

فصلنامه علمی پژوهشی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال نهم، شماره سی و دوم
زمستان ۱۳۹۵

پیش بینی تلاطم بازده سهام در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از روش شبیه سازی MCMC و الگوریتم متروپلیس هستینگ

شهرام فتاحی^۱

آزاد خانزادی^۲

مریم نفیسی مقدم^۳

تاریخ پذیرش: ۹۴/۱۱/۱

تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۳۰

چکیده

سرمایه گذاری های بازار سهام همواره دارای ریسک بوده است زیرا بازده سهام دارای تلاطم است. تحقیقاتی که تاکنون در رابطه با مدلسازی و پیش بینی تلاطم بازار سهام صورت گرفته عمدتاً با استفاده از روش حداکثر راستنمایی بوده و توجه کمی به روش تخمین بیزی صورت گرفته است. این مقاله پارامترهای مدل GARCH را با استفاده از روش بیزی و تکنیک شبیه سازی MCMC تخمین می زند و سپس نتایج بدست آمده را با روش حداکثر راستنمایی مقایسه می کند. برای این منظور از شاخص بورس اوراق بهادار تهران در بازه ی ۱۳۷۸/۰۱/۷ تا ۱۳۹۳/۰۱/۳۱ استفاده شده است. نتایج تحقیق نشان می دهد که در نمونه های کوچک روش حداکثر راستنمایی کارایی کمتری نسبت به روش بیزی دارد اما همانطور که حجم نمونه افزایش می یابد کارایی و دقت پیش بینی در هر دو روش همگرا می شود، به طوریکه تابع توزیع پارامترها در نمونه های کوچک به صورت مجانبی نامتقارن است و با افزایش تعداد داده ها به سمت توزیع مجانبی متقارن میل می کند. در پایان، نتایج پیش بینی نوسانات تایید کننده ی ادعای فوق است.

واژه های کلیدی: تلاطم، بورس اوراق بهادار تهران، روش های بیزی و حداکثر راستنمایی، الگوریتم متروپلیس هستینگ، الگوریتم MCMC.

۱- دانشیار دانشگاه رازی، دانشکده ی علوم اجتماعی، مدیر گروه اقتصاد Sh_fatahi@yahoo.com

۲- استادیار دانشگاه رازی، دانشکده ی علوم اجتماعی، گروه اقتصاد. (نویسنده مسئول) AzadKhanzadi@gmail.com

۳- دانشجوی دکترای دانشگاه تبریز. دانشگاه تبریز، دانشکده اقتصاد Nafisi1988@gmail.com

۱- مقدمه

بازار سرمایه، وظیفه تأمین مالی سایر بخش‌های اقتصادی را بر عهده دارد و همواره به عنوان یکی از نهادهای مهم و کلیدی برای دستیابی به رشد و توسعه‌ی اقتصادی، مطرح است. یکی از عوامل مهم بازدارنده در بازار سرمایه، ناطمینانی و ریسک مشارکت در سرمایه‌گذاری است که می‌تواند ناشی از تلاطم موجود در بازار باشد. در بازارهای مالی، تلاطم اندازه‌گیری تغییر قیمت یک ابزار مالی در طول زمان است از این‌رو یک تخمین مناسب از تلاطم قیمت سهام می‌تواند به عنوان نقطه‌ی آغاز کنترل ریسک و انتخاب بهینه مطرح باشد.

الگوهای مختلفی برای تخمین و پیش‌بینی تلاطم وجود دارد، امادو ویژگی اساسی سری‌های زمانی یعنی وجود دنباله‌های پهن توزیع داده‌ها و نوسانات خوشه‌ای باعث شده است که استفاده‌ی گسترده‌ای از مدل‌های خانواده‌ی ARCH در جهت مدل‌سازی تلاطم در بازار سهام انجام گیرد. تحقیقات بر روی مدل‌های پیش‌بینی دینامیک با استفاده از مدل‌های سری زمانی با پژوهش‌های انگل^۱ (۱۹۸۲) آغاز شد. از آن زمان تا کنون بسط‌های گسترده‌ای از مدل ARCH و GARCH معرفی شده است.

همان‌گونه که چگونگی ساختن الگو برای رفتار دنیای واقعی دارای اهمیت است، روش برآورد الگو نیز برای اظهار نظر در دنیای واقعی و در نتیجه پیشنهاد برای سیاست‌گذاری مهم می‌باشد. تاکنون روش‌هایی که به طور عموم برای برآورد الگوهای سری‌های زمانی مورد استفاده قرار گرفته، روش‌های برآورد کلاسیک رگرسیون مانند روش حدکثر راستنمایی^۲ بوده است یکی از فروض اساسی این روش، فرض مجانبی آن است. به عبارت دیگر تنها

هنگامی که حجم نمونه بسیار بالا باشد، ضرایب برآورد شده توسط این روش به سمت مقادیر واقعی پارامترهای جامعه میل می‌کنند. بنابراین دقت برآوردهای آن برای نمونه‌هایی با حجم پایین سؤال برانگیز است (آلبرت و چیب^۳، ۱۹۹۳). از طرفی روش حداکثر راست‌نمایی، مشکلاتی را برای محققان ایجاد می‌کند و آن‌ها را درون مدل‌هایی با خصوصیت‌های ثابت و تغییر ناپذیر نگاه می‌دارد. از آن‌جا که در برخی از تحلیل‌ها عدم اطمینان وجود دارد که گاهی مقادیر و یا معنی‌دار بودن پارامترها را تحت تأثیر قرار می‌دهد استفاده از یک رویکرد جایگزین مانند رویکرد بیزین توصیه شده است. یکی از مهمترین خصوصیات روش بیز کمی کردن ورودی‌ها و خروجی‌های مدل به شکل توزیع احتمال است. در روش بیز توزیع احتمال پسین پارامترهای مورد بررسی استخراج می‌شود. برای استخراج این توزیع، اول نیاز به معرفی یک توزیع پیشین برای هر پارامتر بوده و دوم نیاز به محاسبه‌ی انتگرال‌های چندگانه است. عموماً برای محاسبه‌ی این انتگرال‌ها از روش شبیه‌سازی مونت کارلوی زنجیره‌ی مارکف^۴ استفاده می‌شود. از مهمترین مزیت‌های روش MCMC در تخمین بیزی کارایی آن است که در نهایت منجر به همگرایی نتایج می‌شود.

با توجه به مطالب مذکور و اهمیت شناسایی تلاطم در تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران، این مقاله به مطالعه روش تخمین پارامترهای مدل GARCH با استفاده از روش بیزی و تکنیک شبیه‌سازی MCMC می‌پردازد، تا از این طریق بهترین روش تخمین پیش‌بینی تلاطم در بازار بورس تهران شناسایی شود در این راستا در بخش دوم مقاله به بیان مبانی نظری پرداخته می‌شود. بخش سوم به معرفی



مدل اختصاص یافته است. در بخش چهارم و پنجم نیز به ترتیب برآورد مدل و نتیجه‌گیری بیان خواهد شد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

از مدل‌های پیش‌بینی تلاطم در دهه‌ی اخیر به عنوان قلب اقتصاد سنجی مالی یاد می‌کنند. در بازار مالی، تلاطم نشان‌دهنده‌ی یک عدم قطعیت در تعیین قیمت یک دارایی و در نتیجه ریسک کسب سود در معاملات است. برخی از تحقیقات اولیه در زمینه تلاطم بازار سهام^۵، نشان داده‌اند که تلاطم در سری‌های زمانی مالی به سمت خوشه‌ای بودن گرایش دارد، به گونه‌ای که تغییرات بزرگ در قیمت یک دارایی، اغلب متابعت از تغییرات بزرگ دیگر و تغییرات کوچک اغلب متابعت از تغییرات کوچک دیگر دارد. این حرکت خوشه‌ای می‌تواند بیانگر این مطلب باشد که تغییرات قیمت دوره بعدی با تغییرات قیمت دوره جاری مرتبط است و بنابراین جزء قابل تخمین قیمت سهام را تشکیل می‌دهد (کشاوری حداد، ۱۳۹۰).

عمومی‌ترین مدل توسعه داده شده در ادبیات موضوع برای ثبت و تحلیل تلاطم خوشه‌ای، مدل‌های خانواده GARCH است (همان). بحث اصلی در این روش به مدل‌سازی واریانس اختصاص یافته است، براین اساس واریانس آتی تابعی از واریانس‌های گذشته و مقادیر جملات خطا برای توزیع واریانس فعلی می‌باشد. تاکنون تکنیک تخمین حداکثر راستنمایی برای بدست آوردن مقادیر پارامترهای مدل GARCH مورد استفاده قرار گرفته است. روش حداکثر راستنمایی تحت شرایط مشخص به طور مجانبی بهینه است (بولرسلو و

همکاران ۱۹۹۴ و لی و همکاران^۶، ۱۹۹۴). با این حال حال هنگام محاسبه‌ی پارامترها به روش ML مشکلاتی بوجود خواهد آمد. اولین مشکل بوجود آمده، در زمینه‌ی برآورد تابع راستنمایی است. عموماً برای حل تابع راستنمایی از تکنیک‌های بهینه‌یابی استفاده می‌شود که در آن شرایط پایداری کواریانس^۷ برقرار بوده و پارامترهای مدل مثبت یا تضمین‌کننده واریانس شرطی مثبت باشند، لذا مدل مذکور با محدودیت‌های نابرابری غیرخطی مواجه است. از طرفی اگر مقادیر واقعی پارامترها نزدیک به فضای مرزی بوده و پارامترهای مدل GARCH غیرمانا باشند، همگرایی در بهینه‌سازی به سختی حاصل می‌شود. و نتایج بهینه‌سازی اغلب به مقادیر اولیه وابسته خواهند بود. سومین مشکل بوجود آمده در روش مذکور این است که شرایط برای حفظ خواص مجانبی تخمین‌زننده‌ی ML مشکل است، زیرا مدل‌های GARCH اکثراً غیر خطی هستند و برای استدلال‌های مجانبی نیاز به داده‌های بسیار زیادی است. و در نهایت در مدل‌های استاندارد GARCH به طور مستقیم تمرکز بر روی پارامترهای مدل نیست.

روش بیزی به عنوان یک روش جایگزین برای روش ML، سال‌هاست که مدنظر محققان حوزه‌ی اقتصاد سنجی و اقتصاد سنجی مالی قرار گرفته است. استنتاج بیزی برای مدل گارچ با تلاش‌های کلیبرگان^۸ و همکاران (۱۹۹۳)، باونز^۹ و همکاران (۱۹۹۸)، ورونوز^{۱۰} و همکاران (۲۰۰۰) و ناکاستاما^{۱۱} (۲۰۰۰) شکل گرفته است. پایه و اساس روش تخمین پارامترهای یک مدل به روش بیزین، قضیه‌ی بیز است. براین اساس فرض چگالی پیشین^{۱۲} $p(\theta)$ برای بردار پارامترهای $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_a)$ و تابع درستنمایی $p(D|\theta)$ برای داده‌های $D = (x_1, \dots, x_n)$



ی مارکف مونت کارلو توزیع توام پسین^{۲۰} در پارامترهای مدل را بدست آورد. بنابراین در این حالت توزیع واقعی توابع غیرخطی از پارامترهای مدل، می تواند با هزینه کمتری از طریق شبیه سازی بدست آید (آردیا، ۲۰۱۰). هوگرهید^{۲۱} و همکاران (۲۰۱۲)، به مقایسه‌ی پیش‌بینی نرخ بازده سهام در مدل‌های GARCH با استفاده از روش بیزین و روش ML پرداختند، نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که تفاوت معناداری بین روش‌های مذکور نیست اگرچه روش بیزی در پیش‌بینی توابع با دنباله‌های چاق عملکرد بهتری دارد. ویربیکاتی^{۲۲} و همکاران (۲۰۱۴)، در مقاله‌ی تحت عنوان "روش بیزی برای مدل‌های GARCH تک متغیره و چند متغیره به بررسی آمار بیزی در مدل‌های گارچ پرداخته‌اند. تحقیقات آن‌ها نشان می‌دهد که روش‌های جدید انعطاف‌پذیرتر و توصیف بهتری را در باره‌ی عدم اطمینان در نوسانات ارائه می‌کنند. بیلو^{۲۳} و همکاران (۲۰۱۴)، در مقاله‌ای با عنوان "کارایی نمونه‌گیری گیبس در مدل‌های مارکف سوچینگ گارچ" نشان دادند که استراتژی حرکت‌های نقطه‌ای و چندگانه نسبت به سایر روش‌های MCMC کارایی بهتری دارد.

تحقیقات گسترده‌ای در ارتباط با بررسی تلاطم شاخص بورس اوراق بهادار تهران در ایران انجام گرفته است که می‌توان به پژوهش‌های کشاورز حداد و همکاران، ۱۳۹۰؛ فتاحی و همکاران، ۱۳۹۰ و کامران، ۱۳۸۹ اشاره نمود. اما بررسی تخمین پارامترهای مدل گارچ با روش‌های جایگزین از جمله تکنیک‌های آمار بیزی در ایران و برای بررسی نوسانات شاخص بورس تاکنون صورت نگرفته است. لذا این مقاله در صدد برآورد پارامترهای مدل

و با استفاده از قضیه بیزی، توزیع پسین به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} \propto p(D|\theta)p(\theta) \quad (1)$$

$$= \int p(D|\theta)p(\theta)d\theta$$

در بسیاری از موارد کاربردی بدست آوردن چگالی پسین به کمک روش‌های معمولی میسر نیست و در نتیجه برای انجام استنباط بیزی نیاز به محاسبات عددی وجود دارد. در روش شبیه‌سازی MCMC به طور کلی هدف یافتن نمونه‌ای از چگالی احتمال پسین است. در این روش دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی همبسته تولید خواهند شد که در آن نمونه تولید شده در گام j ام (θ_j) به مقدار متناظر آن در گام $(j-1)$ ام (θ_{j-1}) بستگی دارد (جلفند و اسمیت ۱۹۹۰ و جمن (۱۹۸۴). روش MCMC شامل دو رهیافت نمونه‌گیری گیبس^{۲۴} و متروپلیس هستینگز^{۲۵} است. ناکاستاما و همکاران (۱۹۹۶)، به آزمایش روش مونت کارلو در نمونه‌های کوچک پرداختند، آن‌ها نشان دادند که روش بیزی جایگزین مناسبی برای سایر روش‌ها می‌باشد. باونز و همکاران (۲۰۰۰ و ۲۰۰۲)، اسین و گالانو^{۲۶} (۲۰۰۷)، و باونز و رومبوتس^{۲۷} (۲۰۰۷) افرادی بودند که از تکنیک نمونه‌گیری گیبس برای تخمین پارامترهای مدل GARCH استفاده نمودند. مولر و پل^{۲۸} (۱۹۹۸)، ورتنز^{۲۹} و همکاران (۲۰۰۰) به بررسی روش متروپلیس هستینگ در تخمین پارامترهای مدل GARCH پرداخته‌اند.

یکی از مهمترین ویژگی‌های روش بیزی نتیجه‌گیری مناسب از نمونه‌گیری‌های کوچک و مقاوم بودن آن است (آردیا، ۲۰۰۸). در این حالت هرگونه محدودیت در پارامترهای مدل را می‌توان در توزیع‌های پیشین خاصی^{۱۹} گنجانده و با اختصاص زنجیره-

۳ اشاره دارد. همچنین فرض می شود که توزیع پیشین مناسب بر روی پارامتر از مدل های گذشته بدست آمده است.

گارج با استفاده روش بیزی و مقایسه آن با روش ML است.

۳- روش شناسی پژوهش

۳-۱- معرفی مدل GARCH با توزیع نرمال

آردیا (۲۰۰۶)، مدل GARCH(1,1) را به صورت زیر بیان می کند:

$$Y_t = \varepsilon_t(h_t)^{1/2} \quad t = 1, \dots, T \quad \varepsilon_t \sim \text{iid} N(0,1) \quad (2)$$

$$h_t = a_0 + a_1 Y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (3)$$

در این مجموعه واریانس شرطی h_t یک تابع خطی از مربع مشاهدات گذشته و واریانس گذشته است. که در آن $a_0 > 0$ و $a_1, \beta \geq 0$ و $v > 0$ می باشد. به منظور نوشتن تابع راستنمایی بردارهای $a = (a_0, a_1)$ و $Y = (Y_1, \dots, Y_T)$ و ماتریس Σ مورد استفاده قرار می گیرند.

$$\Sigma = \sum_{t=1}^T (\theta) = \text{diag}(\{h_t(\theta)\}_{t=1}^T) \quad \theta = (a, \beta) \quad (4)$$

$$h_t(\theta) = a_0 + a_1 Y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}(\theta) \quad (5)$$

بنابراین تابع راستنمایی از θ به صورت زیر نوشته می شود:

$$L(\theta|Y) \propto (\det \Sigma)^{-1/2} \exp[-1/2 Y \Sigma^{-1} Y] \quad (6)$$

$$p(\alpha) \propto N_2(\alpha | \mu_\alpha, \Sigma_\alpha) \mathbb{I}_{\alpha > 0}, \quad p(\beta) \propto N(\alpha | \mu_\beta, \Sigma_\beta) \mathbb{I}_{\beta > 0} \quad (7)$$

μ_0 و Σ_0 پارامتر هستند و \mathbb{I}_0 یک تابع مقیاس^{۲۵} که اگر محدودیت ها حفظ شوند برابر واحد و در غیر این صورت صفر است. به علاوه فرض می شود که توزیع پیشین مستقل^{۲۶} بین α و β دلالت بر این دارد که $P(\theta) = P(\alpha)P(\beta)$. بنابراین توزیع پسین توام^{۲۷} از قانون بیز^{۲۸} پیروی می کند:

$$P(\theta|Y) \propto L(\theta|Y) P(\theta) \quad (8)$$

۳-۲- شبیه سازی توزیع پسین توام (مشترک)^{۲۹}

ماهیت بازگشتی معادله ی واریانس ۳ اجزای ترکیب توام بین تابع حداکثر راستنمایی و توزیع پیشین در معادله ی ۸ را نمی دهد. بنابراین با استفاده از الگوریتم متروپلیس M-H به ترسیم نمونه ها از توزیع پسین توام^{۳۰} پرداخته می شود. الگوریتم معرفی شده در این بخش یک نوع خاص است که توسط ناکاستما^{۳۱}، ۲۰۰۰ معرفی شده است. در ادامه به ترسیم اولیه $\theta^{[0]} = (\alpha^{[0]}, \beta^{[0]})$ از توزیع پیشین توام پرداخته می شود. و یک فرآیند با زبار تکرار برای ایجاد θ ایجاد می شود.

$$(9)$$

$$\alpha^{[l+1]} \sim P(\alpha | \beta^{[l]}, Y), \quad \beta^{[l+1]} \sim P(\beta | \alpha^{[l]}, Y)$$

از آنجا که هیچ توزیع شرطی کاملی از راه تجزیه شناخته نمی شود، از دو توزیع مشخص برای α و β می توان استفاده کرد. این توزیع ها بوسیله ی مدل

اولین مشاهده به عنوان شرط یا واریانس اولیه و ثابت برابر a_0 در نظر گرفته می شود. این تابع راستنمایی به حداکثر راستنمایی شرطی در معادله ی

در قسمت بعدی نشان داده شده است که ساختار پیشنهادی توزیع برای α و β بر اساس این تابع راستنمایی محاسبه خواهد شد

۳-۳- فرآیند تولید α : (ضریب ARCH)

انتقال‌های بازگشتی^{۳۳} در ابتدا بوسیله‌ی چیب و گرینبرگ^{۳۴} (۱۹۹۴) پیشنهاد شد. تابع $Z_t(\theta)$ در معادله‌ی ۱۱ به صورت یک تابع خطی از α در نظر گرفته می‌شود که $v_t = Y_t^2$ است. این انتقالات بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(15)$$

$$l_t^* = 1 + \beta l_{t-1}^* \quad , \quad v_t^* = v_{t-1} + \beta v_{t-1}^*$$

ارزش اولیه‌ی l_t^* و v_t^* مساوی صفر است. و به صورت بردار $c = (l_t^*, v_t^*)$ و $v = (v_1, \dots, v_T)$ می‌باشند. در این حالت تابع حداکثر راستنمایی α به صورت زیر است:

$$(16)$$

$$L(\alpha|\beta, Y) \propto (\det \Lambda)^{-1/2} \exp[-1/2 (v - C\alpha)\Lambda^{-1}(v - C\alpha)]$$

توزیع پیشنهادی از نمونه‌ی α ، بوسیله‌ی ترکیب این تابع و توزیع پیشین بوسیله‌ی بی‌زم معمولی به صورت زیر است.

$$(17)$$

$$q_\alpha(\tilde{\alpha}, \alpha) \propto N_2(\alpha|\hat{\mu}_\alpha, \hat{\Sigma}_\alpha) \mathbb{1}_{\alpha>0}$$

$$(18)$$

$$\hat{\Sigma}_\alpha^{-1} = \hat{C}\Lambda^{-1}C + \Sigma_\alpha^{-1} \quad , \quad \hat{\mu}_\alpha = \hat{\Sigma}_\alpha(\hat{C}\bar{\Lambda}^{-1}v + \Sigma_\alpha^{-1}\mu_\alpha)$$

جاییکه ماتریس قطری $\bar{\Lambda}$ به صورت $\bar{\Lambda} = \text{diag}\{2\bar{h}_t^2(\theta)\}_{t=1}^T$ تعریف می‌شود

GARCH(1,1) که می‌تواند به عنوان یک مدل ARMA(1,1) برای Y_t^2 نوشته شود بدست می‌آیند. این فرآیند بوسیله‌ی $W_t = Y_t^2 - h_t$ تعریف می‌شود. در این حالت می‌توان گستره‌ی واریانس شرطی را به صورت زیر نوشت:

$$(10)$$

$$h_t = a_0 + a_1 Y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \Leftrightarrow Y_t^2 = a_0 + (a_1 + \beta) Y_{t-1}^2 - \beta W_{t-1} + W_t$$

و $W_t = Y_t^2 - h_t = (\frac{Y_t^2}{h_t} - 1)h_t = (\chi_t^2 - 1)h_t$ برابر است. h_t (1) است، که نشان‌دهنده‌ی یک فرآیند مارتین‌گیل با واریانس $2h_t^2$ است. برای تقریب W_t ، از یک متغیر Z_t ، که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $2h_t^2$ است استفاده شده، که منجر به معرفی مدل کمکی^{۳۳} زیر می‌شود. لازم به یادآوری است که Z_t و h_t هر دو تابعی از θ هستند.

$$(11)$$

$$Z_t(\theta) = Y_t^2 - a_0 - (a_1 + \beta)Y_{t-1}^2 - \beta Z_{t-1}(\theta)$$

$$(12)$$

$$h_t(\theta) = a_0 + a_1 Y_{t-1}^2 - \beta h_{t-1}(\theta)$$

و ماتریس قطری $T \times T$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(13)$$

$$\Lambda = \Lambda(\theta) = \text{diag}\{2h_t^2(\theta)\}_{t=1}^T$$

و بردار Z برابر مقدار $Z = (Z_1, \dots, Z_T)$ است. از این طریق می‌توان تابع حداکثر راستنمایی θ را با استفاده از مدل کمکی بدست آورد:

$$(14)$$

$$L(\theta|Y) \propto (\det \Lambda)^{-1/2} \exp[-1/2 Z\Lambda^{-1}Z]$$

$$(19) \quad \tilde{h}_t = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 Y_{t-1}^2 + \beta \tilde{h}_{t-1}$$

$$(24) \quad \tilde{\Sigma}_\beta^{-1} = \tilde{\nabla} \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\nabla} + \Sigma_\beta^{-1}, \quad \hat{\mu}_\beta = \tilde{\Sigma}_\beta (\tilde{\nabla} \tilde{\Lambda}^{-1} r + \Sigma_\beta^{-1} \mu_\beta)$$

ماتریس قطری $T \times T$ ، $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\{2\tilde{h}_t^2\}_{t=1}^T)$ است و در معادله ی $\tilde{h}_t = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 Y_{t-1}^2 + \beta \tilde{h}_{t-1}$ کاندید β^* نمونه گیری شده از توزیع پیشنهادی و نرخ پذیرش آن به صورت $\min = \left\{ \frac{P(\beta^*, \alpha | Y) q_\beta(\beta^*, \tilde{\beta})}{P(\tilde{\beta}, \alpha | Y) q_\beta(\tilde{\beta}, \beta^*)}, 1 \right\}$ محاسبه می شود.

$\tilde{\alpha}$ ، ترسیم α در نمونه گیری M-H است. α^* یک نمونه ای از این توزیع پیشنهادی و پذیرفته شده با احتمال $\min = \left\{ \frac{P(\alpha^*, \beta | Y) q_\alpha(\alpha^*, \tilde{\alpha})}{P(\tilde{\alpha}, \beta | Y) q_\alpha(\tilde{\alpha}, \alpha^*)}, 1 \right\}$ است.

۳-۴- فرآیند تولید β : (ضریب GARCH)

تابع $Z_t(\theta)$ ، در معادله ی (۱۱) به عنوان یک تابع خطی از α در بخش قبلی گسترش یافت اما نمی تواند به عنوان یک تابع خطی برای β گسترش یابد. برای غلبه بر این مشکل Z_t بوسیله ی بسط تیلور مرتبه ی اول به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$(20) \quad Z_t \cong Z_t(\tilde{\beta}) + \frac{dZ_t}{d\beta} \Big|_{\beta=\tilde{\beta}} (\beta - \tilde{\beta})$$

$\tilde{\beta}$ ، ترسیم قبلی از β در نمونه گیری M-H است.

$$(21) \quad r_t = Z_t(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta} \nabla_t, \quad \nabla_t = -\frac{dZ_t}{d\beta} \Big|_{\beta=\tilde{\beta}}$$

اصطلاح ∇_t ، به صورت $\nabla_t = Y_{t-1}^2 - Z_t(\tilde{\beta}) + \tilde{\beta} \nabla_{t-1}$ محاسبه می شود. مقدار اولیه $\nabla_0 = 0$ و (r_0, \dots, r_T) و $(\nabla_0, \dots, \nabla_T)$ در این حالت تابع نمایی به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$(22) \quad \exp\left[-\frac{1}{2} (r_t - \beta \nabla_t) \Lambda^{-1} (r_t - \beta \nabla_t)\right]$$

توزیع پیشنهادی از نمونه β بوسیله ی ترکیب تقریبی از راستنمایی و توزیع پیشین بوسیله ی قانون بیز نوشته می شود:

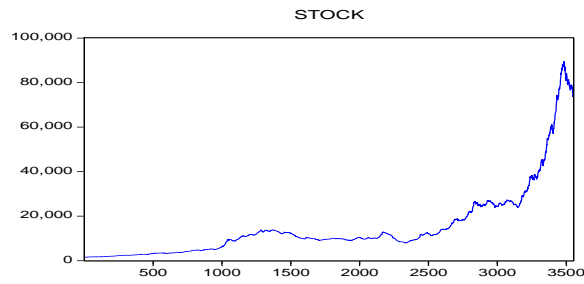
$$(23) \quad q_\beta(\tilde{\beta}, \beta) \propto N(\beta | \hat{\mu}_\beta, \tilde{\Sigma}_\beta) \mathbb{1}_{\beta > 0}$$

۴- نتایج پژوهش (برآورد مدل و تحلیل نتایج)

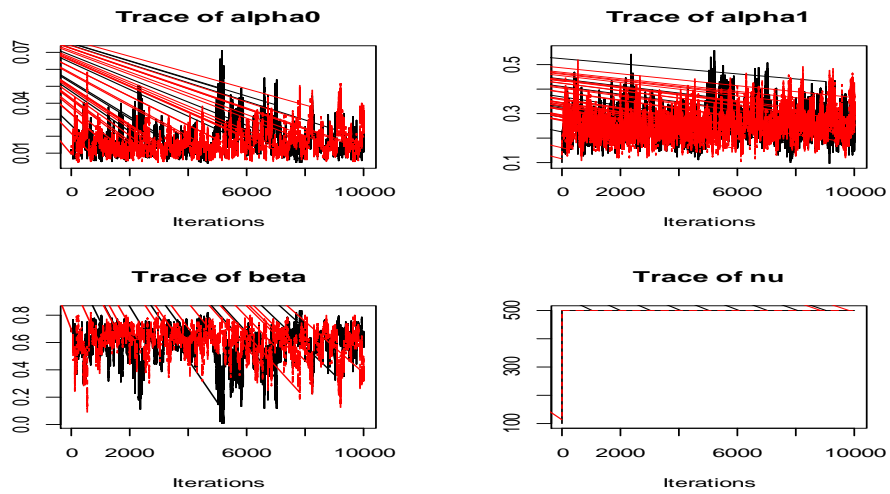
اغلب سری های زمانی مانند قیمت سهام نامانا هستند بنابراین در عمل از سری بازدهی قیمت که از رابطه ی $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ بدست می آید، استفاده می شود. نمودار (۱) و (۲) به ترتیب نمودار شاخص بورس و سری بازدهی را در دوره ی مورد بررسی نشان می دهد. با توجه به این نمودارها سری زمانی مرتباً در حال نوسان است. این پدیده در بازارهای مالی شناخته شده است و از آن به عنوان نوسانات خوشه ای نام برده می شود (آردیا، ۲۰۱۰).

ابتدا نمونه گیری با ۷۵۰ مشاهده آغاز می شود، این تعداد مشاهده برای بررسی عملکرد تخمین حداکثر راستنمایی کافی است و قادر است شرایط مجانبی تخمین را فراهم نماید (آردیا، ۲۰۰۶). سپس نتایج به ترتیب برای ۱۴۰۰ و ۲۴۰۰ مشاهده گسترش می یابد. بعد از انتخاب حجم نمونه نوبت به بررسی تعداد مراحل شبیه سازی، بررسی همگرایی و تعیین مرحله ی سوخت است. در ادامه نمونه هایی با حجم ۷۵۰، ۱۴۰۰ و ۲۴۰۰ مشاهده، برای دو زنجیره و برای هر زنجیره به ترتیب ۱۰۰۰۰، ۱۰۰۰۰ و ۲۰۰۰۰ مرحله برای شبیه سازی تعیین می شود. نمودار نوسانات در زنجیره ی MCMC در نمودارهای (۳) تا (۵) به تصویر کشیده شده است.

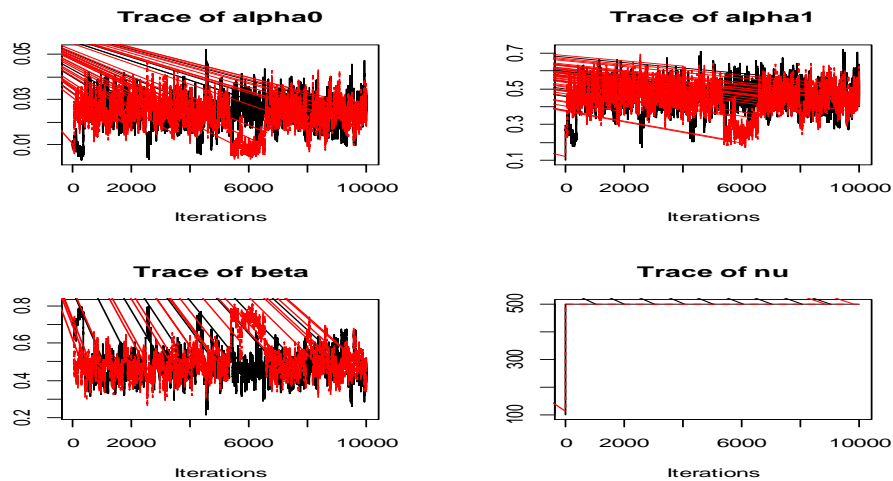




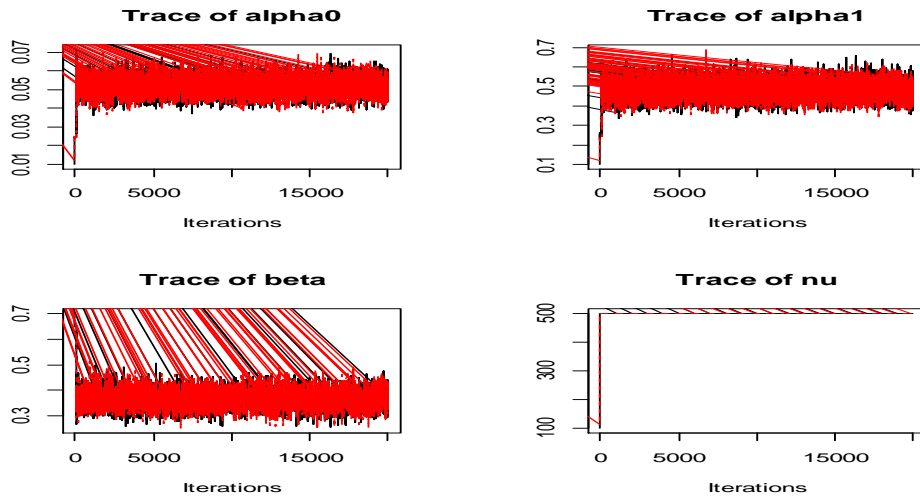
نمودار ۱: شاخص سهام



نمودار ۳: ترسیم نوسانات در دو زنجیره‌ی MCMC در نمونه‌هایی با حجم ۷۵۰ مشاهده (با رنگ قرمز و مشکی) برای پارامترهای مدل که بوسیله‌ی الگوریتم M-H تولید شده است.



نمودار ۴: ترسیم نوسانات در دو زنجیره‌ی MCMC در نمونه‌هایی با حجم ۱۴۰۰ مشاهده (با رنگ قرمز و مشکی) برای پارامترهای مدل که بوسیله‌ی الگوریتم M-H تولید شده است.



نمودار ۵: ترسیم نوسانات در دو زنجیره ی MCMC در نمونه هایی با حجم ۲۴۰۰ مشاهده (با رنگ قرمز و مشکی) برای پارامترهای مدل که بوسیله ی الگوریتم M-H تولید شده است. مأخذ: منبع تحقیق

شد. آماره های توزیع پسین برای مشاهدات فوق در جداول مربوطه بیان خواهد شد. این آماره ها شامل چندک ها، میانگین، میانه، ضریب چولگی و ضریب کشیدگی است. در این مقاله از مقدار میانگین به عنوان برآورکننده ی بیز استفاده خواهد شد، بنابراین تحلیل ها بر پایه ی مقدار میانگین انجام می گیرد اصلی ترین مزیت میانگین این است که از کلیه ی داده ها برای محاسبه ی آن استفاده شده است.

در ادامه از آزمون ژلمن و رابین^{۳۵} برای شناسایی مرحله ی سوخت استفاده خواهد شد. براین اساس هنگامیکه عامل کاهش مقیاس کوچکتر از ۱/۲ باشد از مراحل اولیه وارد مرحله ی سوخت می شود و از این طریق همگرایی نمونه تضمین خواهد شد (آردیا، ۲۰۱۰). مقدار عامل کاهش مقیاس در نمونه هایی با حجم ۷۵۰، ۱۴۰۰ و ۲۴۰۰ به ترتیب برابر ۱/۰۲، ۱/۱ و ۱ می باشد براین اساس نیمی از مراحل در زنجیره ی MCMC حذف خواهد

جدول ۱: نتایج تخمین پارامترهای مدل GARCH(1,1) در نمونه ای با حجم ۷۵۰ مشاهده

	$\bar{\theta}$	$\theta_{0.25}$	$\theta_{0.5}$	$\theta_{0.75}$	$\theta_{0.975}$	کشیدگی	چولگی	MLE method
α_0	۰/۰۱۸	۰/۰۱۲	۰/۰۱۶	۰/۰۲۳	۰/۰۴۱	۵/۸	۱/۴	۰/۰۰۵(۰,۰۰۱)*
α_1	۰/۲۶۷	۰/۲۲۳	۰/۲۶۱	۰/۳۰۶	۰/۴۰۹	۳/۲	۰/۵	۰/۱۶۶(۰,۰۲)*
β	۰/۵۶۷	۰/۴۹۳	۰/۵۹۱	۰/۶۶۳	۰/۷۶	۴/۰۹	-۰/۹	۰/۷۷۸(۰,۰۳)*

$\bar{\theta}$ ، میانگین پسین. θ_{φ} ، تخمین چندک ها پسین با احتمال φ . * اعداد داخل پرانتز انحراف معیار تخمین گارج به روش حداکثر راستنمایی می باشد. ا مقادیر P-value برای کلیه ی تخمین ها به روش حداکثر راستنمایی ۰/۰۰ می باشد. اعداد فوق به سمت بالا گرد شده اند.

مأخذ: منبع تحقیق

کمتر است و شرایط مجانبی در این حالت حفظ نمی‌شود.

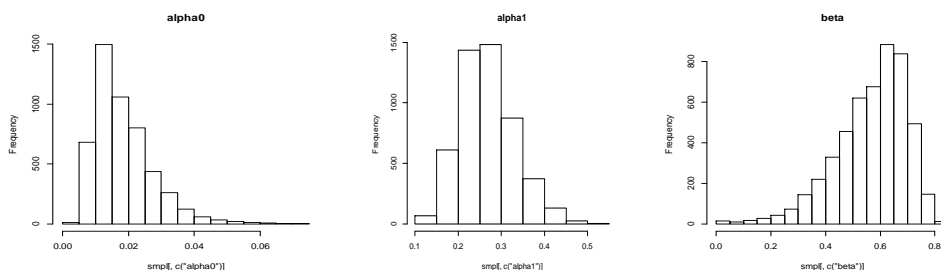
در این حالت بر اساس جدول (۲)، پارامترهای آلفا تقریباً مشابه و بتا در تخمین به روش ML بیشتر از مقدار تخمین به روش بیزی است. بنابراین شوک-های وارد شده به واریانس زمان طولانی‌تری برای آرام شدن در روش ML نیاز دارند. میزان کشیدگی در پارامترهای آلفا یک و بتا به ترتیب ۳/۱ و ۳/۲ می‌باشد. و چولگی و عدم تقارن نیز در هر سه پارامتر به چشم می‌خورد. اما میزان آن در نمونه‌ی فوق نسبت به نمونه‌ی قبلی کمتر است. این نشان می‌دهد که توزیع پارامترها به سمت توزیع متقارن مجانبی میل می‌کند. نمودار (۷) نشان‌دهنده‌ی هیستوگرام توزیع پسین پارامترهای مدل در نمونه‌ای با حجم ۱۴۰۰ مشاهده‌است.

اولین وقفه‌ی خود همبستگی در زنجیره‌ی MCMC برای نمونه‌ای به حجم ۷۵۰ مشاهده برای آلفا، ۰/۷۶٪ و بتا ۰/۹۷۷٪ محاسبه شده است. در این الگوریتم نرخ پذیرش برای α_1 ، ۰/۸۸٪ و برای β ، ۰/۹۵۸٪ می‌باشد. بر اساس جدول (۱) در این حالت پارامترهای آلفا و بتا در تخمین به روش ML به ترتیب کمتر و بیشتر از تخمین به روش بیزی است. میزان کشیدگی به صورت معناداری در پارامترهای آلفا صفر و بتا بزرگتر از نرمال می‌باشد. و چولگی و عدم تقارن نیز در هر سه پارامتر به چشم می‌خورد. نمودار (۶) نشان‌دهنده‌ی هیستوگرام توزیع پسین پارامترهای مدل در نمونه‌ی فوق است. این نمودارها نشان می‌دهند که کارایی تخمین ML در این نمونه

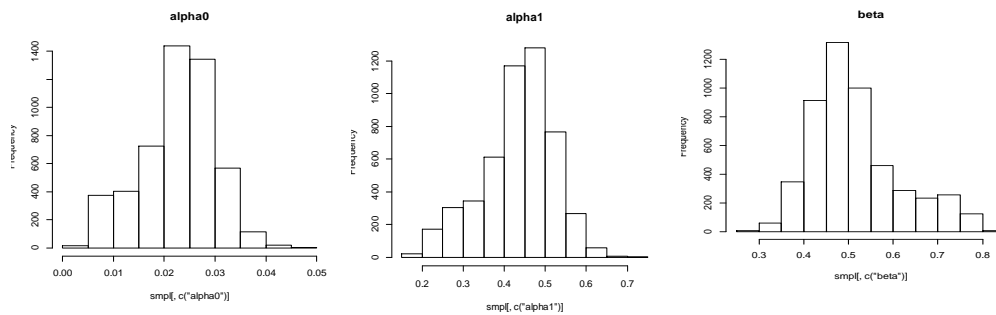
جدول ۲: نتایج تخمین پارامترهای مدل GARCH(1,1) در نمونه‌ای به حجم ۱۴۰۰

	$\bar{\theta}$	$\theta_{0.25}$	$\theta_{0.5}$	$\theta_{0.75}$	$\theta_{0.975}$	کشیدگی	چولگی	MLE method
α_0	۰/۰۲۳	۰/۰۱۹	۰/۰۲۴	۰/۰۲۸	۰/۰۳۵	۲/۹	-۰/۳	(۰,۰۰۱)* ۰/۰۱۶
α_1	۰/۴۳۴	۰/۳۸۷	۰/۴۴۵	۰/۴۹۴	۰/۵۸۲	۳/۱	-۰/۵	(۰,۰۳)* ۰/۴۳۳
β	۰/۵۱۵	۰/۴۴۷	۰/۴۹۴	۰/۵۵۹	۰/۷۵۱	۳/۲	۰/۸	(۰,۰۳)* ۰/۵۵۵

مقادیر P-value برای کلیه تخمین‌ها به روش حداکثر راستنمایی ۰/۰۰ می‌باشد. اعداد فوق به سمت بالا گرد شده‌اند. مأخذ: منبع تحقیق



نمودار ۶: توزیع پسین پارامترهای مدل در نمونه‌ای با حجم ۷۵۰ مشاهده.



نمودار ۷: توزیع پسین پارامترهای مدل در نمونه‌ای با حجم ۱۴۰۰

جدول ۳: نتایج تخمین پارامترهای مدل GARCH(1,1) در نمونه‌ای به حجم ۲۴۰۰

	$\bar{\theta}$	$\theta_{0.25}$	$\theta_{0.5}$	$\theta_{0.75}$	$\theta_{0.975}$	کشیدگی	چولگی	MLE method
α_0	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۵۴	۰/۰۶	۳/۱	۰/۱	$(0,0.01)^*$ ۰/۰۵۱
α_1	۰/۴۸	۰/۴۵۲	۰/۴۷۹	۰/۵۰۶	۰/۵۶	۳/۰۴	۰/۱	$(0,0.2)^*$ /۴۷۲
β	۰/۳۶۹	۰/۳۴۷	۰/۳۷	۰/۳۹	۰/۴۳۳	۳/۰۷	۰/۱	$(0,0.1)^*$ ۰/۳۸۴

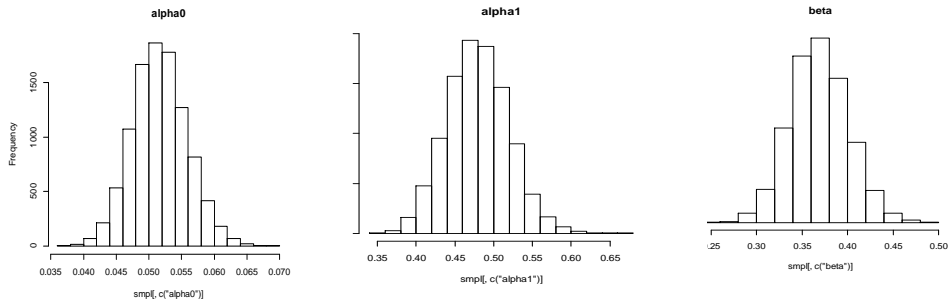
مقادیر P-value برای کلیه تخمین‌ها به روش حداکثر راستنمایی 0/00 می‌باشد.. اعداد فوق به سمت بالا گرد شده‌اند. مأخذ: منبع تحقیق

افزایش تعداد مشاهدات نتایج برآورد پارامترها در هر دو روش همگرا می‌شوند میزان کشیدگی در پارامترهای آلفا یک و بتا به ترتیب ۳/۰۴ و ۳/۰۷ می‌باشد که بسیار به کشیدگی نرمال نزدیک است. چولگی و عدم تقارن نیز در هر سه پارامتر نسبت به حالت‌های قبل کاهش یافته است و به توزیع مجانبی متقارن بسیار نزدیک است. نمودار (۸) نشان‌دهنده هیستوگرام توزیع پارامترهای مدل در نمونه‌ای با حجم ۲۴۰۰ مشاهده است، که تقارن در این نمودارها به خوبی مشخص است. براساس مقادیر بدست آمده در جدول ۳، روش حداکثر راستنمایی نیز کارایی لازم برای تخمین پارامترهای GARCH را دارد.

در زنجیره‌ی MCMC برای نمونه‌ای به حجم ۱۴۰۰ مشاهده نیز، اولین وقفه‌ی خودهمبستگی برای پارامتر آلفا، ۸۷٪ و بتا ۹۷٪ محاسبه شده است. در این الگوریتم نرخ پذیرش برای α_1 ، ۹۲٪ و برای β ، ۹۶٪ می‌باشد.

در پایان، زنجیره‌ی MCMC برای نمونه‌ای به حجم ۲۴۰۰ مشاهده بررسی می‌شود. اولین وقفه‌ی خودهمبستگی برای آلفا، ۴۵٪ و برای بتا ۸۳٪ محاسبه شده است. در این الگوریتم نمونه‌گیری نرخ پذیرش برای α_1 ، ۹۰٪ و برای β ، ۹۷٪ است.

در این حالت نیز پارامترهای آلفا و بتا تقریباً در هر دو تخمین مشابه هستند، جدول (۳) نشان‌دهنده-ی مقادیر پارامترهای مذکور است.. بنابراین با



نمودار ۸: توزیع پسین پارامترهای مدل در نمونه‌ای با حجم ۲۴۰۰

نشان می‌دهد. همان طور که جدول ۴ مشخص است مقدار $\alpha_1 + \beta$ در روش ML در داده‌هایی با تعداد مشاهدات ۲۴۰۰ و ۷۵۰ بیشتر از روش بیزی است. بنابراین در روش تخمین حداکثر راستنمایی نوسانات پایداری بیشتری از خود نشان می‌دهند.

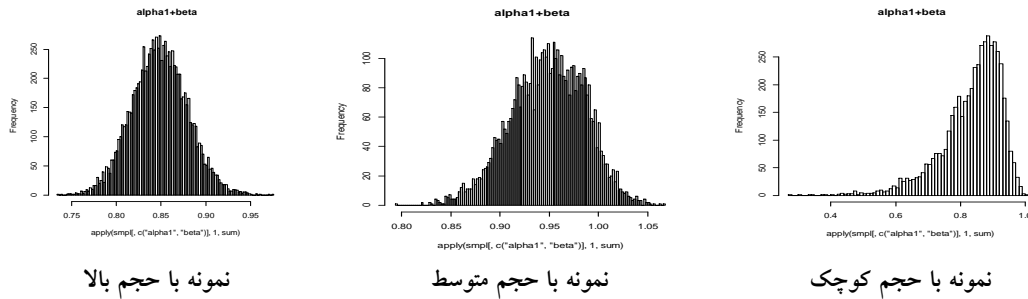
با بررسی مجموع ضرایب α و β که نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی پایداری نوسانات است مشاهده می‌گردد که درجه پایداری در نمونه‌هایی به حجم ۱۴۰۰، در هر دو تخمین بالاتر از بقیه است که این نشان‌دهنده‌ی پایداری مدل بوده و ماهیت داده‌ها در این دوران را

جدول ۴: آمار توصیفی توزیع پسین ضرایب پایداری $\alpha_1 + \beta$

		نمونه‌ای با حجم ۷۵۰	نمونه‌ای با حجم ۱۴۰۰	نمونه‌ای با حجم ۲۴۰۰
روش بیزین	میانگین	۰/۸۳۴۷۴۴	۰/۹۴۸۵۵۵	۰/۸۴۱۴۷۲۹
	میانه	۰/۸۵۵۶۰۷	۰/۹۴۹۷۸۶	۰/۸۴۸۲۱۹۳
	انحراف معیار	۰/۰۹۲	۰/۰۳۷۶۱۴	۰/۰۳۱
	بیشترین مقدار	۱/۰۱۵	۱/۰۶۶	۰/۹۷۵۶۹۱۶
	کمترین مقدار	۰/۲۷۱۴	۰/۷۹۵۱۷	۰/۷۳۵۹۲۹۳
	کشیدگی	۵/۵	۲/۸۵	۳/۰۶
	چولگی	-۱/۲۹	-۰/۲	۰/۰۶
روش حداکثر راستنمایی	MLE method	۰/۹۴	۰/۹۸۸	۰/۸۵۵۸۴۴

مقارن مجانبی میل دهد که این نشان از برتری مدل بیزی بر روش ML دارد.

شکل توزیع پسین درجه پایداری، در نمودار (۹) ترسیم شده است. بر این اساس در نمونه‌هایی با حجم بالاتر نتایج به سمت توزیع مقارن مجانب میل می‌کند. اما در نمونه ۷۵۰ توزیع چوله به چپ است و بنابراین حتی ۷۵۰ مشاهده نیز قادر نیست که توزیع پارامترهای تقریب زده شده را به سمت توزیع نرمال



نمودار ۹: ترسیم چگالی پسین از ضرایب پایداری

اختلاف آن‌ها ناچیز است. در پایان در نمونه‌ی با حجم بزرگ از مجموع ۳۵۵۲ داده، ۲۴۰۰ داده به عنوان نمونه در مرحله‌ی تخمین استفاده و بقیه برای پیش بینی لحاظ شده است. همان طور که در جدول (۵) مشخص است کلیه‌ی معیارهای دقت پیش‌بینی در هر دو روش بسیار به همدیگر نزدیک شده‌اند، بنابراین در نمونه‌هایی با حجم زیاد برآورد دو روش تقریباً به صورت یکسان خواهد بود.

جدول ۵: نتایج پیش‌بینی نوسانات

		MSE	MAE1
نمونه با حجم کوچک	بیزین	۰/۰۹۷۵	۰/۲۲۴۸۹۷
	MLE	۰/۲۶۹۷۶	۰/۳۳۸۲۸۵
نمونه با حجم متوسط	بیزین	۰/۱۴۹۶	۰/۲۴۰۳
	MLE	۰/۱۷	۰/۲۶۲۰۵۸
نمونه با حجم بزرگ	بیزین	۰/۳۲۰۲	۰/۴۰۸۹
	MLE	۰/۳۲۰۹	۰/۴۱۰۲

مآخذ: منبع تحقیق

بر اساس نتایج فوق کلیه‌ی معیارهای دقت پیش-بینی ذکر شده روش بیزین را در نمونه‌های کوچک بر روش ML مقدم می‌دانند. بنابراین می‌توان بیان

از مباحث فوق دو نکته قابل استخراج است اول اینکه هرچه حجم نمونه بزرگ‌تر شود توزیع به سمت توزیع نرمال مجانبی حرکت می‌کند و مقدار ضرایب در هر دو تخمین به هم به نزدیک می‌شوند. دوم؛ در نمونه با حجم کوچک توزیع دارای چولگی است. به این معنا که حتی ۷۵۰ مشاهده نیز برای بدست آوردن تقریب نرمال مجانبی برای توزیع پارامترها کافی نیست. بنابراین روش تخمین بیزین بر روش تخمین ML در نمونه‌هایی با حجم پایین برتری دارد و در نمونه‌هایی با حجم بیشتر نتایج دو تخمین تقریباً مشابه است. در پایان برای بررسی کارایی پیش‌بینی تلاطم در دو روش تخمین به ارزیابی پیش‌بینی نوسانات بر اساس دو معیار MSE و MAE1 پرداخته می‌شود. در نمونه‌ی با حجم کم از مجموع ۱۱۲۵ داده، ۷۵۰ داده برای تخمین و مابقی برای پیش‌بینی استفاده می‌شود. نتایج پیش‌بینی در جدول (۳) گزارش شده است: در این نمونه براساس معیارهای مذکور روش تخمین بیزین بر روش ML برتری دارد. در نمونه‌ی با حجم متوسط از مجموع ۲۱۰۰ داده ۲/۳ آن برای مرحله‌ی تخمین (یعنی ۱۴۰۰ داده) و بقیه برای مرحله‌ی پیش‌بینی استفاده شده است. نتایج پیش‌بینی نشان می‌دهد که مدل‌های بیزی عملکرد بهتری در مقایسه با روش حدکثر راستنمایی دارند. هر چند که مقادیر

کوچک (۷۵۰ مشاهده)، متوسط (۱۴۰۰ مشاهده)، و بزرگ (۲۴۰۰ مشاهده) تقسیم شده‌اند، و پارامترهای مدل GARCH در هر نمونه از دو روش فوق تخمین زده شده‌اند.

نتایج بدست آمده از تخمین نشان می‌دهد که، با افزایش طول دوره‌ی مورد بررسی توزیع پسین پارامترها به سمت توزیع متقارن مجانبی پیش می‌رود و نتایج تخمین با دو تکنیک حداکثر راستنمایی و رویکرد بیزین همگرا می‌شوند این در حالیست که در نمونه‌های کوچک این توزیع نامتقارن است، فلذا کارایی تخمین ML کمتر از تخمین بیزین می‌باشد. بررسی عملکرد پیش‌بینی خارج از نمونه تایید کننده-ی ادعای فوق است. در این راستا، به سرمایه‌گذاران مالی توصیه می‌شود که برای پیش‌بینی تلاطم بازده سهام با استفاده از داده‌هایی با حجم کم از روش بیزین به جای ML استفاده نمایند. نتایج تخمین فوق با مقالات خارجی مانند آردیا، ۲۰۱۰، ۲۰۰۹، ۲۰۰۶ سازگاری دارد.

فهرست منابع

- * کشاورزحداد، غلامعلی و بابایی، آرش (۱۳۸۷) "بررسی تلاطم بازده سهام در بورس تهران با استفاده از داده‌های پانل و مدل GARCH" پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده‌ی مدیریت و اقتصاد.
- * نظیفی نایینی، مینو؛ فتاحی، شهرام و صمدی، سعید (۱۳۹۱). "مدلسازی و پیش‌بینی نوسانات بازار سهام با استفاده از مدل انتقالی گارچ مارکف"، تحقیقات مدلسازی اقتصادی، سال سوم، شماره ۹.

داشت که در نمونه‌های کوچک روش تخمین بیزین بر روش حداکثر راستنمایی ارجحیت دارد. نتایج فوق با پژوهش‌های آردیا، ۲۰۰۶، ۲۰۰۹ و ۲۰۱۰ سازگاری دارد. لذا به سرمایه‌گذاران مالی توصیه می‌شود که برای پیش‌بینی تلاطم بازده سهام با استفاده از داده‌هایی با حجم کم از نمونه‌های مذکور استفاده نمایند.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

بورس اوراق بهادار در کشورهای مختلف همواره دستخوش نوسانات بوده و کندو کاو درباره‌ی روش‌های تخمین و پیش‌بینی تلاطم در آن همواره مد نظر اقتصاددانان و صاحب نظران می‌باشد. به‌طوریکه مدل‌های مختلفی برای این منظور معرفی شده و مورد استفاده قرار گرفته است. به دلیل ویژگی‌های خاص مدل‌های GARCH استفاده‌ی گسترده‌ای از آن در تخمین و پیش‌بینی تلاطم صورت گرفته است که در ایران می‌توان به پژوهش‌های کشاورزحداد، ۱۳۹۰، ۱۳۸۹، نظیفی، ۱۳۹۰ و کامران، ۱۳۸۹ اشاره نمود.

به موازات توسعه‌ی مدل‌های خانواده GARCH روش تخمین آن‌ها نیز طی سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران حوزه‌ی مالی قرار گرفته است. در این راستا روش تخمین بیزین و حداکثر راستنمایی کاربرد وسیعی یافته و در مقالات متعدد مورد آزمون قرار گرفته‌اند. متأسفانه در بازارهای مالی داخل کشور پژوهشی در این زمینه انجام نگرفته است. لذا با توجه به اهمیت بازار بورس به عنوان نهادی برای جذب سرمایه‌گذاری، هدف عمده‌ی پژوهش حاضر مقایسه‌ی روش‌های مذکور در بازار سهام ایران است. در این راستا، داده‌ها به سه دوره‌ی

- * Geman, S. and Geman, D.(1984), " Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images", Institute of electrical and electronics engineers
- * Geweke JF (1989). "Bayesian Inference in Econometric Models Using Monte Carlo Integration" *Econometrica*, 57(6), 1317–1339. Reprinted in: *Bayesian Inference*, G. C. Box and N. Polson (Eds.), Edward Elgar Publishing,.
- * Green. William H." *Econometrics Analysis*" seventh edition, New York University
- * Lee SW, Hansen BE (1994). "Asymptotic Theory for the GARCH(1,1) Quasi Maximum Likelihood Estimator." *Econometric Theory*, 10(1), 29–52.
- * Smith, A.F.M and Robert, G.O.(1993) "Bayesian computation via the Gibbs sampler and related Markov chain Monte Carlo method (with discussion)", *Journal of Royal Statistical society, Series B*, 55, 3-23
- * TeruoNakatsuma,(1998) "A markov- chain sampling algorithm for GARCH models. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*", 3(2):107–117
- * پاکیزه، کامران(۱۳۸۹). " تلاطم و بازده (شواهدی از بورس اوراق بهادار تهران و بورس های بین الملل)", *تحقیقات مدل‌سازی اقتصادی، دوره ۱، شماره ۲*
- * Ardia.D(2006). "Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Normal Innovation". University of Fribourg Switzerland
- * Ardia D (2008). "Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models: Theory and Applications", volume 612 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, Germany. ISBN 978-3-540-78656-6. doi:10.1007/978-3-540-78657-3.
- * Ardia D, Hoogerheide LF, van Dijk HK (2008). 'AdMit': Adaptive Mixture of Studentt Distributions for Efficient Simulation in R. URL [http://CRAN.R-project.org/](http://CRAN.R-project.org/package=AdMit) package=AdMit.
- * Ardia D, Hoogerheide LF (2009). "Bayesian Estimation of the GARCH(1,1) Model with Student-t Innovations in R" MPRA working paper. URL <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/17414/>.
- * Ardia D, Hoogerheide LF, van Dijk HK (2009). "Adaptive Mixture of Student-t Distributions as a Flexible Candidate Distribution for Efficient Simulation: The R Package AdMit" *Journal of Statistical Software*, 29(3), 1–32. URL <http://www.jstatsoft.org/v29/i03/>.
- * Ausin MC, Galeano P (2007). "Bayesian Estimation of the Gaussian Mixture GARCH Model." *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(5), 2636–2652. doi:10.1016/j.jcsda.2006.01.006.
- * Bollerslev T, Chou RY, Kroner K (1992). "ARCH Modeling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence." *Journal of Econometrics*, 52(1–2), 5–59. doi:10.1016/0304-4076(92)90064-X.
- * Engle RF (1982). "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation." *Econometrica*, 50(4), 987–1008
- * Gelfand, A.E and Smith, A.F.M(1990)" Sampling - Based approaches to calculating marginal density", *Journal of the American Statistical Associated*, 85, 398-409

یادداشت‌ها

1. Engle
2. Maximum likelihood (ML)
3. Albert & Chib
4. Monte Carlo Markov Chain (MCMC)
5. Mandelbrot, 1963; Fama 1965
6. Lee and Hansen, 1994
7. Covariance stationary
8. Kleibergen
9. Bauwens
10. Verontoz
11. Nakastama
12. prior distribution
13. Gibbs sampling
14. Metropolis Hastings
15. Ausin and Galeano
16. Bauwens and Rombouts
17. Muller and Pole
18. Vrontos
19. appropriate prior specifications
20. the joint posterior distribution
21. Hoogerheide
22. Virbickaite
23. Billo
24. hyper parameter
25. Indicator function



- ²⁶ . prior independence
- ²⁷ . joint posterior distribution
- ²⁸ . Bayes' rule
- ²⁹ . Simulating the joint posterior
- ³⁰ . the joint posterior distribution
- ³¹ . Nakatsuma
- ³² . auxiliary model
- ³³ . Recursive transformations
- ³⁴ . Chib and Greenberg

^{۳۰}. آزمون ژلمن و رابین (۱۹۹۲)، یک روش عمومی برای همگرایی خروجی زنجیره‌ی مارکف مونت کارلویی در $m > 1$ را ارائه می‌کند.