فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال هفتم، شماره بیست و چهارم
زمستـان ۱۳۹۳

مدل‌های مولتی فرکتال در علوم مالی: ریشه، ویژگی‌ها و کاربردهای آنها

فریدون رهنمای رودپشتی[۱]
مهدیه کلانتری دهقی[۲]

تاریخ دریافت: ۹۳/۶/۱۰ تاریخ پذیرش: ۹۳/۷/۲۵

چکیده

تشخیص فرآیند حاکم بر بازدهی‌های بازار سهام به منظور اخذ تصمیم بهینه و کاهش هزینه ریسک اهمیت فراوانی برای سرمایه‌گذاران و سیاست‌گذاران مالی دارد. اهمیت تحلیل بازارها و تلاش برای درک بهتر آن‌ها موجب شد که پس از به چالش کشیده شدن مفروضات بازار کارا و کشف حقایق جهان شمول دنباله‌های پهن، خوشه‌بندی نوسانات در سری‌های زمانی مالی، تحلیل‌گران از مدل‌های با خواص کاملاً تصادفی با توزیع نرمال به سمت مدل‌های لوی و مولتی فرکتالی متمایل شوند. همین امر سبب گسترش استفاده از مدل‌های مولتی فرکتالی در بخش‌های مختلف بازار شد. این مقاله به مرور روش مولتی فرکتال که در سال‌های اخیر برای پیش بینی و مدلسازی نوسان پذیری قیمت[۱] گسترش یافته، پرداخته است. در ابتدا ریشه این روش که از مدل‌های مشابه جریانات آشفته[۲] در فیزیک آماری، نشأت گرفته شده است معرفی و سپس جزئیاتی در مورد مشخصات و ویژگی‌های مدل‌های سری زمانی مولتی فرکتالی در مالی، روش‌های در دسترس برای تخمین آن‌ها و وضعیت کنونی کاربردهای تجربی این مدل‌ها ذکر می‌شود. نتایج پژوهش نشان می‌دهد که پویایی بازار سرمایه موجب شده است که رویکردها، شیوه‌ها و مدل‌های تحلیل بازار در حال تحول باشد، همچنین در خوشه‌بندی نوسانات سری-های زمانی مالی، مقیاس‌های کوچکتر مدنظر قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: فرآیندهای مولتی‌فرکتال، معیارهای تصادفی، نوسان‌پذیری تصادفی، پیش‌بینی.

۱- استاد و عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات rahnama.roodposhti@gmail.com
۲- دانشجوی دکتری مدیریت مالی دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات (مسئول مکاتبات) mahdiye_kl@yahoo.com

۱- مقدمه

یکی از مهمترین وظایف اقتصاد مالی مدلسازی و پیش‌بینی نوسانات قیمت دارایی‌های ریسکی است. از نظر تحلیل‌گران و سیاست‌گذاران نوسان‌پذیری قیمت یک متغیر کلیدی است که به درک نوسانات[۳] بازار کمک می‌کند. بنابراین، تحلیل‌گران نیاز دارند تا پیش‌بینی درستی از نوسان‌پذیری قیمت به عنوان یک ورودی ضروری برای انجام وظایفی چون مدیریت ریسک، تخصیص پرتفو، ارزیابی ارزش در معرض خطر و قیمت‌گذاری اختیار معامله و قراردادهای آتی داشته باشند. نوسان‌پذیری بازار دارایی نیز نقش مهمی را در سیاست‌های پولی بازی می‌کند. عواقب بحران مالی اخیر بر اقتصاد جهانی نشان داد که چقدر نوسان‌پذیری بازارهای مالی در اجرای سیاست پولی موثر، مهم است.

در بازارهای مالی، نوسان‌پذیری قیمت معیاری برای سنجش نوسانات قیمت یک ابزار مالی در طول زمان است. نوسان‌پذیری را نمی‌توان به‌طور مستقیم مشاهده کرد، بلکه آن را باید با استفاده از معیارهای مناسب یا به عنوان جزئی از یک مدل قیمت‌گذاری دارایی تصادفی[٤] تخمین زد. به عنوان جزئی از یک مدل، نوسان‌پذیری ممکن است خود یک متغیر تصادفی پنهان[٥] (همانطور که در مدل‌های نوسان-پذیری تصادفی و همچنین در اکثر مدل‌های مولتی فرکتال است) یا یک متغیر قطعی در زمان t باشد (همانطور که در مدل‌هایی از نوع GARCH است). برای داده‌های تجربی، نوسان‌پذیری، به‌سادگی از طریق واریانس نمونه یا انحراف استاندارد نمونه محاسبه می‌شود. راه دیگر برای اندازه‌گیری نوسان-پذیری روزانه استفاده از مربع بازده‌ها یا هر گونه توان مطلق[٦] از بازده‌هاست. در واقع، توان‌های متفاوت ویژگی‌های متفاوتی را نشان می‌دهد و مدل-های مولتی‌فرکتال برای چیره شدن بر دامنه کاملی از رفتار گشتاورهای مطلق[۷] طراحی شده است.

اخیراً، اندرسون و همکاران[۸] (۲۰۰۱) مفهوم نوسان‌پذیری تحقق‌یافته[۹] (RV) را به عنوان یک معیار جایگزین برای نوسان‌پذیری قیمت دارایی‌ها توسعه داده‌اند. در حقیقت RV برای تخمین نوسان-پذیری روزانه از جمع مجذور بازده‌های روزانه استفاده می‌کند. مبنای این روش را تئوری تغییرات درجه دوم[۱۰] تشکیل می‌دهد. بر اساس این تئوری، RV منجر به یک تخمین‌زن ناپارامتریک سازگار و با کارایی بالا برای نوسانات بازده دارایی‌ها در یک فاصله زمانی گسسته و تحت مفروضات نسبتاً اندک[۱۱] می‌شود. معیارهای نوسان‌پذیری بازارهای مالی ویژگی‌های برجسته‌ای را نشان می‌دهند که از آن‌ها به عنوان حقایق تجربی نام برده می‌شود، این حقایق عبارتند از: خوشه‌بندی نوسانات[۱۲]، عدم تقارن[۱۳] و برگشت بازده به میانگین[۱٤]، حرکت همزمان نوسان‌پذیری دارایی‌ها و بازارهای مالی، همبستگی قوی‌تر نوسانات نسبت به بازده‌های خام، دنباله‌های (نیمه) سنگین[۱٥] توزیع بازده‌ها، رفتار مقیاس‌بندی غیرعادی[۱٦]، تغییر شکل توزیع بازده‌ها در افق‌های زمانی مختلف، اثرات اهرمی و فصلی بودن[۱۷]. در بخش۳ این مفاهیم به تفصیل توضیح داده می‌شوند.

در طول دهه‌های گذشته، بخش عظیمی از مطالعات تئوریک و تجربی صرف فرموله کردن مدل‌های نوسان‌پذیری مناسب شده است. با مطالعه معروف مندلبرت بر روی نوسانات قیمت‌های پنبه در اوایل دهه شصت (مندلبرت[۱۸] ۱۹٦۳)، اکنون اقتصاددانان می‌دانند که حرکت برونی هندسی استاندارد[۱۹] که بوسیله باچلیر[۲۰] (۱۹۰۰) مطرح شد

قادر به توضیح این حقایق تجربی نیست. به خصوص، دنباله پهن و همبستگی قوی مشاهده شده در نوسانات که در تناقض شدید با نوسانات ناهمبسته "ملایم[21]"ای است که بطور ضمنی توسط مدل‌های تصادفی برونی مطرح شده است. مدلسازی اقتصادی تغییرات قیمت دارایی‌های دارای نوسان-پذیری متغیر در طول زمان، با خانواده واریانس ناهمسانی شرطی خود اتورگرسیو عمومی[22] (GARCH) و مدل‌های نشأت گرفته از آن آغاز شد (انگل[23]،۱۹۸۲).

تمرکز این مقاله بر ارائه یک راه جایگزین و جدید برای مدلسازی و پیش بینی نوسانات است که در طول ۱۵ سال گذشته در ادبیات معرفی شده و بسط یافته است. برخلاف مدل‌های قبلی، منبع ناهمگنی نوسانات در مدل‌های جدید از تغییر زمانی نظم محلی در مسیر قیمت ناشی می شود (فیشر و همکاران[24]، ۱۹۹۷). پیش زمینه این مدل‌ها، تئوری معیارهای مولتی فرکتال[25] است که توسط مندلبرت (۱۹۷٤) برای مدلسازی جریانات آشفته مطرح شد. فرآیندهای مولتی فرکتالی جریان گسترده ای از ادبیات را از فیزیک آماری وارد مالی کردند و مفاهیم و مدل‌های اساسی را توسعه دادند.

کارهای اولیه بیشتر به شباهت‌های مسلم نوسانات و تلاطم سیال[26] اشاره داشته‌اند. این در حالی است که استفاده از مفهوم مولتی‌فرکتال در مدلسازی مالی پس از مطالعه مندلبرت در سال ۱۹۹۷ آغاز شد.

پس از مدل مولتی‌فرکتال بازده دارایی‌ها[27] (MMAR) و مدل‌های نشأت گرفته از آن که توسط مندلبرت، کالوت و فیشر معرفی شدند، مدل‌های علّی، تکرارشونده با اصول طراحی مشابه مانند مدل مولتی‌فرکتال مارکوف-سوئیچینگ[28] (MSM) و مدل گشت تصادفی مولتی‌فرکتال[29] (MRW) مطرح شدند. این مدل‌ها نسل دوم مدل‌های مولتی فرکتال را تشکیل می‌دهند و در کاربردهای تجربی تا حدی جایگزین نسل اولیه MMAR شدند (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

ادامه این مقاله به شکل زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲ روش شناسی پژوهش مورد بررسی قرار می گیرد. در بخش ۳ مبانی علمی و پیشینه پژوهش بحث می شود که شامل مروری بر حقایق تجربی داده‌های مالی و بحث در مورد پتانسیل طبقات مختلف مدل‌های GARCH و نوسان‌پذیری تصادفی برای چیره شدن بر این حقایق تجربی است. علاوه بر این مفهوم پایه معیارها و فرآیندهای مولتی‌فرکتالی معرفی و مروری بر مشخصات مدل‌های نوسان‌پذیری مولتی فرکتال صورت خواهد گرفت. بخش ٤ روش‌های مختلفی را برای تخمین مدل‌های مولتی فرکتال و پیش‌بینی نوسانات آینده معرفی می‌کند. بخش ۵ مروری بر نتایج تجربی کاربرد و عملکرد مدل‌های مولتی-فرکتالی دارد و در بخش ٦ به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲- روش شناسی پژوهش

پژوهش حاضر به روش توصیفی مبتنی بر رویکرد شناخت تاریخی با استفاده از مبانی علمی و تحقیقات پیشین ضمن بهره گیری از مقالات پایان نامه های موجود به شیوه کتابخانه ای اجرا شده است که هدف آن ارتقاء دانش در حوزه علوم مالی است.

۳- مبانی علمی و پیشینه پژوهش

۱-۳- حقایق تجربی داده‌های مالی

از دهه شصت میلادی با دسترسی به سری‌های زمانی با فرکانس بالا برای بسیاری از بازارهای مالی، ویژگی‌های آماری آنها موضوع مورد بررسی در بخش وسیعی از ادبیات شد. دو ویژگی جهان شمول اصلی یا "حقیقت تجربی" که پژوهشگران در طی بررسی‌های خود به آنها دست یافتند، بیان می کنند که در عمل هر سری زمانی دارای دو ویژگی "دنباله پهن[۳۰]" و "خوشه بندی نوسانات" است. در حقیقت انگیزه اصلی استفاده از مدل‌های مولتی فرکتال تا حد زیادی ناشی از این دو ویژگی است، اما ویژگی مولتی فرکتالی ویژگی ظریف‌تری است که از دهه نود به تدریج به عنوان یک حقیقت تجربی اضافی ظهور کرده است. در ادامه به مروری کوتاه بر تاریخچه پیدایش این دانش و تعریف این ویژگی‌ها و همچنین برخی از ویژگی‌های آماری کمتر شناخته شده که در بازده‌های مالی بطور معمول یافت می شوند، پرداخته خواهد شد.

۱-۱-۳- دنباله پهن

این ویژگی مربوط به شکل توزیع غیرشرطی سری زمانی بازده‌ها است. اولین "فرضیه" در مورد توزیع تغییرات قیمت بوسیله باچیلیر (۱۹۰۰) فرموله بندی شد، وی در تز دکتری خود فرض کرد که تغییرات قیمت به صورت نرمال توزیع شده اند. این فرض را می توان بوسیله قانون اعداد بزرگ توجیه کرد. در حالی که این ایده به نظر قابل قبول و باور می رسد و توزیع گوسی حاصل برای بسیاری از اهداف کاربردی به سهولت قابل استفاده می باشد، مندلبرت (۱۹۶۳) اولین کسی بود که نشان داد داده-های تجربی بطور قابل تشخیصی غیرگوسی هستند و نمودار آماری آنها دارای کشیدگی بیش از حد و جرم احتمال بالاتر در مرکز و دنباله‌های آنها، نسبت به توزیع نرمال است. این مسأله را می توان با هر مجموعه داده از بازار سهام، ارز خارجی یا هر داده مالی دیگر که به اندازه کافی طولانی باشد آزمون و اثبات کرد که توزیع گوسی تقریباً همیشه با اهمیت آماری بالا رد می شود.

مندلبرت (۱۹۶۳) و فاما[۳۱] (۱۹۶۳) در نتیجه پژوهش‌های خود برای توضیح دنباله‌های پهن، مفهومی را که به آن قانون پایداری لوی[۳۲] می گفتند، پیشنهاد دادند. این قانون از این حقیقت نشأت می گرفت که در نسخه تعمیم یافته از قانون حد مرکزی، که از فرض گشتاور دوم محدود صرف نظر می کند، جمع متغیرهای تصادفی مستقل و یکسان توزیع شده به توزیع‌های کلی‌تر همگرا می‌شوند. برای نزدیک به سه دهه مدل پایداری لوی بدون چون و چرا پابرجا باقی ماند (اگرچه در برخی از زمینه‌های اقتصاد مالی پژوهشگران همچنان ترجیح می دادند که از فرض نرمال بودن در مدل کاری‌شان استفاده کنند)، و اقتصاددانان بسیاری برای توسعه تکنیک‌های آماری تخمین پارامترهای توزیع‌های لوی مشارکت کردند (فاما و رول،[۳۳] ۱۹۷۱). هرچند پیشرفت‌های اخیر در مالی تجربی اجازه رد این فرضیه دیرینه را داده است.

بینش‌های جدید اساساً ناشی از یک دیدگاه متفاوت است: این دیدگاه به جای تلاش برای مدلسازی کل توزیع، اجازه می دهد که "دنباله‌ها خودشان صحبت کنند". مبانی ریاضی این روش را تئوری مقادیر حدی آماری[۳۴] تشکیل می دهد. ایده اصلی این تئوری این است که دنباله‌ها در نمونه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و یکسان توزیع شده از یکی از قوانین زیر پیروی می‌کنند: بطور نمایی

کاهش می یابند یا بر اساس قانون توانی[35] کاهش می یابند. دنباله‌های پهن اغلب به عنوان مترادف برای دنباله‌هایی که بر اساس قانون توانی کاهش می یابند استفاده می شود.

کلیه توزیع‌ها می توانند توسط شاخص دنباله (α)، که این شاخص در محدوده $\alpha \in (0,\infty)$ قرار دارد، فهرست بندی شوند. تمام توزیع‌هایی که دارای شاخص دنباله کمتر از ۲ هستند، حاصل جمع شان به توزیع پایداری لوی همگرا می شوند در حالی که حاصل جمع توزیع‌هایی که دارای شاخص دنباله α بزرگتر از ۲ می باشند به توزیع گوسی همگرا می شوند.

جنسن و دوریز[36] (۱۹۹۱) و لوکس[37] (۱۹۹۶) مثال‌هایی از مطالعاتی هستند که در طول دهه ۹۰ صورت گرفتند و از مدل‌های نیمه پارامتریک استنتاجی برای تخمین شاخص دنباله، بدون آنکه فرض خاصی برای شکل کل توزیع داشته باشند، استفاده کردند. نتیجه این مطالعات و مطالعات دیگر نشان می دهد که شاخص دنباله α در دامنه ۳ تا ٤ قرار دارد، که در حال حاضر این مسأله به عنوان یک واقعیت تجربی شناخته شده است (گوپلام و همکاران،[38] ۱۹۹۷). بر مبنای این نتایج، فرضیه پایداری لوی می تواند رد شود (چرا که مطالعات امکان اینکه α کوچکتر از ۲ باشد را رد کردند).

حجم زیادی از ادبیات، ترکیبی از توزیع‌های نرمال و دامنه وسیعی از توزیع‌های تعمیم یافته را آزمون کرده‌اند (ابرلین و کلر،[39] ۱۹۹۵) نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که توزیع بازده‌های روزانه، کاملاً نزدیک به توزیع t-student با درجه آزادی ۳ است (کودیجک و همکاران،[40] ۱۹۹۲).

۲-۱-۳- خوشه بندی نوسانات

همگرایی کند سری‌های زمانی بازده‌ها به توزیع نرمال را می‌توان به وجود وابستگی در این سری‌ها نسبت داد. در واقع، وابستگی، با کاهش چشمگیر سرعت همگرایی، منجر به طولانی شدن رفتار پیش مجانبی می‌شود. این وابستگی در بسیاری از مطالعات رسماً بیان شده است و در حقیقت، بسادگی در قدر مطلق بازده، مجذور بازده، یا هر اندازه گیری دیگر از نوسانات (نوسان پذیری) قابل مشاهده است. در سری‌های زمانی به اندازه کافی طولانی، برای وقفه‌های زمانی (داده‌های روزانه) تا چند سال نیز می‌توان خودهمبستگی با اهمیت را یافت. این مسأله با عنوان خوشه بندی نوسانات یا "دوره‌های آشفته (آرام) با احتمال زیاد بوسیله دوره-های آشفته (آرام) دنبال می شوند یا برعکس" توصیف شده است. هرست[41] اولین کسی بود که به وجود این واقعیت پی برد. وی در پروژه ساخت سدی بر روی رود نیل (در نتیجه تحقیقات خود به منظور تخمین میزان آب ورودی به سد) به این نتیجه رسید که میزان آب ورودی از فرآیند تصادفی پیروی نمی‌کند بلکه طغیان‌های بزرگتر از میانگین توسط طغیان‌های مشابه دنبال می‌شود و طغیان‌های کوچکتر از میانگین توسط طغیان‌های مشابه (کوچکتر از میانگین) دنبال می‌شود (رهنمای رودپشتی و پرهام، ۱۳۹۱).

مطالعه اوسلوس و همکاران[42] در سال ۱۹۹۹ مثالی از مطالعه‌ای است که چنین اثراتی را در بازارهای مالی شناسایی کرده‌اند. لو[43] در مطالعه‌ای در سال ۱۹۹۱ آزمون آماری دشواری را برای بررسی وابستگی بلندمدت در بازده‌ها پیشنهاد داد که در اکثر موارد وجود حافظه بلندمدت را برای بازده خام تأیید

نمی‌کرد، اما بطور قوی شواهد مهمی از وجود حافظه بلندمدت در مجذور بازده یا بازده کامل یافت. با توجه به طبقه بندی انواع رفتار دنباله، حافظه کوتاه مدت با کاهش نمایی تابع خود همبستگی پدیدار می شود درحالی که زمانی که از حافظه بلندمدت صحبت می شود، این کاهش از تابع توانی پیروی می کند. (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

۳-۱-۳- مدل‌های پایه: گارچ و نوسانات تصادفی

از دهه ۸۰ خوشه‌بندی نوسانات حجم وسیعی از ادبیات اقتصادسنجی مالی که در ارتباط با طبقه جدید فرآیندهای تصادفی است (که بر وابستگی گشتاورهای دوم چیره می شوند) را تشکیل دادند. انگل (۱۹۸۲) روش ARCH (مدل ناهمواریانسی شرطی اتورگرسیو) را که بعدها توسط بولرسلو[٤٤] به مدل GARCH توسعه پیدا کرد، معرفی کرد. پس از بولرسلو پژوهشگران دیگر مدل GARCH را به منظور در بر گرفتن بهتر حقایق تجربی توسعه دادند. در میان آن‌ها می توان به مدل‌های زیر اشاره کرد: مدل GARCH نمایی (EGARCH) که توسط نلسون[٤٥] (۱۹۹۱) به منظور در نظر گرفتن رفتار نامتقارن بازده‌ها معرفی شد، مدل GARCH آستانه[٤٦] (TGARCH) رابمنانجارا و زاکویان[٤٧] (۱۹۹۳) که اثرات اهرمی را در محاسبات به حساب می آورد، مدل GARCH تغییر رژیم[٤٨] RS-GARCH که توسط کای[٤٩] (۱۹۹٤) توسعه یافت، و GARCH یکپارچه[٥٠] IGARCH که توسط انگل و بولرسلو (۱۹۸٦) به منظور در بر گرفتن پایداری بالایی که در سری‌های زمانی بازده‌ها مشاهده شده است، معرفی شد.

برای چیره شدن بر شوک‌های تصادفی فرآیند واریانس، تیلور[٥١] (۱۹۸٦) طبقه‌ای از مدل‌های نوسان‌پذیری تصادفی[٥٢] (SV) را معرفی کرد. این روش به خوبی پالایش و در بسیاری از طرق گسترده شد. فرآیند SV (نوسان پذیری تصادفی) بسیار منعطف‌تر از مدل GARCH است و بخاطر همزیستی شوک‌ها با نوسان‌پذیری قیمت و بازده‌ها، ترکیبات بیشتری را فراهم می‌کند (گاوریشچاکا و گانگولی،[٥٣] ۲۰۰۳). از لحاظ ویژگی‌های آماری، یکی از اشکالات مهم فرمول‌های ARCH و SV کاهش نمایی خودهمبستگی معیارهای نوسان‌پذیری است که در تعارض با خودهمبستگی بلندمدتی است که قبلاً توسط پژوهشگران بسیاری ذکر شده بود. در واقع هم GARCH پایه و هم مدل SV پایه بیشتر وابستگی کوتاه مدت را در بر می گیرند تا وابستگی بلندمدت.

برای در برگرفتن حافظه بلندمدت، مدل‌های GARCH و SV با در نظر گرفتن تعداد نامحدودی از دوره‌های نوسان با وقفه، به جای تعداد محدودی از وقفه‌ها که در فرمول پایه آن‌ها وجود دارد، توسعه یافته‌اند. برای رسیدن به ویژگی حافظه بلندمدت یک عملگر تفاضلی کسری در هر دو استفاده شده است که منجر به ایجاد مدل GARCH یکپارچه کسری (FIGARCH) بیلی و همکاران[٥٤] (۱۹۹٦) و مدل نوسان پذیری تصادفی حافظه بلندمدت بریدت و همکاران[٥٥] (۱۹۹۸) شده است. بسط دیگری از مدل ARCH که به آن مدل ARCH ناهمگن (HARCH) می گویند توسط دکورگنا و همکاران (۱۹۹۸) معرفی شد. این مدل بر اساس این یافته که نوسانات در مقیاس‌های زمانی کوچک می‌توانند، در یک دامنه بزرگ تر، توسط نوسانات کلان توضیح داده شوند و برعکس، توسعه یافته است (مولر و همکاران،[٥٦] ۱۹۹۷). همانطور که خواهیم دید مدل‌های مولتی فرکتال ساختار نسبتاً مرتبطی دارند اما سلسه مراتب

اجزاء نوسان در آن‌ها به گونه‌ای متفاوت مدلسازی می‌شوند.

٤-١-٣- یک حقیقت تجربی جدید: مولتی فرکتال

کاهش هذلولی شکل تابع توزیع احتمال غیرشرطی و همچنین کاهش هذلولی شکل خودهمبستگی بسیاری از معیارهای نوسان‌پذیری (قدر مطلق بازده، مجذور بازده)، در حوزه قوانین مقیاس‌بندی علوم طبیعی قرار می‌گیرند. شناسایی چنین قوانین مقیاس‌بندی جهان شمولی در زمینه‌ای مانند مالی علایق دانشمندان علوم طبیعی را برای جستجوی بیشتر در رفتار داده‌های مالی و توسعه مدل‌هایی برای توضیح این ویژگی‌ها برانگیخت (منتگنا و استنلی،[٥٧] ١٩٩٦). بدنبال این بررسی‌ها، مولتی‌فرکتالی، مقیاس‌بندی چندگانه یا مقیاس‌بندی غیرعادی (نامتشابه) به تدریج در قرن نوزدهم به عنوان یک مشخصه نافذتر داده‌های مالی ظهور کرد و منجر به تطابق مکانیزم‌های ایجاد شده برای فرآیندهای مولتی فرکتال، از علوم طبیعی در مالی تجربی شد.

پیش از تعریف مولتی فرکتالی یا مقیاس بندی چندگانه، ابتدا مفهوم پایه فرکتالی یا مقیاس بندی تعریف می شود. ویژگی فرکتالی، عبارت است از عدم تغییر برخی از ویژگی‌ها تحت فرآیندهای خودتکراری مناسب. ویژگی فرکتالی بیان می کند که برخی از توزیع‌ها دارای ویژگی ثبات مقیاس هستند. این بدین معنی است که رفتار آن‌ها در طول مقیاس-های مختلف، تحت تبدیل‌های مناسب، حفظ می شود. به بیان کلی‌تر، یک فرآیند باید از قانونی شبیه قانون زیر پیروی کند تا به عنوان یک فرآیند با مقیاس ثابت شناخته شود:

$$x(ct) = c^{H}x(t) \qquad (١)$$

در این فرمول t معیار مناسب مقیاس‌بندی است (برای مثال زمان یا فاصله). یک مثال از فرآیندهایی که از اصل ثبات مقیاس تبعیت می‌کنند، حرکت برونی جزئی است که در آن x(t) سری مشاهداتی است که در آن 1>H>0 است. H شاخص هرست است که درجه پایداری را نشان می‌دهد. زمانی که H>0.5 سری پایدار، H<0.5 سری ناپایدار و H=0.5 نشان دهنده حرکت برونی است. قانون بالا ساختاری را نشان می‌دهد که تک مقیاسی یا یونی فرکتالی نامیده می‌شود. برای مثال مدل نوسان‌پذیری تصادفی حافظه بلندمدت بریدت و همکاران (١٩٩٨) نمونه ای از این مدل‌هاست.

مولتی فرکتالی یا مقیاس بندی غیر عادی (نامتشابه) اجازه می دهد تا تنها با اضافه کردن رابطه کلی‌تر زیر، تغییری غنی در رفتار فرآیند، در میان مقیاس‌های مختلف، ایجاد شود:

$$x(ct) \overset{d}{=} M(c)x(t) \equiv c^{H(c)}x(t) \qquad (٢)$$

در این فرمول عامل مقیاس بندی M(c)، یک تابع تصادفی است که برای مقیاس‌های متفاوت دارای شکل‌های مختلف است و $\overset{d}{=}$ مشخص کننده شباهت و برابری در توزیع است. آخرین مساوی معادله بالا نشان می‌دهد که تغییر قوانین مقیاس‌بندی می‌تواند به تغییر شاخص H تبدیل شود، بنابراین H دیگر ثابت نیست. در این معادله ماهیت فزاینده تغییرات بین مقیاس‌های مختلف دیده می‌شود: چرا که حرکت از یک مقیاس به مقیاس دیگر از طریق ضرب با عامل تصادفی M(c) صورت می‌گیرد. در زیر مشاهده خواهد شد که معیارها و فرآیندهای مولتی‌فرکتال دقیقاً از طریق تأکید ضمنی بر ماهیت ترکیبی و غیرعلّی این فرآیندها ایجاد می‌شوند.

چند مقیاسی در داده‌های تجربی معمولاً از طریق تفاوت رفتار مقیاس‌بندی گشتاورهای مختلف شناسایی می‌شود:

(۳)

$$E[|x(t,\Delta t)|^q] = c(q)\Delta t^{qH(q)+1} = c(q)\Delta t^{\tau(q)+1}$$

که در این فرمول $x(t,\Delta t)= x(t) - x(t-\Delta t)$ و $c(q)$ و $\tau(q)$ توابع جبری تقریبی گشتاور q می‌باشند. معادله‌ای مشابه نیز می‌توان برای فرآیندهای تک مقیاسه، برای مثال حرکت برونی جزئی ارائه کرد:

$$E[|x(t,\Delta t)|^q] = c^H\Delta t^{qH+1} \quad (٤)$$

بنابراین، برحسب رفتار گشتاورها، فرآیندهای مولتی فرکتالی (مقیاس‌بندی غیرمتشابه[۵۸]) از طریق شکل غیرخطی‌شان (معمولاً مقعر) از مقیاس‌بندی خطی فرآیندهای خود متشابه یونی فرکتال قابل تمایز است. یکی از ابزارهای استاندارد برای تشخیص مولتی‌فرکتالی، بازبینی رفتار مقیاس‌بندی تجربی گشتاورها در مجموع است.

یک روش جایگزین و شاید جامع‌تر برای شناسایی مولتی فرکتالی، نگاه به ضرایب H(q) در معادله ۳ است. درحالیکه ضریب منحصر به فرد H در معادله ٤ ضریب هرست نامیده می‌شود، H در فرآیندهای مولتی‌فرکتال که دارای کثرت و تعدد است به عنوان اجزاء هولدر شناخته می‌شود. در حالیکه H منحصر به فرد ویژگی مقیاس‌بندی عمومی فرآیند اصلی را اندازه‌گیری می‌کند، اجزاء هولدر نرخ‌های مقیاس‌بندی محلی می‌باشند که بر بخش-های مختلف سری زمانی حاکم هستند و منجر می-شوند که ظاهر این سری‌ها ناهمگن (یا متناوب) به نظر برسد. در واقع، مولتی فرکتالی به جای رد H منحصر به فرد برای فرآیندهای یونی فرکتال، بدنبال شناسایی دامنه‌ای از چنین اجزائی است.

در حقیقت، مولتی‌فرکتالی تعمیمی از یافته معروف وابستگی بلندمدت نوسانات است: این یافته بیان می‌کند که معیارهای متفاوت نوسان‌پذیری از طریق درجات متفاوت وابستگی بلندمدت، که رفتار غیرعادی معمول فرآیندهای مولتی‌فرکتالی را منعکس می‌کنند، مشخص می‌شوند. پذیرش چنین رفتاری به عنوان یک حقیقت تجربی جدید، گام بعدی برای طراحی فرآیندهایی خواهد بود که می‌توانند بر این یافته جهان شمول به همراه دیگر حقایق تجربی شناخته شده داده‌های مالی چیره شوند. برای این منظور مدل‌های جدیدی نیاز خواهد بود، چراکه هیچ‌کدام از مدل‌های موجود با این نوع رفتار سازگار نیستند: مدل‌های GARCH و SV تنها کاهش نمایی خودهمبستگی توان‌های مطلق بازده‌ها (وابستگی کوتاه‌مدت) را در بر می‌گیرند در حالی که همتاهای آنان که بر حافظه بلندمدت تأکید دارند (LMSV, FIGARCH) با مقیاس‌بندی یونی‌فرکتال مشخص شده‌اند (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

هرچند هنوز بر سر این موضوع که آیا تابع مقیاس‌بندی و تحلیل طیف هولدر شواهد کافی را برای رفتار مولتی‌فرکتالی فراهم می‌کند یا خیر، تاحدی اختلاف است. برخی از مقالات نشان داده‌اند که مقیاس‌بندی در گشتاورهای بالاتر می‌تواند به آسانی و به صورت ساختگی و بدون هیچ رفتار پراکندگی غیرعادی اساسی بدست آید. بسیار محتمل است که مدل‌های نوسان‌پذیری استاندارد منجر به چند مقیاسی ظاهری شوند که موجب می‌شود تشخیص مولتی فرکتالی واقعی و درست از طریق ابزارهای تشخیصی که در بالا ذکر شد دشوار شود. ظاهراً، این امکان وجود دارد که فرآیندهایی، بدون

نوع خاصی از رفتار (چند-) مقیاسی، طراحی شوند که بسیار نزدیک به (چند-) مقیاسی "درست و واقعی" باشند، بطوریکه این انحرافات هرگز با استفاده از ابزارهای تشخیصی مربوطه تشخیص داده نخواهند شد و دسترسی به داده‌ها را محدود می‌کند (لبارون، ۲۰۰۱ و لوکس، ۲۰۰۱).

از طرف دیگر، اگر بخواهیم چندمقیاسی درست را لحاظ کنیم، تاکنون هیچ راهی برای تجهیز مدل-های GARCH یا SV با این ویژگی، شناخته نشده است. بعلاوه، معرفی اصلاحیه‌های مدل‌های موجود (GARCH, SV) برای تطابق با حقایق تجربی جدید، منجر به تنظیمات به شدت پارامتری می‌شود و زمانی‌که برای داده‌های بازارهای مختلف بکار می-رود، فاقد پایداری است، در حالیکه مکانیزم‌های ساده‌ای برای رفتار مولتی‌فرکتالی در دسترس است که می‌تواند، در مجموع، تمام طیف ویژگی‌های سری‌های زمانی که در بالا ذکر شدند را به روشی به‌صرفه دربرگیرد. از این رو، به نظر می‌رسد که تطبیق برخی مکانیزم‌های مولد شناخته شده برای رفتار مولتی‌فرکتال به طریقی مناسب، تنها راه در دسترس است که می‌تواند مدل‌هایی را ایجاد کند که بطور جامع چنین ویژگی‌هایی را دربرگیرد و مشترکاً تمام حقایق تجربی بازده‌های دارایی‌ها را ایجاد کنند. در بخش بعدی گام‌های بعدی که در توسعه مدل-های مولتی فرکتالی برای کاربردهای قیمت‌گذاری دارایی‌ها صورت گرفته است، بیان می‌شوند.

۲-۳- معیارها و فرآیندهای مولتی فرکتال

در ادامه، ابتدا ساختار یک معیار مولتی فرکتال ساده توضیح داده می شود و سپس این نکته که چگونه می توان آن را در ابعاد مختلف تعمیم داد، بیان می گردد. بعد از آن فرآیندهای مولتی فرکتالی، که به عنوان مدل هایی برای بازده‌های مالی طراحی شده است، معرفی می‌شوند.

۱-۲-۳- معیارهای مولتی فرکتال

معیارهای مولتی‌فرکتالی سابقه تاریخی نسبتاً طولانی در فیزیک دارند. سابقه آن‌ها به اوایل دهه هفتاد بر می‌گردد، درست زمانی که مندلبرت یک روش احتمالی برای توزیع انرژی پیشنهاد داد (مندلبرت، ۱۹۷٤). بر مبنای مدل‌های ابتدایی برای توزیع انرژی که بوسیله کولموگروف[59] (۱۹٤۱و۱۹٦۲) و اوبوخو[60] (۱۹٦۲) معرفی شده بودند، مندلبرت پیشنهاد کرد که انرژی باید بر اساس فرآیندی آبشاری، بر روی مجموعه مولتی‌فرکتالی از مقیاس‌ها (طولانی تا کوتاه)، پراکنده شود. ساخت یک آبشار مولتی فرکتال با اختصاص احتمال یکنواخت به یک فاصله کران‌دار شروع می‌شود. (برای مثال فاصله واحد [۰،۱]). در گام نخست، این فاصله به دو فاصله فرعی تجزیه می‌شود و به ترتیب کسرهای m_0 و $1\text{-}m_0$ را از جرم احتمالی کل فاصله مادر (فاصله کران‌دار اولیه) دریافت می‌کنند. در ساده‌ترین مورد، هر دو فاصله فرعی طول یکسان دارند (هر دو ۰٫۵)، اما حالت‌های دیگر نیز محتمل هستند. در گام بعدی، دو فاصله فرعی مرحله اول آبشار، دوباره به دو فاصله فرعی مشابه تجزیه می-شوند و دوباره کسرهای m_0 و $1\text{-} m_0$ را از جرم احتمالی فاصله‌های "مادر"شان دریافت می‌کنند. در اصل، این رویه تا ابد تکرار می‌شود. با این دستورالعمل، یک توزیع فرکتالی ناهمگن از جرم احتمالی کلی بدست می‌آید که حتی برای ساده‌ترین موارد دارای تشابه بصری گیج‌کننده برای سری‌های زمانی نوسان‌پذیر در بازارهای مالی است. این روش

بطور واضح ایده اساسی توزیع انرژی از مقیاس‌های بزرگ (فاصله‌های مادر) به مقیاس‌های ریزتر را منعکس می‌کند، که تأثیر مشترک تمام سطوح سلسله مراتبی قبلی را در ساختمان این آبشار حفظ می‌کند.

انواع بسیاری از مکانیزم‌های مشابه مکانیزم مولد مولتی‌فرکتالی دوجمله‌ای ساده که در بالا بیان شد، را می‌توان با ایجاد تغییراتی مشابه موارد زیر، ایجاد کرد: به‌جای آنکه همیشه احتمال m_0 به اولاد سمت چپ تخصیص داده شود، این تخصیص می‌تواند به صورت تصادفی صورت گیرد. علاوه‌براین، می‌توان در هر گام بیش از دو فاصله فرعی ایجاد کرد (منجر به آبشار چندگانه می‌شود) یا از اعداد تصادفی به جای ارزش‌های ثابت یکسان برای m_0 استفاده کرد. یک مثال رایج از تعمیم اخیر، مدل مولتی‌فرکتال لگنرمال می‌باشد که در آن جرم تخصیص داده شده به شاخه‌های جدید آبشار از توزیع لگنرمال پیروی می‌کند (مندلبرت، ۱۹۹۰:۱۹۷٤).

۲-۲-۳- مدل های مولتی فرکتال

۱-۲-۲-۳- مدل های مولتی فرکتال پیوسته (زمانی) یک متغیره

۱-۱-۲-۲-۳- مدل های مولتی فرکتال بازده های دارایی

معیارهای مولتی‌فرکتال به منظور مدلسازی قیمت دارایی‌ها، تطبیق داده شده‌اند. پژوهش مندلبرت و همکاران (۱۹۹۷) اولین مقاله‌ای بود که از ایجاد نزدیکی پدیدارشناسی داده‌های مالی به مقیاس‌بندی مولتی‌فرکتالی فراتر رفته بود. آنها مدل مولتی‌فرکتال بازده دارایی[٦١] MMAR، را ابداع کردند، که در آن معیار مولتی‌فرکتالی را که در بخش ۱-۲-۳ معرفی شد، به عنوان یک مبدل زمانی به کار گرفتند. در واقع، MMAR فرض می‌کند که بازده‌ها r(t) فرآیند ترکیبی زیر را دنبال می‌کنند:

$$r(t) = B_H[\theta(t)] \qquad (٥)$$

که در این فرمول $B_H[.]$ یک حرکت برونی با شاخص هرست H است، که تابعی از تابع توزیع تجمعی $\theta(t)$ است. این مدل قواعد مشاهده شده در سری‌های زمانی مالی شامل دنباله پهن و حافظه بلندمدت نوسانات را در بر می‌گیرد، که هر دو از معیار مولتی‌فرکتال $\theta(t)$ که برای انتقال زمان تقویمی به "زمان کسب و کار" به کار رفته، ریشه گرفته‌اند.

مندلبرت و همکاران در پژوهشی در سال ۱۹۹۷ نشان دادند که رفتار مقیاس‌بندی مبدل زمانی مولتی-فرکتالی از طریق فرآیند ترکیبی (٥) که از تابع مقیاس‌بندی $\tau(q) = \tau_\theta(qH)$ تبعیت می‌کند، به بازده‌ها منتقل می‌شود. بطور مشابه، شکل طیف در فرآیندی ترکیبی و با استفاده از رابطه ساده $f_r(\alpha) = f_\theta(\alpha/H)$ از مبدل زمانی به بازده‌ها منتقل می‌شود. در واقع، MMAR ضرورتاً معیار مولتی-فرکتالی را برای چیره شدن بر وابستگی زمانی و ناهمگنی نوسانات به کار می‌گیرد.

تمام مثال‌هایی که مندلبرت و دیگر پژوهشگران در مقاله‌هایشان در نظر گرفتند بر مبنای یک آبشار دوتایی بوده است که در آن فاصله زمانی مورد نظر مکرراً، به فاصله های فرعی با طول مساوی تجزیه شده است. به فاصله های فرعی بدست آمده کسرهایی از جرم احتمالی فاصله مادر با استفاده از انواع مختلف توزیعات تصادفی اختصاص داده شده است. در مقاله کالوت و فیشر در سال ۲۰۰۲ توزیع-های دوجمله‌ای، لگنرمال، پواسن و گاما بحث شده-اند که هر کدام منجر به یک تابع $f(\alpha)$ و $\tau(\alpha)$ و

رفتار مشابه فرآیند ترکیبی مطابق با روابطی که در بالا توضیح داده شده است، می‌شوند.

مستندات لوکس در سال۲۰۰٤ نشان داد که نوسانات $f(\alpha)$و $\tau(\alpha)$ حتی بعد از تصادفی کردن داده‌های اساسی، چندان معیار قابل اطمینانی برای تعیین پارامترهای MMAR نمی‌باشد، و هنوز می‌توان با استفاده از شکل $f(\alpha)$و $\tau(\alpha)$ غیرخطی، نشانه‌هایی از ساختار مقیاس‌بندی موقتی بدست آورد. عملکرد ضعیف چنین تخمین‌زن‌هایی را می‌توان بدلیل همگرایی کند واریانس‌های آن‌ها نسبت داد (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

هرچند MMAR در ادبیات بعدی دنبال نشد، اما تخمین مدل‌های مولتی‌فرکتال جایگزین با استفاده از تخمین‌زن‌های گشتاوری کارا و دیگر تکنیک‌های آماری استاندارد صورت گرفت. اشکال اصلی MMAR این است که با وجود ویژگی‌های تصادفی جذابش، قابلیت کاربرد عملی آن بدلیل ماهیت ترکیبی تبعیت کننده θ(t) و نامانا بودن آن، بدلیل محدودیت این معیار برای یک فاصله کران‌دار، پایین است. این محدودیت‌ها توسط مدل‌های سری‌زمانی تکرارشونده‌ای که توسط کالوت و فیشر (۲۰۰۱ و ۲۰۰٤) معرفی شدند از بین رفت. لووی[٦٢] و لوکس (۲۰۱۲) اخیراً تفسیر مجددی از MMAR پیشنهاد داده‌اند که در آن توالی نامحدود آبشارهای مولتی فرکتال بر محدودیت فاصله کران‌دار غلبه می‌کند، و در نتیجه فرآیند کلی می‌تواند به صورت یک ثابت مشاهده شود.

۲-۱-۲-۲-۳- MMAR با مبدل زمانی مولتی فرکتال پوآسون

در پژوهشی که کالوت و فیشر در سال ۲۰۰۱ انجام دادند نوع جدیدی از مدل‌های مولتی‌فرکتال معرفی شد که بر برخی از محدودیت‌های MMAR که بوسیله مندلبرت و همکاران (۱۹۹۷) پیشنهاد شده بود، چیره شد. در آغاز، این مدل ساختار رسمی فرآیند تبعی را حفظ کرده بود، ولی به جای تجزیه باینری مبتنی بر ماتریس فاصله اصلی (یا به بیان کلی‌تر، تجزیه هر فاصله مادر به تعداد یکسان فاصله فرعی)، آن‌ها فرض کردند که θ(t)، بدون استفاده از ماتریس و از طریق تعیین یک دنباله پواسن از نقاط تغییر برای ضرایب در هر سطح سلسله مراتبی از آبشار، بدست آمده است. ضرایب خودشان ممکن است از یک توزیع دوجمله‌ای، لگنرمال یا هر توزیع دیگری پیروی کنند. در هر نقطه تغییر t_n^i یک تصویر جدید $M_{t_n}^i$ از سطح i آبشار، با استفاده از توزیع ضرایب ایجاد می‌شود که برای اطمینان از برآورده شدن شرط $E[M_{t_n}^i] = 1$ استاندارد می‌شود (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

اهمیت این مدل نسبت به MMAR ماتریسی محدود این است که این مدل مسیری را به سمت ایجاد مدل‌های مولتی‌فرکتال فراهم می‌کند (یا مدل‌هایی که بطور قراردادی به مولتی‌فرکتال‌های "واقعی" نزدیک هستند) که از نظر آماری منعطف‌تر هستند. بخصوص، در مقایسه با MMAR ماتریسی محدود، مولتی‌فرکتالی پوآسون دارای یک ساختار مارکوف می‌باشد. زمانی که t_n^i از یک توزیع نمایی تبعیت می‌کند، احتمال ورودی‌ها در هر t مستقل از گذشته است. نتیجه اولیه این مفهوم این است که، محدودیت اولیه آن یعنی وجود یک فاصله زمانی کران‌دار [0,T] واقعا لازم نیست، چرا که زمانی که فرآیند به مرز t=T می‌رسد می‌تواند با استفاده از ادراکاتی که درون فاصله [0,T] ایجاد شده است بدون هیچ قطع و شکستی به ساختار تصادفی‌اش ادامه دهد. این امکان برای روش مبتنی بر ماتریس

وجود ندارد که بتواند یک آبشار جدید بعد از t=T (هرچند، کاملاً ناهمبسته با آبشار قبلی) اضافه کند. به غیر از یک مقاله، مولتی‌فرکتال پوآسون پیوسته زمانی در کاربردهای تجربی استفاده نشده است، اما انگیزه ایجاد مدل مولتی‌فرکتال مارکوف–سوئیچینگ گسسته (MSM) را فراهم کرده است که پرکاربردترین نسخه مدل‌های مولتی فرکتال در مالی تجربی است. این مفهوم در بخش ۲–۲–۲–۳ بحث خواهد شد.

۲–۲–۲–۳- مدل های مولتی فرکتال گسسته (زمانی)

۱–۲–۲–۲–۳- مدل های مولتی فرکتال مارکوف–سوئیچینگ

همراه با مولتی‌فرکتال پوآسون پیوسته زمانی، کالوت و فیشر (۲۰۰۱) نسخه گسسته این مدل را معرفی کردند، که تبدیل به نسخه‌ای از خانواده مولتی‌فرکتال‌ها در ادبیات مالی تجربی شد که به کرّات مورد استفاده قرار گرفت. این نسخه گسسته، پویایی نوسانات را به عنوان یک فرآیند مارکوف–سوئیچینگ گسسته زمانی با تعداد زیادی از حالت‌ها تفسیر می‌کند. در روش آنها، بازده‌ها به صورت معادله ٦ مدلسازی شده‌اند، که در آن ε_t از یک توزیع نرمال استاندارد N(0,1) پیروی می‌کند و نوسانات لحظه‌ای از حاصل ضرب ضرایب $M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, \dots, M_t^{(k)}$ در عامل ثابت σ تعیین می‌شود:

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad (٦)$$

با

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 \prod_{i=1}^{k} M_t^i \quad (٧)$$

اجزاء نوسان M_t^i پایدار هستند و شرط $E[M_t^i] = 1$ را برآورده می‌کنند. علاوه‌براین، فرض شده است که اجزاء نوسان $M_t^{(1)}, M_t^{(2)}, \dots, M_t^{(k)}$ در زمان t به لحاظ آماری مستقل هستند. هر جزء نوسان در زمان t بسته به رتبه‌اش درون سلسله ضرایب با احتمال γ_i تجدید می‌شود و با احتمال $1 - \gamma_i$ بدون تغییر می‌ماند. آن‌ها نشان دادند که با مشخصات احتمالات انتقال زیر بین گام‌های زمانی عدد صحیح، مولتی‌فرکتال پوآسون گسسته به حد زمانی پیوسته همگراست:

$$\gamma_i = 1 - (1 - \gamma_i)^{(b^{i-1})} \quad (٨)$$

که در این فرمول γ_1 جزء با پایین‌ترین فرکانس است که شامل پارامتر چگالی پوآسون λ می‌باشد $\gamma_1 \epsilon [0,1]$ و $b \epsilon (1, \infty)$.

برای توزیع ضرایب M_t^i در ادبیات از توزیع لگنرمال با پارامترهای s و λ استفاده شده است (لیو دی متیو[63] و لوکس، ۲۰۰۸ و لوکس ۲۰۰۸).

$$M_t^{(i)} \sim LN(-\lambda, s^2) \quad (٩)$$

در این فرمول فرض $s^2 = 2\lambda$ شرط $E[M_t^i] = 1$ را برآورده می‌کند. مقایسه عملکرد و ویژگی‌های آماری مدل‌های مولتی‌فرکتال با توزیع ضرایب دوجمله‌ای و لگنرمال تقریباً نتایج مشابهی را نشان داد. (لیو دی متیو و لوکس، ۲۰۰۷). بنابراین، به نظر می‌رسد که انتخاب توزیع دوجمله‌ای (با 2^k وضعیت نوسان متفاوت) به اندازه کافی انعطاف‌پذیر است و نمی‌توان به آسانی از طریق توزیع پیوسته ضرایب عملکرد بهتری بدست آورد.

بدلیل محدودیتی که برای تعداد گام‌های آبشار وجود دارد، MSM به عنوان مقیاس‌بندی چندگانه مجانبی شناخته نمی‌شود. هرچند بطور قراردادی و با افزایش تعداد اجزاء k می‌توان این مدل را بسط داد.

اما ویژگی‌های مولتی‌فرکتال این فرآیند ساختگی است، و تنها می‌توان بطور قراردادی و آن هم بر روی مقیاس‌های طولی محدود، آن را به مقیاس‌بندی چندگانه واقعی نزدیک کرد.

۲-۲-۲-۳- گشت تصادفی مولتی فرکتال

در ادبیات اقتصاد-فیزیک، نوع متفاوتی از فرآیندهای تکرارشونده مطرح شده است، که به آن‌ها "گشت تصادفی مولتی‌فرکتال[٦٤]" (MRW) می‌گویند. در اصل،MRW یک فرآیند گوسی با مقیاس‌بندی مولتی‌فرکتالی است که با استفاده از یک تابع همبستگی که به طور مناسب تعریف شده، ایجاد می‌شود. در حالی که می‌توان از توزیع‌های مختلف ضرایب برای ایجاد نسخه‌های مختلفMRW استفاده کرد تا با ساختارهای خودهمبستگی خاص‌شان هماهنگ شود، ادبیات منحصراً بر توزیع لگنرمال تمرکز کرده‌است.

بکری و همکاران[٦٥] (۲۰۰۱) MRW را یک فرآیند گوسی با واریانس تصادفی به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$r_{\Delta t}(\tau) = e^{\omega_{\Delta t}(\tau)} \varepsilon_{\Delta t}(\tau) \qquad (۱۰)$$

که در آن Δt یک گام گسسته کوچک،$\varepsilon_{\Delta t}(.)$ یک متغیر گوسی با میانگین صفر و واریانس $\sigma^2 \Delta t$، $\omega_{\Delta t}(.)$ لگاریتم واریانس تصادفی و τ مضربی از Δt در طول محور زمان است.

تفاوت MSM معرفی شده توسط کالوت و فیشتر (۲۰۰۱) با مدلMRW این است که MRW از یک تابع مقیاس‌بندی دقیق پیروی نمی‌کند. با وجود این تفاوت، هر دو مدل دارای ویژگی‌های مجانبی هستند که کاربرد بسیاری از ابزارهای استاندارد استنباط آماری را تسهیل می‌کنند.

میوزی و همکاران (۲۰۰٦) و بکری و همکاران (۲۰۱۳) به نتایجی برای توزیع غیرشرطی بازده‌های بدست آمده از فرآیند MRW دست یافتند. آنها تشریح کردند که این توزیع دارای دنباله‌های پهن است و با گذشت زمان پهنای دنباله آن کم می‌شود. همچنین آن‌ها نشان دادند که تخمین‌زن‌های استاندارد شاخص‌های دنباله، برای داده‌هایی که از فرآیند ایجاد داده MRW بدست می‌آیند، بدرستی رفتاری نمی‌کنند چراکه مشاهدات مجاور وابستگی زیادی به یکدیگر دارند. درحالی‌که شاخص‌های دنباله تئوریک با پارامترهای تخمین‌زده شده معمولMRW، ارزش‌های بطور غیرعادی بزرگی را نشان می‌دهند (>۱۰)، با درنظر گرفتن وابستگی در نمونه‌های محدود، تخمین‌های (شبه-) تجربی اریبی بدست می‌آید که ارزش‌های کمتری نشان می‌دهد. عدم تطابق مشابه بین شاخص‌های دنباله تئوریک و تجربی بکار رفته برای دیگر مدل‌های مولتی‌فرکتال نیز می‌تواند به طریق مشابه توضیح داده شود.

۳-۲-۲-۳- مدل های مولتی فرکتال تک متغیره نامتقارن

تمام مدل‌های قبلی با فرض وجود تقارن کامل توزیع بازده‌ها طراحی شده بودند. در حالیکه، می-دانیم نوسانات قیمت در بازارهای دارایی بدلیل اثرات اهرمی تا حدی نامتقارن هستند. مدل گشت تصادفی مولتی فرکتال چوله گسسته[٦٦] (DSMRW) که توسط پوچارت و بوچد[٦٧] (۲۰۰۲) مطرح شد نسخه توسعه یافته MRW است که چنین عدم تقارن‌هایی را لحاظ می‌کند. این مدل مشابه همان مدلی است که در معادله ۱۰ برای MRW تعریف شد:

$$\widetilde{\omega}_{\Delta t}(i) \equiv \omega_{\Delta t}(i) - \sum_{k<i} K(k,i)\, \varepsilon_{\Delta t}(k) \qquad (۱۱)$$

بکری و همکاران (۲۰۱۲) نیز یک مدل مولتی‌فرکتال چوله پیوسته را پیشنهاد دادند که اثر اهرم‌ها را نیز در نظر می‌گرفت. ایزلر و کرتسز[۶۸] (۲۰۰٤) مدل MSM را به طریق مشابه بسط دادند. آن‌ها نسخه پالایش‌شده این مدل را که عدم تقارن را با استفاده از احتمالات تجدید شده وارد می‌کرد در نظر گرفتند و علاوه بر این از معادله ۱۱ برای در نظر گرفتن خودهمبستگی اهرمی استفاده کردند. کالوت و همکاران (۲۰۱۳) نیز یک مدل MSM نامتقارن را معرفی کردند.

٤-۲-۲-۳- مدل های مولتی فرکتال دو متغیره

مدل مولتی‌فرکتال دومتغیره برای اولین بار توسط کالوت و همکاران (۲۰۰٦) معرفی شد. یک پرتفو از دو دارایی α و β را در نظر بگیرید. حال اجازه دهید تا r_t را به عنوان لگاریتم بازده پرتفو و r_t^{β} و r_t^{α} را به ترتیب لگاریتم بازده‌های دو دارایی تعریف کنیم. به پیروی از کالوت و همکاران بازده پرتفو به صورت زیر مدلسازی می‌شود:

$$r_t = [g(M_t)]^{1/2} * \varepsilon_t \qquad (۱۲)$$

در این معادله $g(M_t)$ یک بردار ۱ × ۲ است و بردارهای ستونی $\varepsilon_t \epsilon R^2$ بردارهای مستقل و یکسان توزیع شده گوسی $N(0,\Sigma)$ با ماتریس کوواریانس زیر هستند:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & \rho_\varepsilon \sigma_\alpha \sigma_\beta \\ \rho_\varepsilon \sigma_\alpha \sigma_\beta & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

ρ_ε نشان دهنده همبستگی غیرشرطی باقی مانده‌ها، به عنوان اولین منبع همبستگی میان بازده‌ها است. وضعیت نوسانات دوره t بوسیله ماتریس $2 \times k$، $M_t = (M_{1,t}; M_{2,t}; \dots; M_{k,t})$ تعریف شده و بردار $M_{i,t} = (M_{i,t}^{\alpha}\, M_{i,t}^{\beta})$ اجزاء در فرکانس i^{th} (امi) است. بردارهای نوسانات $M_{i,t}$ غیرمنفی هستند و شرط $E[M_{i,t}] = 1$ را برآورده می‌کنند.

لیو[۶۹] (۲۰۰۸) یک مدل مولتی‌فرکتال دومتغیره نسبتاً مرتبط را بر مبنای این فرض که دو سری زمانی تعداد معینی از سطوح آبشار مشاع بطور مشترک دارند، در حالی که مابقی آنها بطور مستقل انتخاب شده‌اند، ایجاد کرد. سپس بازده را به صورت زیر مدلسازی کرد:

$$r_{q,t} = \left[\left(\prod_i^k M_{i,t}\right)\left(\prod_{l=k+1}^n M_{l,k}\right)\right]^{1/2} * \varepsilon_t \quad (۱٤)$$

که در آن $q=1,2$ اشاره به دو سری زمانی دارد، هر دو سری دارای تعداد n سطح از آبشار نوسانات هستند، و آنها تعداد k سطح از سطوح آبشار را به اشتراک می‌گذارند که نشان‌دهنده قدرت همبستگی نوساناتشان است. بطور واضح، k بزرگتر، نشان‌دهنده همبستگی بیشتر میان پویایی‌های نوسانات هر دو سری است.

ε_i ، همانطور که در معادله ١٤ تعریف شده است، از توزیع نرمال استاندارد دو متغیره با پارامتر همبستگی ρ_ε پیروی می‌کند. این مدل می‌تواند به عنوان موردی خاص از نسخه کمّی تعمیم‌یافته از مدل کالوت و همکاران (۲۰۰٦) دیده شود. لیو و لوکس در سال ۲۰۱۳ نشان دادند که تمایز بین درجات مختلف همبستگی نوسانات، در واقع شایستگی و عملکرد MSM دومتغیره را بهبود می‌دهد این مدل همچنین توانسته است ویژگی افراطی مدل لیو (۲۰۰۸) (تغییر متناوب بین وابستگی کامل و عدم‌همبستگی) را با استفاده از یک روش منعطف‌تر از میان بردارد (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

۵-۲-۲-۲-۳- مدلهای مولتی فرکتال با بعد بالاتر

مدل‌های دو متغیره‌ای که در بخش قبل معرفی شدند می‌توانند برای بیش از دو دارایی به طرق مختلف تعمیم داده شوند. روش لیو (۲۰۰۸) را می توان مستقیماً برای فرآیند بازده های دارایی N بعدی نیز تعمیم داد. اگر فرض شود که N سری زمانی تعداد j آبشار مشترک را، که قدرت همبستگی نوساناتشان را نشان می دهد، به اشتراک بگذارند، همبستگی نوسانات می تواند برای تعداد دلخواهی از دارایی ها بدون اضافه کردن پارامتر جدید در بخش نوسانات مدل تعمیم داده شود.

تعمیم دیگری از MRW به روشی مشابه توسط بکری و همکاران (۲۰۰۰) پیشنهاد شد. آنها به منظور مدلسازی رفتار پرتفو، مدل MRW را به مدل گشت تصادفی مولتی‌فرکتال چند متغیره (MMRW)، گسترش دادند.

٤- مدل‌های آزمون، تخمین و پیش بینی کننده مولتی فرکتال

دسترسی به رویه‌های تخمین کارا، به منظور کاربرد مدل‌های قیمت‌گذاری دارایی تئوریک برای اهداف عملی، ضروری است. در ابتدا شکل غیر استاندارد مدل‌های مولتی‌فرکتال شک‌هایی را در مورد قابلیت کاربرد بسیاری از ابزارهای آماری شناخته شده این خانواده از مدل‌های نوسانات برانگیخت. خوشبختانه، به نظر می‌رسد که نسل دوم مدل‌های مولتی‌فرکتال (MSM وMRW) بخصوص در شرایطی که رفتار آماری مجانبی است، خیلی بیشتر قابل کاربرد هستند. کاربرد روش‌های مقیاس-بندی بطور بالقوه تخمین‌های خیلی نوسانی و اریبی برای داده‌های مالی، ایجاد می‌کند، و بدلیل دنباله‌های پهن داده‌های مالی، حتی بعد از تصادفی‌سازی، این سری‌های زمانی همچنان ساختار مولتی‌فرکتالی را نشان می‌دهند. این کمبودها انگیزه‌ای برای یافتن مدل‌های آماری مناسب شد.

مدل مولتی‌فرکتال توسعه‌یافته مارکوف-سوئیچینگ و گشت تصادفی مولتی‌فرکتال دارای ویژگی‌های مجانبی "مناسب"تر از مدل‌های قبلی است، و این مسأله اجازه کاربرد بسیاری از ابزارهای استنباطی را می‌دهند. با این‌حال، میزان نزدیکی آن‌ها به حافظه بلندمدت واقعی ممکن است یک نگرانی و انگیزه‌ای برای رعایت جانب احتیاط در کاربردهای تجربی باشد (لوکس و سگنون، ۲۰۱۳).

۱-٤- تخمین حداکثر درستنمایی [۷۰]

تخمین حداکثر درستنمایی دقیق در ابتدا برای مدل MSM گسسته با توزیع گسسته اجزاء نوسانات و ضرایب ایجاد شد. کالوت و فیشر (۲۰۰٤) یک روش تخمین حداکثر درستنمایی برای مدل مولتی-فرکتال مارکوف-سوئیچینگ دوجمله‌ای (BMSM) معرفی کردند. برای نشان دادن اینکه چگونه تخمین حداکثر درستنمایی در این زمینه عمل می‌کند، تابع لگاریتم حداکثر درستنمایی برای یک سری از مشاهدات $\{r_t\}_{t=1}^{T}$ را در عمومی‌ترین شکل به صورت زیر در نظر بگیرید:

(۱۵)

$$L(r_1, \dots, r_T; \varphi) = \sum_{t=1}^{T} \ln g(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}; \varphi)$$

که در آن $g(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}; \varphi)$ تابع درستنمایی مدل مولتی‌فرکتال مارکوف-سوئیچینگ است، و φ بردار پارامترهاست. برای مدل‌های مارکوف-سوئیچینگ، تابع درستنمایی می‌تواند به صورت

$$g(r_t | r_1, \dots, r_{t-1}; \varphi) = \omega_t(r_t | M_t = m^i, \varphi)(\pi_{t-1} A)$$

تجزیه شود. سه جزء این معادله به صورت زیر تعریف می‌شوند: $\omega_t(r_t|M_t = m^i, \varphi)$ بردار 2^k بعدی چگالی‌های شرطی هر r_t مشاهده شده برای رژیم‌های نوسانات m^i است و A ماتریس انتقالی است که دارای اجزاء $A_{ij} = P(M_{t+1} = m^i|M_t = m^i)$ است. آخرین جزء تابع درستنمایی بالا π_t است که بردار احتمالات شرطی حالات نوسانات مشاهدات معین $\pi_t^i = P(M_t = m^i|r_1, \ldots, r_t; \varphi)$ است. احتمالات شرطی می‌تواند از طریق تکنیک به‌روزرسانی بیزین بدست آید:

$$\pi_t = \frac{\omega_t(r_t|M_t = m^i, \varphi) * (\pi_{t-1}A)}{\sum \omega_t(r_t|M_t = m^i, \varphi) * (\pi_{t-1}A)} \quad (١٦)$$

مزیت روش حداکثر درستنمایی این است که، به عنوان یک محصول فرعی، پیش‌بینی بهینه‌تری با استفاده از روش به‌روزرسانی بیزین احتمالات شرطی $\pi_t = P(M_t = m^i|r_1, \ldots, r_t; \varphi)$ برای حالات نوسانات مشاهده نشده m^i ، $i = 1, \ldots, 2^k$، دارد. دقت تخمین حداکثر درستنمایی در نمونه‌های محدود بسیار خوب است (کالوت و فیشر، ٢٠٠٤). لوکس در پژوهشی در سال ٢٠١٣ به راه‌حل‌هایی دست یافت که امکان تخمین پارامترهای چگالی ناپایدار MMAR پوآسون پیوسته را با استفاده از روش حداکثر درستنمایی دقیق می‌دهد.

اگرچه در این روش کاربرد الگوریتم حداکثر درستنمایی به میزان قابل توجهی تخمین مدل‌های MSM را تسهیل کرده است، اما محدودیت‌هایی را نیز ایجاد کرده است، بدین معنی که این روش در عمل تنها برای توزیع‌های ضرایب گسسته قابل کاربرد است و بنابراین برای مثلاً توزیع‌های لگنرمال قابل کاربرد نیست. علاوه بر این، این روش تقاضاهای محاسباتی بسیار زیادی را می‌طلبد. (چراکه انتقالات بین 2^k حالت متمایز باید در نظر گرفته شود). از جنبه محاسباتی، قابلیت کاربرد روش حداکثر درستنمایی برای مدل‌های مولتی‌فرکتال چند-متغیره حتی محدودتر است. اخیراً تلاش‌هایی برای تخمین مدل MRW با استفاده از روش درستنمایی شده است. لوسلتن و ریپدال[٧١] (٢٠١٢) روش حداکثر درستنمایی تقریبی برای MRW را با استفاده از تقریب لپلیس[٧٢] تابع درستنمایی معرفی کردند.

٤-٢- حداکثر درست نمایی شبیه سازی شده

این روش بطور گسترده هم برای توزیع های ضرایب گسسته و هم پیوسته قابل کاربرد است. برای چیره شدن بر محدودیت محاسباتی و مفهومی تخمین حداکثر درستنمایی (ML) دقیق، کالوت و همکاران (٢٠٠٦) روش ML شبیه سازی شده را معرفی کردند، در مدل پیشنهادی آنها یک فیلتر جزئی[٧٣] برای تخمین عددی تابع درستنمایی پیشنهاد شده است.

روش ML شبیه‌سازی شده تخمین مدل‌های MSM با توزیع ضرایب پیوسته و همچنین مدل‌های دوجمله‌ای تک‌متغیره و چند متغیره با تعداد حالات خیلی زیاد برای ML دقیق را ممکن می‌سازد. با وجود مزیت فوق‌الذکر، تقاضاهای محاسباتی SML مخصوصاً برای تعداد زیادی از اجزاء N هنوز قابل ملاحظه هستند (لوکس و سگنون، ٢٠١٣).

٤-٣- تخمین GMM

بطورکلی، این روش هم برای توزیع ضرایب گسسته و هم پیوسته قابل کاربرد است. برای چیره شدن بر محدودیت‌های کاربردی تخمین ML، لوکس (٢٠٠٨) تخمین‌زن روش گشتاورهای تعمیم-

یافته[74] (GMM) را معرفی کرد که برای انواع مدل-های MSM (توزیع گسسته یا پیوسته ضرایب، گوسی، تی استیودنت یا توزیع های دیگر) قابل کاربرد است. این روش در تمام مواردی که ML قابل کاربرد نبود یا از نظر محاسباتی عملی نبود می-تواند مورد استفاده قرار گیرد. در این روش تقاضاهای محاسباتی کمتر از SML و مستقل از مشخصات مدل است. چارچوب GMM برای مدل-های MSM، به این صورت است که بردار پارامترهای φ از طریق حداقل کردن فاصله گشتاورهای تجربی از همتاهای تئوریک‌شان بدست می‌آید (هریس و متیاس،[75] ۱۹۹۹).

به منظور نزدیک شدن به مدل‌های MSM که دارای ویژگی حافظه بلندمدت هستند، لوکس (۲۰۰۸) پیشنهاد استفاده از تفاوت لگاریتم قدرمطلق بازده‌ها همراه با شرایط گشتاوری تحلیلی مربوط، را دادند.

بکری در سال ۲۰۰۸ و ۲۰۱۳ روش GMM را برای تخمین پارامترهای MRW با استفاده از گشتاورهای مشابه مدل لوکس (۲۰۰۸)، به کار برد. علاوه بر بکری، ساتارهف[76] (۲۰۱۰) تخمین‌زن GMM را برای MRW، با استفاده از الگوریتمی کاراتر برای تخمین ماتریس کوواریانس، تعدیل کرد. لیو (۲۰۰۸) روش GMM را برای مدل MSM دو متغیره و سه متغیره تطبیق داد و لئووی (۲۰۱۳) تخمین‌زن روش گشتاورهای شبیه‌سازی شده[77] (SMM) را برای مدل مولتی‌فرکتال پواسون پیوسته زمانی کالوت و فیشر (۲۰۰۱) توسعه داد.

اخیراً در فیزیک آماری تخمین‌زن‌های گشتاوری ساده برای استخراج پارامترهای متناوب مولتی‌فرکتال از داده‌های حاصل از جریان‌های متلاطم به کار گرفته شده است (کیوتو و همکاران، ۲۰۰۷). لوی و لوکس (۲۰۱۲) عملکرد تخمین‌زن GMM برای مدل‌های مولتی‌فرکتال متلاطم را با تخمین‌زن‌های مختلف پیشنهاد شده در ادبیات مربوط مقایسه کردند و نشان دادند که روش GMM بدلیل استخراج سیستماتیک اطلاعات موجود در گشتاورهای مختلف، معمولاً تخمین‌های دقیق‌تری را فراهم می-کند.

٤-٤- پیش بینی

با تخمین ML (حداکثر درستنمایی) و SML، پیش‌بینی نسبتاً راحت است: با تخمین ML، با استفاده از ماتریس انتقال می‌توان به پیش‌بینی احتمالات شرطی در هر افق زمانی مورد نظر پرداخت. در مورد SML نیز، تعامل اجزاء، تقریبی برای چگالی پیشگویانه فراهم می‌کند. اما از آنجایی-که GMM اطلاعاتی در مورد احتمالات شرطی فراهم نمی‌کند، به‌روز رسانی بیزین ممکن نیست و باید تخمین GMM با یک الگوریتم پیش‌بینی متفاوت تکمیل شود. برای این منظور، لوکس (۲۰۰۸) بهترین پیش‌بینی خطی را (براکول و دیویس،[78] ۱۹۹۱) همراه با الگوریتم لوینسون-دوربین[79] تعمیم یافته که توسط براکول و دالوس[80] (۲۰۰٤) معرفی شد، پیشنهاد دادند.

٥- نتایج پژوهش حاصل از کاربردهای تجربی مدل‌های مولتی فرکتال در علوم مالی

کالوت و فیشر (۲۰۰٤) عملکرد پیش‌بینی مدل MSM را با مدل‌های GARCH، MS-GARCH و FIGARCH مقایسه کردند. آنها از چهار سری زمانی نرخ ارز روزانه استفاده کردند و یافتند که در

افق‌های زمانی کوتاه‌مدت MSM تقریباً عملکرد مشابه و گاهی اوقات بهتر از همتایانش نشان می‌دهد و در افق‌های زمانی طولانی مدت MSM بطور واضح‌تر عملکرد بهتری نسبت به تمام مدل‌های جایگزین دارد. لوکس (۲۰۰۸) روش GMM را با بهترین پیش‌بینی خطی ترکیب کرد و مدل‌های مختلف MSM را (MSM دوجمله‌ای و MSM لگنرمال با تعداد مختلفی از ضرایب) با GARCH و FIGARCH مقایسه کرد. لوکس (۲۰۰۸) تأیید کرد که مدل‌های MSM نسبت به GARCH و FIGARCH در پیش‌بینی نوسانات نرخ‌های ارز خارجی عملکرد بهتری نشان می‌دهند. بطور مشابه بکری و همکارانش در سال ۲۰۰۸ و ۲۰۱۳ عملکرد بهتر مدلMRW را در پیش‌بینی نوسانات و ارزش در معرض خطر گزارش کردند. بکری و همکاران (۲۰۰۸) یافتند که پیش‌بینی نوسانات خطی با استفاده از مدل MRW عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های GARCH(1,1) دارد. علاوه بر این، آن‌ها نشان دادند که پیش‌بینی‌های ارزش در معرض خطر با استفاده از MRW در هر مقیاس زمانی و هر افق زمانی از پیش بینی‌های GARCH(1,1) (نرمال یا تی استیودنت) برای نرخ‌های ارز خارجی و شاخص‌های سهام قابل اطمینان‌تر است.

لوکس و مورالز- اریاز (۲۰۱۰) مدل MSM را با توزیع تی‌استیودنت معرفی کردند و عملکرد پیش-بینی آن را با مدل‌های MSM با توزیع گوسی و (FI)GARCH مقایسه کردند. با استفاده از داده‌های مربوط به شاخص‌های سهام، اوراق قرضه دولتی و شاخص‌های اوراق بهادار مستغلات، آن‌ها یافتند که پیش‌بینی‌های مدل MSM با توزیع نرمال نوسانات تاریخی را بهبود می‌بخشد، اما در برخی موارد عملکرد پایین‌تری نسبت به FIGARCH با توزیع نرمال دارد. با اضافه کردن دنباله‌های پهن به MSM و FIGARCH عملکرد مدل‌های MSM برای پیش-بینی نوسانات بهبود یافت درحالی که عملکرد پیش-بینی مدل FIGARCH بدتر شد. علاوه بر این آنها یافتند که با ترکیب FIGARCH و MSM می‌توان پیش‌بینی‌های دقیق‌تری از نوسانات بدست آورد.

لوکس و همکاران (۲۰۱۱) نسخه‌ای از مدل MSM که برای اندازه‌گیری نوسانات درک‌شده (RV) طراحی شده بود را بکار بردند. آن ها از پنج شاخص بازار سهام (CAC 40, DAX,TSE 100, NYSE and S&P 500) استفاده کردند، و به این نتیجه رسیدند که نوسانات درک شده در اکثر شاخص‌های سهام و در اکثر افق‌های زمانی نشان از عملکرد بهتر مدل MSM لگنرمال (RV-LMSM) نسبت به مدل‌های بدون RV (FIGARCH, TGARCH, SV and MSM) دارد. آن‌ها همچنین خاطر نشان کردند که نتایج مشابهی در مقایسه مدل RV-LMSM با مدل رایج RV-ARFIMA بدست آمد و پیش‌بینی مدل-های ترکیبی (با RV و بدون RV) به سختی می-توانست پیش‌بینی‌های مدل‌های تنها را بهبود بخشد.

کالوت و همکاران (۲۰۰۶) مدل دو متغیره‌ای را برای بررسی نوسانات همزمان جفت ارزها به کار بردند. آن‌ها بار دیگر به این نتیجه رسیدند که مدل آن‌ها پیش‌بینی بهتری از نوسانات و ارزش در معرض خطر در مقایسه با مدل GARCH همبستگی ثابت (CC-GARCH) بولرسلو (۱۹۹۰) فراهم می-کند. با کاربرد مدل MSM دومتغیره که برای شاخص سهام تطبیق داده شده است، ایدیر (۲۰۱۱) نتایج کالوت و همکارانش (۲۰۰۶) را تأیید کرد. به علاوه، او دریافت که مدل تطبیق داده شده او بطور قابل توجهی عملکرد بهتری از مدل‌های MSM و DCC پایه برای افق‌های زمانی بیش از ده روز نشان می-

دهد. لیو و لوکس (۲۰۱۳) مدل دو متغیره‌ای برای داده‌های روزانه مجموعه‌ای از پرتفوهای دوتایی از شاخص سهام، ارز خارجی و اوراق قرضه خزانه یک و دو ساله آمریکایی به کار برد. آن یافتند که مدل مولتی‌فرکتال دومتغیره نسبت به مدل CC-GARCH ، بخصوص در مورد نرخ‌های ارز، پیش‌بینی بهتری از ارزش در معرض خطر فراهم می‌کند.

چن و همکاران[۸۱] در سال ۲۰۱۳ مدل دیرش مولتی‌فرکتال مارکوف–سوئیچینگ را معرفی کردند. در مقایسه با مدل‌های دیرش سنتی که از فرآیندهای از نوع GARCH الهام گرفته شده است، مدل جدید، فرآیند MSM که توسط کالوت و فیشر (۲۰۰٤) مطرح شد، را استفاده می‌کند، و بنابراین می‌تواند ویژگی حافظه بلندمدت دیرش‌ها را لحاظ کند. با استفاده از مدل MSMD (دیرش مولتی‌فرکتال مارکوف–سوئیچینگ[۸۲]) برای داده‌های دیرش بیست سهم که بطور تصادفی از میان شاخص S&P100 انتخاب شده‌اند و مقایسه آن با مدل دیرش شرطی اتو رگرسیو(ACD)، آنها دریافتند که در افق‌های زمانی کوتاه‌مدت هر دو مدل منجر به نتایج تقریباً یکسانی می‌شوند اما در افق زمانی بلندمدت مدل MSMD بر مدل ACD برتری دارد.

بارونیک و همکاران[۸۳] (۲۰۱۲) مستقلاً مدل دیرش مولتی‌فرکتال مارکوف–سوئیچینگی (MSMD) را توسعه دادند که ویژگی‌های آن تاحدی متفاوت از مدلی بود که توسط چن و همکاران (۲۰۱۳) پیشنهاد شده بود. آنها در این مدل از فرآیند معرفی شده توسط کالوت و فیشر (۲۰۰٤) به عنوان جزء اصلی، استفاده کردند و سپس این مدل را برای دیرش قیمت سه قرارداد آتی ارز خارجی به کار بردند و قابلیت پیش‌بینی مدل جدید را با مدل ACD و مدل دیرش تصادفی حافظه بلندمدت (LMSD) دئو و همکاران[۸٤] (۲۰۰٦) مقایسه کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که بطور کلی پیش‌بینی‌های LMSD و MSMD از پیش‌بینی‌های ACD از لحاظ میانگین مجذور خطاها و میانگین قدرمطلق خطاها بهتر بوده است. مدل‌های MSMD و LMSD گاهی اوقات عملکردهای پیش‌بینی مشابهی را نشان می‌دهند و گاهی اوقات مدل MSMD بر مدل LMSD چیره می‌شود.

سگنون[۸۵] و لوکس (۲۰۱۲) عملکرد پیش‌بینی مدل MSMD چن و همکاران (۲۰۱۳) را با مدل‌های استاندارد ACD و لگاریتمی–ACD، با مفروضات توزیعی منعطف (وایبل[۸٦]، لگنرمال و گامای تعمیم داده شده) و آزمون نسبت درستنمایی برکوویتز[۸۷] (۲۰۰۱) مقایسه کردند. با استفاده از داده‌های هشت سهامی که در NYSE مبادله می‌شدند نتایج تجربی به نفع برتری مدل MSMD گواهی داد. آن‌ها همچنین دریافتند که، در مقایسه با مدل ACD، استفاده از توزیع‌های منعطف تأثیر چندانی بر توانایی پیش‌بینی مدلMSMD ندارد.

پوچارت و بوچاد در سال ۲۰۰۲ نشان دادند که مدل MRW چوله‌ای که آن‌ها معرفی کرده‌اند می‌تواند برای قیمت اختیارات مورد استفاده قرار گیرد. لئوی نیز در سال ۲۰۱۳ فرآیند MSM "ریسک خنثی[۸۸]" را به منظور استخراج پارامترهای مدل MSM از قیمت‌های اختیارات پیشنهاد داد. در حقیقت، مدل‌های MSM که برای داده‌های اختیارات به‌کار می‌روند توانایی پیش‌بینی نوسانات آینده را افزایش می‌دهد.

کالوت و همکاران (۲۰۱۳) طبقه‌ای از مدل‌های ساختاری پویا را ایجاد کردند که در آن تعداد پارامترهای تخمین‌زده شده مستقل از تعداد فاکتورهای انتخاب شده است. این طرح با استفاده از

توالی آبشاری از فاکتورهای دیرش ناهمگن بدست آمده است که در تطابق با روح مدل‌های مولتی-فرکتال مدلسازی شده است. تسلسل نرخ‌های برگشت به میانگین این فاکتورها از یک تصاعد هندسی پیروی می‌کند که پاسخگوی ماهیت سلسله مراتبی آبشار در این مدل است. در کاربردهای تجربی، آن‌ها برای دامنه‌ای از نرخ‌های LIBOR و سوآپ، با یک مدل آبشار ۱۵ فاکتوری یک تطبیق بسیار نزدیک به ساختار زمانی فراهم آوردند که در پیش‌بینی نرخ بهره بهتر عمل می‌کند.

تهرانی و همکاران نیز در سال ۱۳۹۱ با استفاده از روش تحلیل چندفراکتالی همبستگی‌های بدون روند شده (MF-DXA)، به بررسی ساختار همبستگی میان شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران و شاخص های مالی و صنعت پرداختند. مشاهدات، بیانگر وجود نوعی رابطه مقیاسی میان این شاخص ها بود که شدت تفاوت رابطه مقیاسی میان شاخص های مالی و صنعت بیش از سایر شاخص ها بود. از سوی دیگر، حذف اثر همبستگی های بلند برد در شاخص صنعت اثر جدی تری بر رابطه میان این دو شاخص فرعی (صنعت و مالی) در بازار می گذاشت. درضمن نشان داده شده است که ایجاد تغییرات در شاخص های فرعی از طریق گوسی نمودن تابع توزیع، برساختار همبستگی آن ها با شاخص قیمت، اثرگذاری بیشتری نسبت به ایجاد تغییرات در شاخص قیمت و سپس مطالعه این همبستگی ها دارد. در حقیقت، با تمرکز بر ساختار همبستگی میان شاخص ها، این نتیجه حاصل شد که وضعیت بازده امروز شاخص ها به وضعیت بازده‌های گذشته خود شاخص و سایر شاخص‌ها نیز وابسته است.

در مجموع، مطالعات تجربی که به خلاصه‌ای از آن‌ها اشاره شد، شواهد تجربی از برتری MF نسبت به مدل‌های GARCH سنتی (MS-GARCH, FIGRACH) در زمینه پیش‌بینی نوسانات بلند مدت و موارد مرتبط از جمله ارزیابی VaR ایجاد کردند. علاوه بر این، این مدل کاملاً با ثبات به نظر می‌رسد، و کاربردهای موفقیت‌آمیزی در مدلسازی دیرش‌های مالی، ساختار زمانی نرخ‌های بهره و قیمت‌گذاری اختیارات دارد.

٦- نتیجه گیری و بحث

انگیزه مطالعه مدل‌های مولتی‌فرکتال برای قیمت دارایی‌ها از ویژگی‌های درونی آن‌ها نشأت می گیرد: از آنجاییکه آن ها عموماً منجر به سری های زمانی با دنباله پهن و خوشه بندی نوسانات می شوند و دارای درجات متفاوت وابستگی بلند مدت بازده ها هستند، به همین خاطر کاربرد مدل های مولتی فرکتال کمک می کند تا بتوانیم بر این حقایق جهان شمول چیره شویم. در مرور کاربردهای بالا، مشاهد شد که مدل‌های MF عملکرد بهتری نسبت به ابزارهای سنتی‌تر مدل‌های از نوع GARCH در پیش‌بینی نوسانات و ارزیابی VaR نمایش می‌دهند. علاوه بر این، فرآیندهای مولتی فرکتال نسبتاً پایدار هستند و برای انواع متغیرهای مورد نظر بازارهای مالی (بازده‌ها، حجم، دیرش‌ها، نرخ‌های بهره) قابل کاربرد هستند. در حقیقت، فرآیندهای مولتی فرکتال تنها طبقه شناخته شده مدل‌های نوسانات هستند که دارای مقیاس‌بندی غیرعادی می‌باشند، در حالی است که تمام مدل‌های قیمت گذاری دارایی سنتی، رفتار تک مقیاس محدود دارند.

آنچه واضح است این است که، معرفی مدل های مولتی فرکتال در حوزه مالی، فعالیت‌های تحقیقی که با استفاده از مدل‌های نوسانات از خانواده GARCH

یا SV در دهه گذشته صورت گرفته است را رد نمی‌کند. کارهایی که در زمینه مدل‌های مولتی‌فرکتال صورت گرفته و افرادی که در این زمینه کار می‌کنند، اندک هستند. دلیل این پرهیز می‌تواند ناشی از آن باشد که نسل اول مدل‌های مولتی فرکتال برای اقتصاددانان مالی ناآزموده و ناآشنا بوده است. اصول غیر علّی آن‌ها در مورد ساخت ساختار سلسله مراتبی وابستگی‌ها به نظر خیلی متفاوت از مدل‌های سری زمانی تکرارشونده شناخته شده‌ای است که تاکنون به کار رفته است. به علاوه، مولتی فرکتال شامل توابع مقیاس بندی و توزیع اجزاء هولدر است که در مالی و اقتصاد شناخته شده نیست، و کاربرد مدل های استاندارد آماری استنتاج فرآیندهای مولتی فرکتال طاقت فرسا و غیرممکن به نظر می رسد. هرچند، تمام این موانع با ظهور نسل دوم مدل های مولتی فرکتال (MSM and MRW) که از لحاظ آماری بهتر رفتار می کند و دارای یک ماهیت علّی و تکرار شونده است، از بین رفته است. در کنار عملکرد بهتر این مدلها در کاربردهای تجربی، آنها دارای مزیت‌هایی مانند داشتن تعریف واضح از مجانبیات پیوسته هستند به گونه ای که کاربرد پیوسته و گسسته آنها می تونند در چارچوبی سازگار تعبیه شود.

در این مقاله، تاریخچه نسبتاً کوتاه مدل‌های مولتی‌فرکتال در مالی و ویژگی‌ها و روش‌شناسی استنباط آماری مورد استفاده در آن‌ها ذکر شد. در این حوزه برخی زمینه‌ها را می توان مشخص کرد که نیاز به مطالعه بیشتر دارند. از این نواحی می‌توان به: مدل‌های MF چند متغیره، کاربردهای روش MF فراتر از قلمرو مدل‌های نوسانات مثل مدل دیرش و استفاده آن در زمینه قیمت‌گذاری مشتقات، اشاره کرد.

منابع و مأخذ

* تهرانی، رضا. نمکی، علی. و هدایتی فر، لیلا . ۱۳۹۱، "همبستگی متقابل شاخص های بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از تحلیل چندفراکتالی همبستگی های بدون روند شده (MF-DXA)"، تحقیقات مالی، دوره ۱٤ شماره ۱، صص.٥٥-٦٨.
* رهنمای رودپشتی، فریدون و پرهام، پدرام. ۱۳۹۱، "آنالیز فرکتالی شاخص بورس اوراق بهادار تهران به روش RS"، فصلنامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری، دوره۳، شماره۱، صص.٦٣-٧٩.
* Baruník, J., N. Shenai and F. Zike. 2012, “Modeling and Forecasting Persistent Financial Durations”, Working Paper, available at: http://ssrn.com/abstract=2108394.
* Brockwell, P. and R. Davis. 1991, Time Series: Theory and Methods. Berlin: Springer.
* Calvet, L. and A. Fisher. 2004, “Regime-switching and the estimation of multifractal processes”, Journal of Financial Econometrics, NO.2, PP.44-83.
* Calvet L., A. Fisher, S. Thompson. 2006, “Volatility comovement: a multifrequency approach”, Journal of Econometrics, NO.31, PP.179-215.
* Calvet, L., M. Fearnley, A. Fisher and M. Leippold. 2013, “What's Beneath the Surface? Option Pricing with Multifrequency Latent States”, Working Paper, available at: http//ssrn.com/abstract=2171734.
* Chen, F., F.X. Diebold, F. Schorfheide. 2013, “A Markov-switching multifractal inter-trade duration model, with application to U.S. equities”, Journal of Econometrics, PP.1-61.
* Eberlein, E. and U. Keller. 1995, “Hyperbolic distributions in finance”, Bernoulli, NO.1, PP. 281-299.
* Engle, R. 1982, “Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United

* Liu, R., T. di Matteo, and T. Lux. 2008, "Multifractality and long-range dependence of asset returns: the scaling behaviour of the Markov-switching multifractal model with Lognormal volatility components", Advances in Complex Systems, NO.11, PP.669-684.
* Lux, T. 2001, "Power-laws and long memory", Quantitative Finance, NO.1, PP.560-562.
* Lux, T. and Kaizoji, T. 2007, "Forecasting volatility and volume in the Tokyo stock market: long memory, fractality and regime switching", Journal of Economic Dynamics and Control, NO.31, PP.1808-1843.
* Lux, T. 2008, "The Markov-switching multifractal model of asset returns: GMM estimation and linear forecasting of volatility", Journal of Business and Economic Statistics, NO.26, PP.194-210.
* Lux, T. and L. Morales-Arias. 2010, "Forecasting volatility under fractality, regime-switching, long memory and Student-t innovations", Computational Statistics and Data Analysis, NO.54, PP.2676-2692.
* Lux, T., L. Morales-Arias and C. Sattarhoff. 2011, "A Markov-Switching Multifractal Approach to Forecasting Realized Volatility", Kiel Working Papers 1737.
* Mandelbrot, B. B. 1963, "The variation of certain speculative prices", Journal of Business, NO.26, PP. 394-419.
* Mandelbrot, B. B. 1974, "Intermittent turbulence in self similar cascades; divergence of high moments and dimension of the carrier", Journal of Fluid Mechanics, NO.62, PP.331-358.
* Mandelbrot, B. B. 1990, Limit lognormal multifractal measures, eds. E.Gotsman et al., Frontiers of Physics: Landau Memorial Conference. NewYork: Pergamon.
* Mandelbrot, B. B. 1997, Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk, NewYork: Springer Verlag.
* Mantegna, R. N. and H. E. Stanley. 1996, "Turbulence and financial markets", Nature, NO.383, PP.587-588.
* Müller, U. A., M. M. Dacorogna, R.D. Davé, R. B. Olsen, O. V. Pictet and J. E. von Weizsäcker. 1997, "Volatilities of di_erent time resolutions: analyzing the Kingdom inflation", Econometrica, NO.50, PP.987 - 1007.
* Fama, E. F. and R. Roll. 1971, "Parameter estimates for symmetric stable distributions", Journal of the American Association. NO.66, PP.331 - 338.
* Fisher, A., L. Calvet, and B. B. Mandelbrot. 1997, "Multifractality of Deutschemark/US Dollar Exchange Rates", Cowles Foundation Discussion Papers 1166, Cowles Foundation for Research in Economics, Yale University.
* Gavrishchaka, V. V. and S. B. Ganguli. 2003, "Volatility forecasting from multiscale and high-dimensional market data", Neurocomputing, NO.55, PP.285-305.
* Guillaume, D. M., M. M. Dacorogna, R. R. Davé, U. A. Müller, R. B. Olsen and O. V. Pictet. 1997, "From the bird's eye to the microscope: A survey of new stylized facts of the intra-daily foreign exchange markets", Finance and Stochastics, NO.1, PP. 95-129.
* Harris, D. and Mátyás, L. 1999, Introduction to the generalized method of moment's estimation, ed. Mátyás, L.: Generalized Method of Moments Estimations, Cambridge University Press.
* Kiyono, K., Z. R. Struzik, N. Aoyagi, S. Sakata, J. Hayano, and Y. Yamamoto. 2004, "Critical scale-invariance in healthy human heart rate", Physical Review Letters, NO.93, 178103.
* Kiyono, K., Z. R. Struzik, and Y. Yamamoto. 2007, "Estimator of a non-Gaussian parameter in multiplicative Lognormal models", Physical Review E, NO.76, 041113.
* Koedijk, K. G., P. A. Stork, and C. de Vries. 1992, "Differences between foreign exchange rate regimes: the view from the tails", Journal of International Money and Finance, NO.11, PP.462-473.
* LeBaron, B. 2001, "Stochastic volatility as a simple generator of apparent financial power laws and long memory", Quantitative Finance, NO.1, PP.621-631.
* Liu, R., T. di Matteo, and T. Lux. 2007, "True and apparent scaling: The proximities of the Markov-switching multifractal model to long-range dependence". Physica A, NO.383, PP.35-42.

dynamics of market components", Journal of Empirical Finance, NO.4, PP.213-239.

* Pochart, B. and J. P. Bouchaud. 2002, "The skewed multifractal random walk with applications to option smiles", Quantitative Finance, NO.24, PP.303-314.
* Riedi, R. H. 2002, Multifractal processes, in: Long Range Dependence: Theory and Applications, Doukhan, Oppenheim and Taqqu (eds.), PP.625-715, Birkhäuser.
* Segnon, M. K., T. Lux. 2012, "Assessing Forecast Performance of Financial Duration Models via Density Forecasts and Likelihood Ratio Test", Working Paper, University Kiel.
* Segnon, M., Lux, T. 2013, "Multifractal Models in Finance: Their Origin, Properties, and Applications", Working Paper No. 1860, University Kiel.

یادداشت‌ها

[1] Volatility
[2] Turbulent flows
[3] Fluctuation
[4] Stochastic
[5] Latent Stochastic Variable
[6] Absolute Power
[7] Absolute Moments
[8] Andersen et al.
[9] Realized Volatility
[10] Theory of Quadratic Variation
[11] Parsimonious Assumptions
[12] Volatility Clustering
[13] Asymmetry
[14] Mean Reversion
[15] (Semi-) Heavy-Tails
[16] Anomalous Scaling Behavior
[17] Seasonality
[18] Mandelbrot
[19] Standard Geometric Brownian Motion
[20] Bachelier
[21] Mild
[22] Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
[23] Engle
[24] Fisher et al.
[25] Theory of Multifractal Measures
[26] Fluid Turbulence
[27] Multifractal Model of Assets Returns
[28] Markov-Switching Multifractal
[29] Multifractal Random Walk
[30] Fat Tails
[31] Fama
[32] Lévy Stable Laws
[33] Roll
[34] Statistical Extreme Value Theory
[35] Power-Law
[36] Jansen and de Vries
[37] Lux
[38] Guillaume et al.
[39] Eberlein and Keller
[40] Koedijk et al.
[41] Hurst
[42] Ausloos et al.
[43] Lo
[44] Bollerslev
[45] Nelson
[46] Threshold
[47] Rabemananjara and Zakoian
[48] Regime Switching
[49] Cai
[50] Integrated
[51] Taylor
[52] Stochastic Volatility
[53] Gavrishchaka and Ganguli
[54] Baillie et al.
[55] Breidt et al.
[56] Müller et al.
[57] Mantegna and Stanley
[58] Anomalous Scaling
[59] Kolmogorov
[60] Obukhov
[61] Multifractal Model of Asset Returns
[62] Leövey
[63] Liu, di Matteo
[64] Multifractal Random Walk
[65] Bacry et al.
[66] Discrete-Time Skewed Multifractal Random Walk
[67] Pochart and Bouchaud
[68] Eisler and Kertész
[69] Liu
[70] Maximum Likelihood
[71] Løvsletten and Rypdal
[72] Laplace
[73] Particle Filter
[74] Generalized Method of Moments
[75] Harris and Mátyás
[76] Sattarhoff
[77] Simulated Method of Moments
[78] Brockwell and Davis
[79] Levinson-Durbin Algorithm
[80] Brockwell and Dahlhaus
[81] Chen et al.
[82] Markov-Switching Multifractal Duration
[83] Baruník et al.
[84] Deo et al.
[85] Segnon
[86] Weibull
[87] Berkowitz
[88] Risk-Neutral