می‌بایستی از همان نوع بارگذاری باشند. در این رابطه بطور دقیقتری می‌توان گفت:

۱- زمانی که صفحه تحت بارهای طولی قرار دارد  $(N_x, N_y)$  می‌بایستی تنها در راستای طولی و عرضی دچار کرنش شود (این قاعده در سازه‌های متشکل از مواد همسانگرد نیز برقرار است). این بدان معنا است، زمانی که صفحه‌ای تحت این نوع بارگذاری قرار دارد، نباید دچار کرنش‌های برشی  $(\epsilon_{xy})$ ، خمیدگی و اعوجاج  $(K_x, K_y)$  و همچنین پیچش  $(K_{xy})$  شود. از اینرو می‌توان نتیجه گرفت که در این حالت می‌بایستی:

$$A_{16} = B_{11} = B_{12} = B_{16} = 0 \quad \text{برای } (N_x)$$

$$A_{26} = B_{21} = B_{22} = B_{26} = 0 \quad \text{برای } (N_y)$$

۲- زمانی که صفحه‌ای تحت بار برشی  $(N_{xy})$  می‌باشد، تنها می‌بایستی دچار کرنش برشی صفحه‌ای شود (این قاعده نیز در سازه‌های متشکل از مواد همسانگرد برقرار است). این مسئله بدان معنا است که، زمانی که صفحه تحت این بارگذاری است، نباید دچار کرنش‌های طولی  $(\epsilon_x, \epsilon_y)$ ، خمیدگی و اعوجاج  $(K_x, K_y)$  و همچنین پیچش  $(K_{xy})$  شود. بنابراین، در این حالت می‌بایستی:

$$A_{61} = A_{62} = B_{61} = B_{62} = B_{66} = 0 \quad \text{برای } (N_{xy})$$

بر این اساس باید گفت در تعیین الگوی چینش چند لایه‌هایی که تعداد لایه‌های آنها بر اساس روش جمع آثار بدست آمده است، همواره باید به دنبال الگوهایی بود که براساس نیاز طرح، تمام و یا بخشی از شرایط فوق را ارضاء نماید. از اینرو بطور مثال برای یک صفحه چند لایه، که تحت یک بارگذاری مرکب شامل  $N_x$ ،  $N_y$  و  $N_{xy}$  قرار دارد، چینش متقارن و متوازن لایه‌ها می‌تواند تمام شرایط فوق را تامین نماید.

در نظر گرفته شده است، زاویه حقیقی بین راستای نیرو و راستای الیاف (هرچه که باشد) لایه‌ها استحکام بیشتری را ارائه می‌دهند، از اینرو در این شرایط پیچش لایه‌های  $\pm 45^\circ$  در هر دستگاه مختصاتی که برای تولید کننده عملی باشد، قابل قبول خواهد بود.

### مراجع

1. Webber, J.P.H. and Morton, S.K. "An Expert System for Laminated Plate Design, Using Composite Materials", *Composite Structures*, Vol. 37, pp. 1051-67, 1990.
2. Wu, C.M.L., Webber, JPH, and Morton S.K. "A Knowledge Based Expert System for Laminated Composite Structural Design", *Aeronautical J.*, Vol. 95, pp. 1-20, 1991.
3. Wu, C.M.L. "Bolted Joints in a Laminated Composite Structures Design Expert System", *Composite Structures*, Vol. 22, pp. 63-85, 1992.
4. Akira, T., Naonobu, S. and Mitsunori, M. "Object Oriented Approach to Optimize Composite Laminated Plate Stiffness with Discrete Ply Angles", *J. of Composite Materials*, Vol. 30, pp. 1020-41, 1996.
5. Akira, T. and Raphael, T.H. "Stacking Sequence Optimization by a Genetic Algorithm with a New Recessive Gene Like Repair Strategy", *Composite, Part B*, Vol. 29B, pp. 277-85, 1998.
6. Park, J.H., Hwang, J.H., Lee C.S. and Hwang W. "Stacking Sequence Design of Composite Laminates for Maximum Strength, using Genetic Algorithm", *Composite Structures*, Vol. 52, pp. 217-31, 2001.
7. Kim, J.S., Kim, G.G. and Hong, C.S. "Design of Composite Laminates, Using Expert System and Enumeration Method", *J. Korean Soc. Compos Mater*, Vol. 11, pp. 48-49 [in Korean], 1998.
8. Kim, C.G., Kim, J.S. and Hong, C.S. "Stacking Sequence Design of Composite Laminate, Using Expert System", *ICCE-5, Las Vegas, NY*, 5-11th July, 1998.
9. Kim, J.S., Kim, G.G. and Hong, C.S. "Knowledge Patchwise Layup Design Method", *J. Korean Soc. Aeronaut Space Sci*, Vol. 27, No. 3, pp. 43-52 [in Korean], 1999.