نشریـه علمـی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال سیزدهم، شماره چهل‌و ششم
تابستان ۱۳۹۹

پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی

مریم دولو[۱]
علیرضا ورزیده[۲]

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۹/۰۸ تاریخ پذیرش: ۹۷/۱۰/۰۲

چکیده

استفاده از مدل‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی در سالیان اخیر مورد توجه پژوهشگران علوم مالی بوده است که یکی از معروف‌ترین آن‌ها مدل حرکت براونی هندسی (GBM) می‌باشد. هدف پژوهش حاضر پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، یکی از شاخص‌های مهم اقتصادی مورد توجه سرمایه‌گذاران، با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی است. برای این منظور، شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ابتدای ۱۳۸۰ تا پایان سال ۱۳۹۵ مورد بررسی قرار گرفت. نتایج پژوهش نشان داد که مدل حرکت براونی هندسی قادر است تا شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را در افق زمانی ۱ روزه با صحت بالا پیش‌بینی کند. از دیگر نتایج پژوهش حاضر این است که با افزایش افق زمانی پیش‌بینی، صحت مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل کاسته شده و توانایی مدل در شبیه‌سازی شاخص کاهش می‌یابد، با این حال تا افق پیش‌بینی ۹۰ روزه کماکان مقادیر پیش‌بینی شده از صحت بالایی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل تصادفی، شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، حرکت براونی هندسی.

۱- استادیار گروه مدیریت مالی دانشکده مدیریت و حسابداری دانشگاه شهید بهشتی. ma_davallou@yahoo.com
۲- کارشناسی ارشد مدیریت مالی دانشکده اقتصاد، مدیریت و حسابداری دانشگاه یزد. (نویسنده مسئول) alireza968@yahoo.com

۱- مقدمه

بازار سرمایه از طریق نقشی که در تجهیز منابع و تخصیص آن به فرصت‌های سرمایه‌گذاری بهینه ایفا می‌کند، همواره از جایگاه ویژه‌ای در اقتصاد برخوردار است. رشد بازار سرمایه عموماً به منزله حرکت در مسیر توسعه و رشد اقتصادی است. در هر یک از بورس‌های دنیا معیاری جهت بررسی وضعیت تغییرات آن تعریف شده که «شاخص»[1] نامیده می‌شود. امروزه شاخص‌های مختلف و شناخته شده‌ای در سراسر دنیا وجود دارد که در هر زمان مورد تحلیل فعالان اقتصادی قرار می‌گیرد. شاخص بورس رایج‌ترین معیاری است که تحلیلگران جهت ارزیابی پرتفوی از آن استفاده می‌کنند (هریس، ۲۰۰۳، ۴۴۸). در خصوص قابلیت پیش‌بینی بازارهای مالی، بسیاری از پژوهش‌گران بر این باورند که بازارهای مالی از روندی غیرخطی پیروی می‌کند (تومایدیس[2]، ۲۰۰۷؛ میتال و گول[3]، ۲۰۱۲) و به همین دلیل از مدل‌های غیرخطی برای پیش‌بینی قیمت سهام و شاخص‌های بازارهای مالی استفاده می‌کنند (مانند تهرانی و مرادپور (۱۳۹۱) و عمر و جعفر (۲۰۱۱)). از جمله مدل‌های غیرخطی، مدل‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی است که عموماً دارای متغیری است که از خاصیت تصادفی برخوردار بوده و مقادیر آن از توزیع مشخصی پیروی می‌کند. از معادلات دیفرانسیل تصادفی برای توضیح فرآیندهای صنایع مختلف استفاده می‌شود (لیو و همکاران، ۲۰۱۳). این مدل‌ها در تحقیقات مختلف اقتصادی و بازار سرمایه نیز استفاده شده است (مانند نیسی و پیمانی (۱۳۹۳)). یکی از معروف‌ترین مدل‌های غیرخطی، مدل حرکت براونی هندسی است که در زمینه‌های مختلفی استفاده گردیده است. پستالی و پیچتی (۲۰۰۶) از معادلات دیفرانسیل تصادفی جهت پیش‌بینی و شبیه‌سازی قیمت نفت استفاده کردند و نشان دادند حرکت براونی هندسی بهترین الگوی بررسی و شبیه‌سازی قیمت نفت است. در سال‌های اخیر کاربرد مدل مذکور توسعه یافته و در مواردی مانند پیش‌بینی قیمت سهام و کالا (مانند خالوزاده و خاکی صدیق؛ ۱۳۸۴ و پستالی و پیچتی؛ ۲۰۰۶)، شاخص بورس (مانند عمر و جعفر؛ ۲۰۱۱) و بهینه‌سازی پرتفوی (مانند قلی‌زاده و همکاران؛ ۱۳۹۴) استفاده شده است.

در اغلب پژوهش‌های پیشین، مدل حرکت براونی هندسی در مقایسه با سایر مدل‌ها و تنها به صورت مقایسه‌ای مورد بررسی قرار گرفته و به توانایی مدل مذکور به صورت منفرد کمتر توجه شده است. اما این سوال مطرح است که آیا اساساً GBM توانایی شبیه‌سازی مناسب روندهای سری زمانی را دارد یا تنها به صورت مقایسه‌ای می‌تواند نسبت به یک مدل رقیب بهتر عمل نماید؟ در این صورت، ممکن است این مدل لزوماً نتواند پیش‌بینی دقیقی ارائه دهد و تنها نسبت به مدل‌های رقیب، متضمن پیش‌بینی مناسب‌تری است. همچنین در پژوهش حاضر از قلمرو زمانی وسیع‌تر و حجم بیشتری از مقادیر شاخص بازار نسبت به پژوهش‌های پیشین استفاده شده است. از دیگر وجوه تمایز این پژوهش، توجه به توان مدل GBM در پیش‌بینی افق‌های زمانی متفاوت است. زیرا خالوزاده و خاکی صدیق (۱۳۸۴) نشان دادند مدل حرکت براونی هندسی هم در افق زمانی ۱ روزه و هم در زمان‌های بلندمدت، کارایی بالاتری نسبت به مدل خطی دارد. بنابراین در مورد پیش‌بینی شاخص نیز تلاش می‌شود با پیش‌بینی چندین افق زمانی مختلف، در مورد توانایی مدل GBM در شبیه‌سازی مقادیر شاخص درک بهتری حاصل شود.

هدف پژوهش حاضر پاسخ به این پرسش است که مدل حرکت براونی هندسی تا چه میزان و با چه دقتی می‌تواند شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران را شبیه‌سازی و پیش‌بینی نماید؟ در بخش دوم پژوهش به بررسی بنیان علمی، روش اجرا و مدل تحقیق پرداخته می‌شود. در این بخش در قسمت ۲-۱ به بیان مفاهیم و مبانی نظری تحقیق و در قسمت ۲-۲ به مرور مطالعات مرتبط پیشین پرداخته خواهد شد. در ادامه و در قسمت ۲-۳ به روش پژوهش پرداخته می‌شود که شامل سوال پژوهش، مدل ریاضی حرکت

براونی هندسی مورد استفاده، مواردی که هنگام استفاده از مدل GBM رعایت می‌گردد، روابط مربوط به تخمین پارامترهای مدل و الگوریتم اجرای مدل خواهد شد. در بخش سوم نتایج و یافته‌های پژوهش ارائه گردیده است و در بخش چهارم جمع‌بندی و پیشنهادات جهت تحقیقات آتی ذکر خواهد شد.

۲- بحث و بررسی

۲-۱- مبانی نظری

شروع بحث حرکت براونی نه در علم ریاضیات بوده و نه در علوم اقتصاد و مالی. حرکت براونی نخستین بار توسط یک گیاه‌شناس اسکاتلندی به نام رابرت براون معرفی شد (جهانی پور، ۱۳۸۵). الگوی ریاضی حرکت براونی بعداً توسط دانشمندان دیگری ارائه گردید. به عنوان مثال، باشلیه (۱۹۰۰) با مطالعه بر روی بورس پاریس، الگویی را برای حرکت براونی ابداع نمود و برخی از ویژگی‌های ریاضی آن را شرح داد. پس از باشلیه نیز انیشتن (۱۹۰۵) با ارائه الگویی سعی کرد تا فیزیکدانان دیگر را برای حرکت ذرات ریز معلق در یک مایع متقاعد سازد. انیشتن (۱۹۰۵) حرکت براونی را فرآیندی تصادفی تعریف می‌کند که مسیرهای پیوسته و نموهای مستقل با توزیع گاوسی مانا دارد (ژارو و پروتر، ۱۳۸۵).

حرکت براونی، یک فرآیند تصادفی است که مسیرهای پیوسته داشته و مشتق آن در هیچ نقطه‌ای وجود ندارد. در علوم مالی نیز معمولاً فرض می‌شود متغیرهای تصادفی مانند قیمت سهام، از مسیری تبعیت می‌کنند که تابع حرکت براونی است (راعی و فلاح طلب، ۱۳۹۲). فرآیندهای تصادفی به مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی اطلاق می‌شود که به زمان وابسته است. به عبارت دیگر، مجموعه $\{X_t\}_{t\in T}$ که شامل متغیرهای تصادفی است، یک فرآیند تصادفی را تعریف می‌کند. متغیر $t \in T$ پارامتری است که زمان نامیده می‌شود (نیل[۴]، ۱۹۹۴). همچنین متغیر تصادفی را می‌توان به عنوان تابعی مانند x از ω با مقادیر عددی و حوزه تعریف Ω یک متغیر تصادفی تعریف کرد.

رابطه ۱)

$$\omega \in \Omega : \ \omega \to x(\omega)$$

لازم به ذکر است که صفت تصادفی، فقط برای یادآوری این موضوع است که با یک فضای نمونه پدیده‌های معینی توصیف شود که معمولاً پیشامدهای تصادفی یا پدیده‌های احتمالی نامیده می‌شوند. عنصر تصادفی موجود در $x(\omega)$ نقطه‌ی نمونه‌ای ω است که به تصادف برگزیده می‌شود (چانگ و همکاران، ۱۳۸۸، ص ۹۵؛ طیبی و همکاران، ۱۳۹۰). در علوم ریاضیات، هنگام نمایش تغییرات پیوسته یک متغیر در طول زمان از معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. معادله دیفرانسیل تصادفی شامل اجزای تصادفی است. این اجزا ممکن است مقادیر ثابت تصادفی (متغیرهای تصادفی) و یا فرآیندهای تصادفی باشد که فرض می‌شود خواص آماری آنها معلوم و مشخص است. با توجه به این موضوع، جواب معادله در نهایت یک فرآیند تصادفی خواهد بود و بنابراین مشکل اصلی، پیدا کردن ویژگی‌های توزیع احتمال آن است (سبشیک[۵]، ۲۰۱۳، ۱). حل معادلات دیفرانسیل تصادفی به دلیل وجود عنصری با خاصیت تصادفی، با روش‌های معمول امکان‌پذیر نیست و بنابراین برای به دست آوردن جواب معادله نیاز به استفاده از روش‌های نوین حل چنین معادلاتی است. یکی از مهمترین و شناخته شده‌ترین این روش‌ها "لم ایتو" است.

از سوی دیگر، فرآیند وینر یا فرآیند براونی استاندارد یک فرآیند تصادفی مارکوفی زمان پیوسته است (طیبی و همکاران، ۱۳۹۰). فرآیند مارکوف به فرآیندی اطلاق می‌شود که در آن مقادیر آتی یک متغیر فقط به مقدار کنونی آن بستگی دارد و سیر حرکت آن در گذشته تا رسیدن به مقدار فعلی، تاثیری در مقادیر آتی متغیر ندارد. یکی از خواص فرآیند وینر آن است که در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست و همین خاصیت است که باعث می‌شود انتگرال‌گیری از

آن به صورت معمول امکان‌پذیر نباشد (خالوزاده و خاکی صدیق، ۱۳۸۴) و جهت انتگرال‌گیری آن نیاز به روش‌های نوینی مانند "لم ایتو" احساس گردد. اینک با توجه به تعریف فرآیند وینر و معادلات دیفرانسیل تصادفی، می‌توان به توضیح حرکت براونی هندسی پرداخت. مدل اخیر معادله دیفرانسیلی است که در متغیرهای خود دارای عنصر وینر است که همین نکته آن را به یکی از انواع معادلات دیفرانسل تصادفی تبدیل می‌کند. حرکت براونی هندسی یکی از فرآیندهای تصادفی مهم و کاربردی مالی است که در یک معادله دیفرانسیل تصادفی صدق می‌کند. بر این اساس، حرکت براونی هندسی نیز از لحاظ فنی یک فرآیند مارکوف است (راعی و فلاح طلب، ۱۳۹۲). حرکت براونی هندسی یکی از ساده‌ترین مدل‌های تصادفی است که دارای جمله رانش و نوسانات تصادفی ثابت است و همان فرآیندی است که بلک و شولز (۱۹۷۳) و مرتون (۱۹۷۳) آن را به عنوان معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار قیمت دارایی پایه در مدل‌سازی قیمت اوراق مشتقه در نظر گرفته‌اند (نیسی و پیمانی، ۱۳۹۳).

با توجه به آنچه گفته شد از مدل حرکت براونی هندسی می‌توان در شبیه‌سازی رفتار متغیرها استفاده کرد. شواهد تجربی متعددی گواه این ادعا است. در ادامه، به مرور تحقیقات مرتبط با قابلیت پیش‌بینی شاخص‌های بورس با استفاده از مدل‌های غیر خطی و استفاده از مدل حرکت براونی هندسی در شبیه‌سازی متغیرهای اقتصادی خواهیم پرداخت.

۲-۲- مطالعات پیشین

تاکنون تحقیقات بسیاری در زمینه پیش‌بینی شاخص بورس با استفاده از انواع مدل‌ها و از آن جمله، حرکت براونی هندسی انجام گرفته است. در مورد استفاده از مدل‌های غیر خطی در شبیه‌سازی شاخص و یا بازده آن پژوهش‌های مختلفی صورت گرفته که به طور عمده نتایج این پژوهش‌ها بیانگر این موضوع بوده است که مدل‌های غیر خطی با کارایی بهتر و مناسب‌تر و با دقت بالاتری توان پیش‌بینی شاخص بورس را دارند (به عنوان مثال تهرانی و مرادپور (۱۳۹۱)، خسروی‌نژاد و شعبانی صدرپیشه (۱۳۹۳)، هیرانشا و همکاران (۲۰۱۸) و دو[۶] (۲۰۱۸)). عمر و جعفر (۲۰۱۱) از مدل حرکت براونی هندسی در شبیه‌سازی و پیش‌بینی دو شاخص بورس مالزی استفاده کرده‌اند. با توجه به این که یکی از پارامترهای موجود در این مدل انحراف معیار می‌باشد، از دو نوع انحراف معیار ساده و لگاریتمی استفاده شد. حرکت براونی هندسی برای هریک از شاخص‌ها با هر دو نوع انحراف معیار ساده و لگاریتمی اعمال شد. آنها بر اساس افق پیش‌بینی۲۰ روزه و معیار MAPE مبتنی بر جدول ارائه شده توسط لورنس و همکاران (۲۰۰۹)، به سنجش میزان خطای پیش‌بینی پرداختند. نتایج نشان داد مدل حرکت براونی هندسی می‌تواند هر دو شاخص را پیش‌بینی نماید اما هنگامی که از انحراف معیار لگاریتمی استفاده می‌شد، پیش‌بینی شاخص بهبود می‌یافت. راتنایاکا و همکاران (۲۰۱۴) با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی و مدل ARIMA به پیش‌بینی دو شاخص بورس کلومبو[۷] کشور سریلانکا پرداختند. در این پژوهش از داده‌های روزانه شاخص‌ها در خلال ژانویه ۲۰۱۱ تا دسامبر ۲۰۱۳ جهت پیش‌بینی ۳۰ روزه ماه دسامبر استفاده گردید و سپس نتایج هر دو مدل بر اساس معیارهای MAD و MAPE با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج به دست آمده نشان داد حرکت براونی هندسی منتج به بهترین پیش‌بینی شاخص در دوره مذکور می‌گردد.

ردی و کلینتون (۲۰۱۶) به پیش‌بینی قیمت سهام ۵۰ شرکت بزرگ استرالیایی با استفاده از حرکت براونی هندسی پرداختند. نخست، با استفاده از مدل CAPM به پیش‌بینی بازده مورد انتظار سالانه هر یک از سهام پرداخته شد و پس از آن، حرکت براونی هندسی در دو حالت، یکبار برای سهام انفرادی و بار دیگر برای پرتفوی‌های متشکله در حالات مختلف، به کار گرفته شد. جهت بررسی صحت پیش‌بینی از سه روش ضریب همبستگی، MAPE و درصد

پیش‌بینی‌های در جهت صحیح[8] استفاده شد. نتایج حاصل نشان داد اگرچه طبق معیار MAPE پیش‌بینی دوره‌های ۱ هفته، ۲ هفته، ۱ ماه، ۶ ماه و یکسال به صورت مطلوب و قابل قبولی انجام می‌پذیرد، اما کمترین خطای پیش‌بینی در دوره‌های ۱ هفته، ۲ هفته و ۱ ماه حاصل شده و پس از آن، هرچه افق زمانی پیش‌بینی افزایش می‌یابد مقادیر خطا رو به افزایش می‌گذارد.

آگوستینی و همکاران (۲۰۱۸) بر مبنای مدل حرکت براونی هندسی اقدام به پیش‌بینی قیمت سهام ۷ شرکت موجود در شاخص ترکیبی بورس جاکارتا[9] کرده‌اند. آنها با استفاده از معیار MAPE برای بررسی صحت مقادیر پیش‌بینی شده، نشان دادند مدل حرکت براونی هندسی رتبه بالایی در پیش‌بینی با صحت بالا دارد به گونه‌ای که مقدار MAPE برای مقادیر پیش‌بینی شده کوچکتر مساوی ۲۰ درصد بوده است.

بدریه و همکاران (۲۰۱۸) با استفاده از مدل حرکت براونی هندسی به پیش‌بینی قیمت سهام پرداخته‌اند. هدف آنها شناسایی بهترین دوره زمانی داده‌های تاریخی جهت تخمین پارامترهای مدل GBM و بهترین افق پیش‌بینی بود. آنها با تمرکز بر ۴۰ شرکت بزرگ پذیرفته شده در بورس مالزی که از ۸ صنعت و از هر صنعت ۵ شرکت انتخاب شده بود، دریافتند استفاده از ۶۵ مشاهده روزانه تاریخی می‌تواند قیمت سهام را برای ۲۱ روز با صحت بالا پیش‌بینی نماید که در این حالت نتایج پیش‌بینی با استفاده از مدل GBM از صحت بالاتری نسبت به حالت‌های دیگر برخوردار است. آنها به منظور بررسی صحت قیمت‌های پیش‌بینی شده نسبت به قیمت‌های واقعی از معیار MAPE و برای تفسیر نتایج حاصل، از جدول پیشنهادی لورنس و همکاران (۲۰۰۹) استفاده کرده‌اند.

راعی و فلاح طلب (۱۳۹۲) به تخمین ارزش در معرض ریسک شاخص کل بورس اوراق بهادار و پنج شرکت که به تصادف انتخاب شده بودند، پرداختند. آنها برای مدلسازی ارزش در معرض ریسک از سه شیوه استفاده کردند. اول، شبیه‌سازی مونت کارلو که بر مبنای گام‌های تصادفی و حرکت براونی هندسی انجام می‌گرفت؛ دوم، شبیه‌سازی تاریخی و سوم، روش واریانس- کوواریانس. آنها برای مقایسه کارایی روش‌های سه گانه از نسبت خطا[10] استفاده کردند. نتایج نشان داد بر اساس نسبت خطا بر اساس روش زیر برآورد[11]، رویکردهای واریانس- کوواریانس و شبیه-سازی تاریخی از عملکرد بهتری برخوردار بوده‌اند اما طبق روش بهترین جواب بر اساس نسبت خطا و همچنین معیار کمترین اختلاف[12] از نسبت خطا، روش شبیه‌سازی مونت کارلو دارای کارایی بالاتری نسبت به روش‌های رقیب بوده است.

نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) نیز مانند راعی و فلاح طلب (۱۳۹۲) از مدل GBM در شبیه‌سازی ارزش در معرض ریسک شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران استفاده کرده‌اند. آنها با استفاده از دو مدل دیفرانسیل تصادفی هستون و حرکت براونی هندسی و با هدف شبیه‌سازی ارزش در معرض ریسک، اقدام به شبیه‌سازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران کردند. با استفاده از چهار معیار پس آزمون، به مقایسه ارزش در معرض خطر حاصل از دو مدل هستون و GBM پرداختند. طبق معیار کریستوفرسون، مدل حرکت براونی هندسی نسبت به مدل هستون عملکرد بهتری را نشان داد.

ملاحظه می‌گردد به توانایی مدل حرکت براونی هندسی به صورت منفرد کمتر توجه شده و غالباً این مدل در مقایسه با سایر مدل‌ها و به صورت مقایسه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. با این که پژوهش عمر و جعفر (۲۰۱۱) را می‌توان تلاشی در جهت رفع ابهام اخیر دانست، با این حال می‌توان نکاتی را جهت تکمیل آن بیان کرد. به عنوان مثال، عمر و جعفر (۲۰۱۱) تنها یک افق ۲۰ روزه را شبیه‌سازی کردند که این امر می‌تواند به طور کامل جهت تعمیم توانایی مدل در شبیه‌سازی شاخص‌ها و قیمت‌ها به تمام سری زمانی کاربرد نداشته باشد. علاوه بر این، همانطور که گفته شد مدل حرکت براونی هندسی مانند سایر

مدل‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل تصادفی دارای جزئی تصادفی است که مقادیر آن در هر نقطه مستقل از یکدیگر بوده و حول توزیع احتمال معینی پراکنده است. در مطالعاتی مانند راعی و فلاح‌طلب (۱۳۹۲) و نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) جهت شبیه‌سازی، مدل GBM به طور مکرر اجرا می‌شود و در نتیجه مسیرهای تصادفی متفاوتی جهت شبیه‌سازی حاصل می‌گردد حال آن‌که در مطالعه عمر و جعفر (۲۰۱۱) به نظر می‌رسد تنها یک مسیر تصادفی جهت شبیه‌سازی افق ۲۰ روزه ایجاد گردیده که این موضوع ممکن است با توجه به خواص تصادفی مدل GBM موجب ناپایداری مقادیر شبیه‌سازی شده گردد. نکته دیگری که در به کارگیری مدل GBM جهت شبیه‌سازی شاخص بورس ملاحظه می‌گردد پیش‌بینی برای یک افق زمانی واحد است (مانند عمر و جعفر (۲۰۱۱)). در اغلب شواهد تجربی، افق پیش‌بینی یک مقدار ثابت مانند یک یا ۲۰ روز بعد در نظر گرفته شده حال آنکه اگر بتوان توانایی مدل مذکور را در شبیه‌سازی افق‌های زمانی متفاوت با یکدیگر مقایسه کرد، می‌توان به بینشی عمیق‌تر در مورد توانایی این مدل در پیش‌بینی سری‌های زمانی دست یافت.

۳- روش‌شناسی پژوهش

جامعه آماری پژوهش حاضر شامل مقادیر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد و نمونه تحقیق، داده‌های شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در بازه زمانی ابتدای سال ۱۳۸۰ تا پایان سال ۱۳۹۵ را در بر می‌گیرد که داده‌های آن از نرم‌افزار ره‌آورد نوین گردآوری شده است.

در این پژوهش از نرم‌افزار آماری R نسخه ۳،۳،۳ و نرم‌افزار RStudio جهت اجرای مدل‌ها و شبیه‌سازی شاخص کل بورس استفاده شده است.

۳-۱- سوال پژوهش

با توجه به مطالب فوق سوالات اصلی پژوهش به شرح ذیل است:

۱) آیا مدل حرکت براونی هندسی می‌تواند شاخص کل بورس اوراق بهادار را در افق زمانی ۱ روزه شبیه‌سازی و پیش‌بینی نماید؟

۲) آیا توانایی مدل حرکت براونی هندسی با افزایش طول افق زمانی پیش‌بینی تغییر خواهد کرد؟

۳-۲- مدل ریاضی

معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی را می‌توان به صورت معادله (۲) نشان داد:

رابطه ۱)

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

که S بیانگر متغیر مورد مطالعه است که می‌تواند شاخص بازار، قیمت و یا هر متغیری باشد. μ و σ پارامترهای مدل است که باید برآورد شوند. W نیز فرآیند وینر یا حرکت براونی استاندارد است. معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی می‌بایست حل شود تا جواب آن به دست آید. همانگونه که پیش‌تر گفته شد، جهت حل معادله دیفرانسیل تصادفی از "لم ایتو" استفاده می‌شود. به بیان برندیمارت[۱۳] (۲۰۰۶) اگر معادله دیفرانسیل تصادفی برای متغیری مانند X_t به صورت معادله (۳) باشد:

رابطه ۳)

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW$$

آنگاه مطابق قاعده زنجیری و حدگیری، رابطه مشهور "لم ایتو" به صورت معادله (۴) به دست می‌آید:

رابطه ۴)

$$dF = \left(a\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)dt + b\frac{\partial F}{\partial X}dW$$

استفاده از "لم ایتو" برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی هندسی در حالت گسسته منجر

به معادله‌ای می‌شود که رفتار متغیر تحت بررسی را در طی زمان توضیح می‌دهد. این معادله در رابطه (۵) ملاحظه می‌گردد:

رابطه ۵)

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)}$$

همچنین با توجه به این که فرآیند وینر $W(t)$ معادله (۵) از توزیع نرمال پیروی می‌کند و مقدار آن برابر $\varepsilon\sqrt{t}$ است، می‌توان معادله (۵) را به صورت معادله (۶) بازنویسی کرد که در آن ε نوفه است که از توزیع نرمال پیروی می‌کند:

رابطه ۶)

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\varepsilon\sqrt{t}}$$

معادله (۶) به بیان رفتار پویای قیمت می‌پردازد و منعکس کننده آن است که قیمت‌ها از توزیع لگاریتمی نرمال پیروی می‌کند (برندیمارت، ۲۰۰۶).

۳-۳- نکاتی که در کاربرد مدل GBM رعایت می‌گردد

۱) به کارگیری افق‌های پیش‌بینی متفاوت

در اکثر پژوهش‌های گذشته طول افق پیش‌بینی ثابت در نظر گرفته شده و تنها به بررسی توان مدل GBM در شبیه‌سازی یک افق زمانی بسنده گردیده است (مانند عمر و جعفر؛ ۲۰۱۱ و نیسی و پیمانی؛ ۱۳۹۳). در پژوهش حاضر مانند خالوزاده و خاکی صدیق (۱۳۸۴) با افزایش طول افق پیش‌بینی، توانایی مدل GBM در شبیه‌سازی مقادیر شاخص کل بورس اوراق بهادار مورد بررسی قرار خواهد گرفت که این موضوع می‌تواند توان مدل GBM را در شبیه‌سازی افق‌های زمانی با طول متفاوت و بلندمدت‌تری مورد آزمون قرار دهد.

۲) عدم به کارگیری مجدد مقادیر شبیه‌سازی شده در پیش‌بینی مقادیر سری زمانی

در برخی مطالعات (مانند راعی و فلاح طلب، ۱۳۹۲) مقادیر شبیه‌سازی شده در افق زمانی مورد نظر (به عنوان مثال یک‌روزه) در فرآیند محاسبه مجدد پارامترهای مدل به کار گرفته می‌شوند. در این صورت، با حرکت به جلو در سری زمانی و با توجه به خطاهایی که به طور ذاتی در امر پیش‌بینی متصور است، ممکن است مقادیر پارامترها به مقادیر ثابتی گرایش یابد و در نتیجه، نتایج حاصل گمراه کننده شود (مقادیر شبیه‌سازی شده که خود ممکن است دارای خطا باشند، به عنوان پارامتر ورودی مدل در پیش‌بینی مجدد افق زمانی بعدی به کار گرفته می‌شود). لذا در این پژوهش مانند نیسی و پیمانی (۱۳۹۳)، مقادیر شبیه‌سازی شده یک افق پیش‌بینی جهت محاسبه پارامترهای مدل برای شبیه‌سازی افق‌های زمانی بعدی به کار گرفته نمی‌شود و در نتیجه، تنها از مقادیر واقعی دوره‌های زمانی تعیین شده (۳۶۰ روز) جهت تخمین پارامترها برای شبیه‌سازی هر یک از افق‌های زمانی پیش‌رو استفاده می‌شود.

۳) عدم استفاده از یک مسیر تصادفی در شبیه‌سازی مقادیر شاخص

در برخی شواهد تجربی (مانند عمر و جعفر (۲۰۱۱)) هنگام شبیه‌سازی متغیر تحت بررسی تنها از یک مسیر تصادفی استفاده می‌شود. در حالی که عنصر تصادفی موجود در مدل GBM به صورت تصادفی حول یک توزیع احتمالی معین یعنی توزیع نرمال قرار می‌گیرد و ناپایدار است و با هر بار اجرای مدل، مقادیر تصادفی جدیدی که می‌توانند متفاوت از مقادیر دفعه قبل باشند، در معادله دیفرانسیل تصادفی GBM قرار می‌گیرند. راعی و فلاح طلب (۱۳۹۲) و نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) مسیرهای تصادفی متعددی ایجاد و جهت شبیه‌سازی استفاده کردند. بر این اساس، جهت پیش‌بینی هریک از افق‌های زمانی در هر بخش از سری زمانی و با استفاده از هرکدام از پارامترهای مدل، تعداد زیادی مسیر تصادفی ایجاد و با استفاده از آن‌ها به شبیه‌سازی شاخص پرداخته می‌شود.

۴) عدم وجود رویکرد تک دوره‌ای در پیش‌بینی شاخص

عمر و جعفر (۲۰۱۱) بر اساس شبیه‌سازی یک افق زمانی و مقایسه آن با مقادیر واقعی به تحلیل و قضاوت پرداخته‌اند. این در حالی است که تعمیم‌پذیری نتایج، به داده‌های با اندازه بزرگ نیاز خواهد داشت (کوراپاتی[۱۴]، ۲۰۱۶). مادامی‌که شبیه‌سازی برای چند دوره انجام شود، می‌تواند قابلیت تعمیم نتایج را افزایش دهد و قضاوتی مناسب‌تر در مورد توانایی مدل ایجاد نماید. در تحقیق حاضر با استفاده از داده‌های شاخص بورس، در طول سری زمانی شاخص به صورت متوالی افق‌های زمانی پیش‌بینی با طول یکسان، توسط مدل شبیه‌سازی می‌گردد و در نهایت سری متوالی مقادیر شبیه‌سازی شده با استفاده از معیارهای بررسی صحت پیش‌بینی، نسبت به مقادیر واقعی مورد سنجش قرار می‌گیرد.

۵) در برگرفتن قلمرو زمانی نسبتاً وسیع

در تحقیق حاضر تلاش گردیده است تا با انتخاب قلمرو وسیع و استفاده از حجم بالای داده‌های شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران نتایج حاصل از تحقیق قابل اتکاتر شود و تعمیم نتایج بهتر صورت پذیرد.

۴- مدل پژوهش

جهت پاسخ به سوال نخست، آیا مدل حرکت براونی هندسی می‌تواند شاخص کل بورس اوراق بهادار را در افق زمانی ۱ روزه شبیه‌سازی و پیش‌بینی نماید، با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده از حجم ثابتی از سری زمانی شاخص (۳۶۰ روز)، شاخص روز بعد شبیه‌سازی می‌شود. این کار به منظور افزایش قابلیت تعمیم‌پذیری نتایج تا انتهای سری زمانی تکرار شده تا در ادامه یک سری زمانی متوالی از افق‌های پیش‌بینی ۱ روزه حاصل گردد.

جهت پاسخ به سوال دوم، آیا توانایی مدل حرکت براونی هندسی با افزایش طول افق زمانی مورد پیش‌بینی تغییری خواهد کرد؟، با استفاده از حجم مشخصی از داده‌ها (۳۶۰ روز) پارامترهای مدل برآورد گردیده و سپس مقادیر شبیه‌سازی شده برای افق‌های زمانی متفاوت به دست می‌آید. افق شبیه‌سازی شاخص به تدریج افزایش خواهد یافت و شبیه‌سازی برای افق پیش‌بینی ۱، ۷، ۲۰، ۶۰ و ۹۰ روز انجام می‌گیرد. در نهایت با استفاده از معیارهای صحت مدل، توانایی مدل حرکت براونی هندسی در پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۵- تخمین پارامترهای مدل

در مدل حرکت براونی هندسی و جهت شبیه‌سازی شاخص بازار نیاز به تخمین دو پارامتر است: نرخ رانش و نوسانات مدل. پارامترهای مدل GBM همانند نیسی و پیمانی (۱۳۹۳) و عمر و جعفر (۲۰۱۱) بر اساس بازده پیوسته لگاریتمی محاسبه می‌شود.

- **نرخ رانش**

برای محاسبه نرخ رانش، از میانگین بازده پیوسته روزانه شاخص کل بورس اوراق بهادار استفاده می‌شود. بازده روزانه شاخص کل طبق رابطه (۷) محاسبه شده است.

رابطه ۷)

$$R = ln(S_t) - ln(S_{t-1}) = ln(\frac{S_t}{S_{t-1}})$$

که R بازده روزانه شاخص کل، S_t مقدار شاخص کل در روز t و S_{t-1} مقدار شاخص کل در روز $t-1$ است.

- **نوسانات**

به منظور محاسبه عنصر نوسانات در مدل حرکت براوانی هندسی از انحراف معیار بازده روزانه شاخص کل طبق رابطه (۸) استفاده شده است:

رابطه ۸)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{N}(R_i - \bar{R})^2}{N-1}}$$

که σ انحراف معیار بازده روزانه شاخص کل و N تعداد روزهایی است که برای تخمین پارامتر استفاده می‌شود.

۵-۱- مراحل به کارگیری مدل

گام اول: با در نظر گرفتن افق زمانی تخمین پارامترها (۳۶۰ روز)، پارامترهای مدل GBM محاسبه می‌گردند و فرآیند محاسبه پارامترها با در نظر گرفتن طول افق‌های زمانی که قصد پیش‌بینی آن را داریم، تا انتهای سری زمانی ادامه می‌یابد. در خاتمه، بردارهای مختلف پارامترهای مدل GBM حاصل می‌گردد.

گام دوم: از ابتدای سری زمانی به ترتیب هر کدام از بردار پارامترهایی که در مرحله قبل محاسبه شدند، جهت پیش‌بینی افق‌های زمانی مورد نظر در مدل GBM به کارگرفته می‌شود.

گام سوم: به ازای هر بردار پارامتر برای هر افق پیش‌بینی، تعداد ۱۰۰۰ مسیر تصادفی توسط مدل GBM ایجاد می‌شود (مانند راعی و فلاح طلب (۱۳۹۲)).

گام چهارم: پیش‌بینی مقادیر شاخص در افق پیش‌بینی مورد نظر با استفاده از مسیرهای محتمل تصادفی انجام می‌پذیرد.

گام پنجم: این فرآیند با به کارگیری هر بردار پارامتر برای افق زمانی که قصد شبیه‌سازی آن را داریم، تا انتهای سری زمانی و تا جایی اجرا می‌شود که به آخرین بردار پارامتر برسیم.

۵-۲- بررسی صحت پیش‌بینی

مقادیر شبیه‌سازی شده شاخص کل برای افق‌های زمانی مورد پیش‌بینی می‌بایست توسط معیاری بررسی شده و میزان تطابق آنها با مقادیر واقعی تعیین شود. به این منظور از دو معیار استفاده می‌شود: اول، نسبت میانگین قدر مطلق درصد خطا[15] (مانند عمر و جعفر (۲۰۱۱)) و دوم، ضریب همبستگی پیرسون که می‌تواند بیانگر نحوه حرکت مقادیر شبیه‌سازی شده نسبت به مقادیر واقعی باشد. نسبت میانگین قدر مطلق درصد خطا بر اساس رابطه (۹) محاسبه می‌شود:

رابطه ۹)

$$MAPE = \frac{\sum \left| \frac{F_t - Y_t}{Y_t} \times 100 \right|}{n}$$

که t زمان پیش‌بینی، n تعداد دوره‌های مورد پیش‌بینی، Y_t مقدار واقعی زمان t و F_t مقدار پیش‌بینی شده زمان t است.

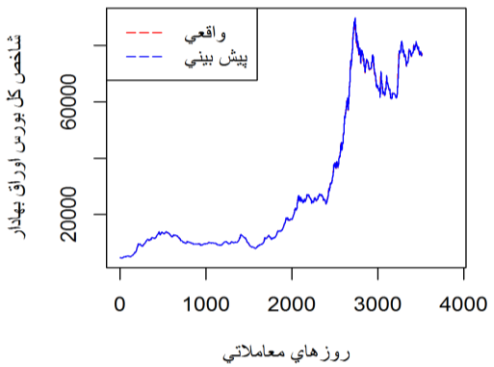
هرچه مقدار MAPE کمتر باشد، خطای پیش‌بینی کمتر بوده و مقادیر پیش‌بینی شده انطباق بیشتری با مقادیر واقعی دارند. اگر معیار MAPE تنها به صورت مقایسه‌ای استفاده شود، نمی‌توان به درستی درک کرد که معنای MAPE چیست و مدل GBM شبیه‌سازی‌هایی با دقت مناسب ارائه می‌دهد. به همین دلیل، ضروری است تا به تفسیر معیار MAPE پیش‌بینی‌ها پرداخت. لورنس و همکاران (۲۰۰۹) جدولی را به منظور نحوه قضاوت در مورد مقادیر MAPE ارائه کرده‌اند که ما نیز از آن استفاده می‌کنیم. جدول پیشنهادی لورنس و همکارن (۲۰۰۹) به صورت جدول ۳-۱ است:

جدول ۰۰-۱- جدول پیشنهادی لورنس و همکارن (۲۰۰۹) جهت قضاوت در مورد معیار MAPE

قضاوت در مورد صحت پیش‌بینی	مقدار میانگین قدر مطلق درصد خطا
صحت بالا[16]	کمتر از ۱۰٪
صحت مناسب[17]	۱۱٪ تا ۲۰٪
پیش‌بینی معقول[18]	۲۱٪ تا ۵۰٪
پیش‌بینی نادرست[19]	بیش از ۵۱٪

۶- یافته‌های پژوهش

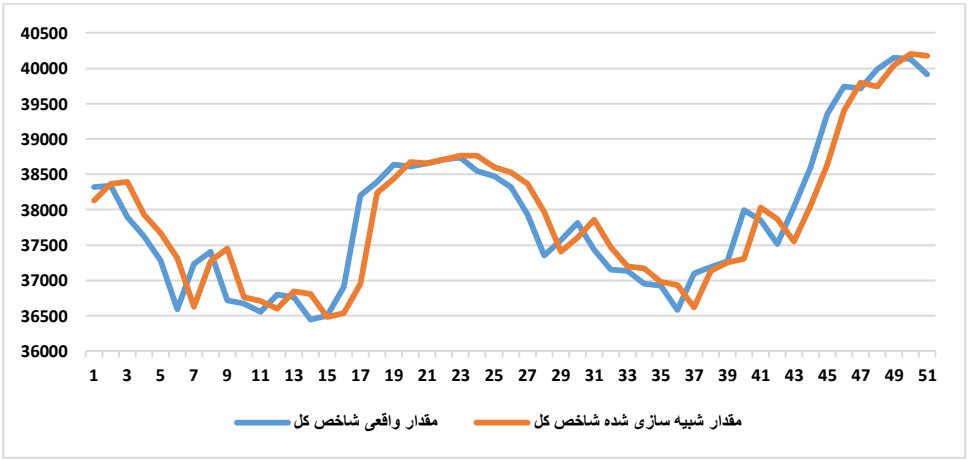
جهت بررسی و تحلیل یافته‌های مربوط به سوال نخست پژوهش (آیا مدل حرکت براونی هندسی می‌تواند شاخص کل بورس اوراق بهادار را در افق زمانی ۱ روزه شبیه‌سازی و پیش‌بینی نماید)، در ابتدا نمودار مقایسه‌ای مقادیر شبیه‌سازی شده و واقعی شاخص کل بورس در حالت پیش‌بینی افق‌های زمانی ۱ روزه در شکل (۱) آمده است.



شکل ۱ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۱ روزه و مقادیر واقعی شاخص کل

در شکل (۱) مشاهده می‌شود که مقادیر پیش‌بینی شده برای افق‌های زمانی ۱ روزه انطباق بالایی با مقادیر واقعی شاخص کل داشته‌اند به گونه‌ای که به نظر می‌رسد تنها یک نمودار در صفحه رسم گردیده است در شکل (۲) نمودار مقایسه‌ای بازه زمانی کوچکتری مانند روز معاملاتی ۲۵۰۰ الی ۲۵۵۰ نیز نمایش داده شده است.

مقدار MAPE برای پیش‌بینی افق زمانی ۱ روزه شاخص کل و مقدار ضریب همبستگی و سطح معناداری آن به ترتیب در جداول ۴-۱ و ۴-۲ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲۰ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۱ روزه و مقادیر واقعی روزهای معاملاتی ۲۵۰۰ الی ۲۵۵۰ شاخص کل

در جدول ۴-۱ مقدار MAPE مقادیر پیش‌بینی شده افق‌های ۱ روزه شاخص کل بورس آورده شده است تا با مقایسه آن با جدول ارائه شده توسط لورنس و همکاران (۲۰۰۹) بتوان نسبت به توانایی مدل GBM در پیش‌بینی افق‌های زمانی مذکور قضاوت کرد.

مقدار MAPE تنها در حدود ۰/۴۳ درصد بوده که این مقدار به این معنی است که میانگین قدر مطلق درصد خطای مقادیر پیش‌بینی شده شاخص کل نسبت به مقادیر واقعی تنها در حدود ۰/۴۳ درصد بوده است. از طرف دیگر همانطور که پیشتر بیان گردید مطابق جدول پیشنهادی لورنس و همکاران (۲۰۰۹) در صورتی که مقدار MAPE به دست آمده بین مقادیر شبیه‌سازی شده و مقادیر واقعی کمتر از ۱۰ درصد باشد پیش‌بینی انجام شده از صحت بالایی برخوردار است و این در حالی است که شبیه‌سازی افق‌های زمانی ۱ روزه متوالی دارای مقدار MAPE معادل ۰,۴۳ درصد بوده است که این موضوع نشاندهنده این است که پیش‌بینی افق زمانی ۱ روزه شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران توسط مدل حرکت براونی هندسی با صحت بالا انجام گرفته است.

جدول ۰-۲ مقدار MAPE برای افق‌های پیش‌بینی ۱ روزه شاخص کل بورس اوراق بهادار

MAPE	۰/۴۳۶۷
MAPE $\leq$ 10% به معنای انجام پیش‌بینی با صحت بالا می‌باشد (لورنس و همکارن (۲۰۰۹))	

در جدول ۴-۲ به منظور بررسی نحوه حرکت مقادیر شبیه‌سازی شده نسبت به مقادیر واقعی افق‌های پیش‌بینی ۱ روزه، ضریب همبستگی میان مقادیر پیش‌بینی شده شاخص کل بورس در افق‌های ۱ روزه با مقادیر واقعی آن محاسبه شده است تا بدین وسیله بتوان نسبت به نحوه حرکت مقادیر پیش‌بینی شده نسبت به مقادیر واقعی شاخص کل بورس قضاوت کرد.

جدول ۰-۳ مقدار ضریب همبستگی و آماره P.Value برای مقادیر پیش‌بینی شده ۱ روزه شاخص کل بورس اوراق بهادار

ضریب همبستگی پیرسون	۰/۹۹۹۹۴۲
آماره P-Value	۰/۰۰

مقدار ۰/۹۹۹۹ برای ضریب همبستگی پیرسون و سطح معناداری آن نشان‌دهنده این موضوع است که همبستگی افق‌های پیش‌بینی شده ۱ روزه با مقادیر واقعی بسیار بالا بوده است و به عبارت دیگر نحوه حرکت مقادیر شبیه‌سازی شده شاخص کل بورس در افق‌های ۱ روزه نسبت به مقادیر واقعی آن در آن روز، از حرکات مشابهی برخوردار بوده است.

با توجه به جداول ۴-۱ و ۴-۲ می‌توان نتیجه گرفت که مدل حرکت براونی هندسی قادر است که افق پیش‌بینی ۱ روزه شاخص بورس اوراق بهادار تهران را با صحت بالایی شبیه‌سازی و پیش‌بینی نماید و این شبیه‌سازی به گونه‌ای است که مقدار خطای مقادیر پیش‌بینی شده شاخص کل در افق‌های ۱ روزه نسبت به مقادیر واقعی ناچیز بوده و به صورت همزمان نحوه حرکت مقادیر پیش‌بینی شده نسبت به مقادیر واقعی شاخص از تشابه بالایی برخوردار بوده است.

جهت بررسی و تحلیل یافته‌های مربوط به سوال دوم (آیا توانایی مدل حرکت براونی هندسی با افزایش طول افق زمانی مورد پیش‌بینی تغییری خواهد کرد؟)، در جدول ۴-۳ معیار MAPE برای مقادیر پیش‌بینی شده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران برای افق‌های زمانی ۱ روزه، ۷ روزه، ۲۰ روزه، ۶۰ روزه و ۹۰ روزه آورده شده است تا با مقایسه آن با جدول ارائه شده توسط لورنس و همکاران (۲۰۰۹) بتوان نسبت به توانایی مدل GBM در پیش‌بینی افق‌های زمانی مذکور قضاوت کرد.

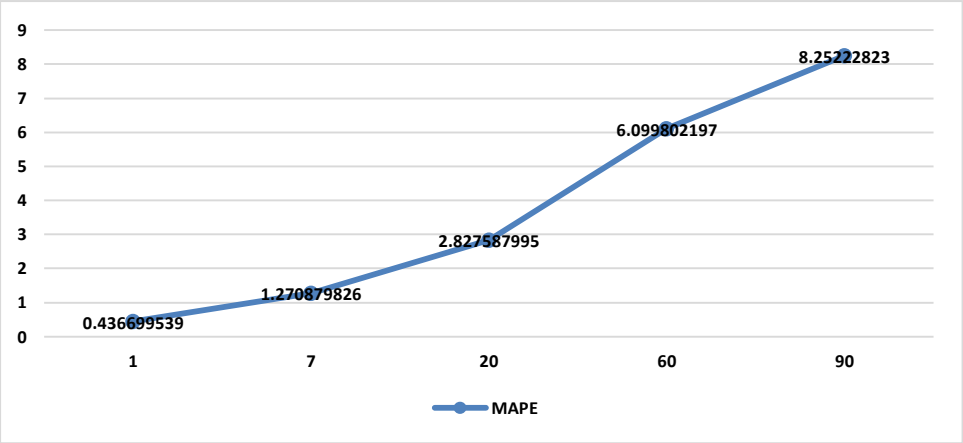
با توجه به جدول ۴-۳ و نمودار شکل (۳) مشاهده می‌شود که با افزایش طول افق پیش‌بینی مقدار محاسبه شده برای معیار MAPE به طور پیوسته افزایش می‌یابد که این موضوع بدان معنی است که مقدار میانگین خطای مقادیر پیش‌بینی شده با افزایش افق پی‌بینی در حال افزایش بوده و در نتیجه از میزان صحت مقادیر پیش‌بینی شده در افق‌های پیش‌بینی بلندمدت کاسته می‌شود و در نتیجه با افزایش طول افق زمانی مورد پیش‌بینی، توانایی مدل حرکت براونی هندسی در انجام شبیه‌سازی با صحت بالا کاهش می‌یابد. طبق جدول ۴-۳ مقدار MAPE از حدود ۰,۴۳٪ برای افق پیش‌بینی ۱ روزه به حدود ۸,۲۵٪ برای افق پیش‌بینی ۹۰ روزه افزایش یافته است و در نتیجه مقادیر پیش‌بینی شده با مقدار خطای بیشتری مواجه گردیده‌اند. با این حال مطابق جدول پیشنهادی لورنس و همکاران (۲۰۰۹) در صورتی که مقدار MAPE به دست آمده بین مقادیر شبیه‌سازی شده و مقادیر واقعی کمتر از ۱۰ درصد باشد پیش‌بینی انجام شده از صحت بالایی برخوردار است و همانگونه که در جدول ۴-۳ مشاهده می‌گردد، با توجه به این که در افق پیش‌بینی ۹۰ روزه مقدار MAPE همچنان کمتر از ۱۰٪ بوده است می‌توان نتیجه گرفت که تمام افق‌های پیش‌بینی شده با صحت بالایی توسط مدل GBM شبیه‌سازی شده‌اند و تنها با افزایش طول افق زمانی مورد پیش‌بینی، از صحت مقادیر پیش‌بینی شده

کاسته شده و دقت مدل GBM در پیش‌بینی مقادیر کاهش یافته است.

در جدول ۴-۴ مقادیر ضریب همبستگی بین مقادیر پیش‌بینی شده و واقعی شاخص کل بورس در افق‌های مختلف زمانی آورده شده است تا بدین وسیله بتوان نسبت به نحوه حرکت مقادیر پیش‌بینی شده نسبت به مقادیر واقعی شاخص کل بورس قضاوت کرد.

جدول ۴-۰ معیار MAPE برای افق‌های پیش‌بینی شده مختلف شاخص کل بورس اوراق بهادار

افق پیش‌بینی	۱	۷	۲۰	۶۰	۹۰
MAPE	۰/۴۳۶۷	۱/۲۷۰۸۸	۲/۸۲۷۵۸۸	۶/۰۹۹۸۰۲	۸/۲۵۲۲۲۸

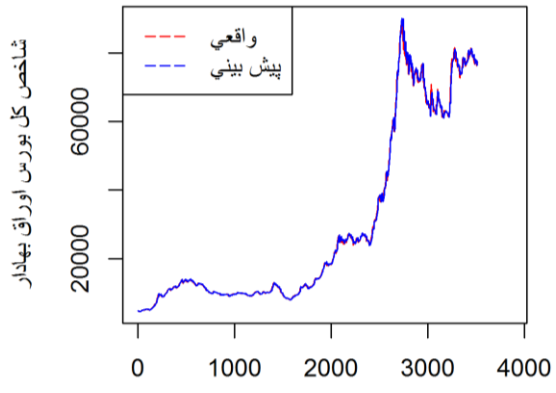


شکل ۳ روند تغییرات معیار MAPE با افزایش طول افق پیش‌بینی

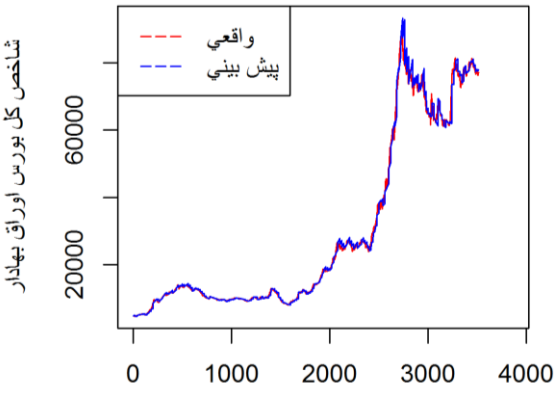
جدول ۴-۵ ضریب همبستگی و مقدار آماره P.Value برای افق‌های پیش‌بینی شده مختلف شاخص کل بورس اوراق بهادار

افق پیش‌بینی	۱	۷	۲۰	۶۰	۹۰
ضریب همبستگی پیرسون	۰/۹۹۹۹۴	۰/۹۹۹۵۵	۰/۹۹۸۰۸	۰/۹۹۲۰۴	۰/۹۸۷۸۸
P-Valueآماره	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰

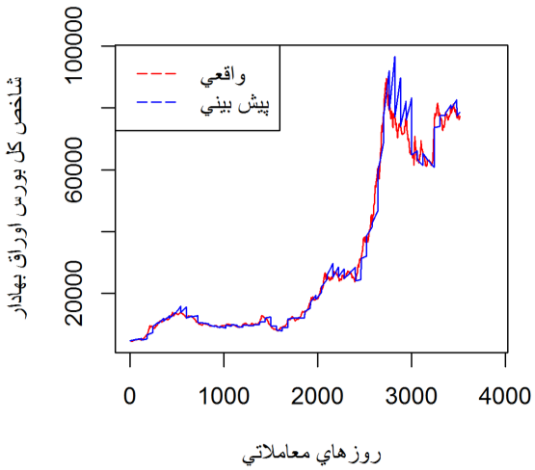
با توجه به جدول ۴-۴ مشاهده می‌شود که در تمام افق‌های پیش‌بینی شده، مقادیر شبیه‌سازی شده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران همبستگی بسیار بالایی با مقادیر واقعی داشته‌اند که این موضوع به این معناست که نحوه حرکت مقادیر شبیه‌سازی شده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در افق‌های زمانی ۷، ۲۰، ۶۰ و ۹۰ روز نیز دارای حرکات بسیار مشابهی با مقادیر واقعی آن بوده‌اند اما مانند معیار MAPE، با افزایش طول افق زمانی پیش‌بینی مقدار ضریب همبستگی بین مقادیر پیش‌بینی شده و واقعی مقدار کمی کاهش داشته است و توانایی مدل GBM در شبیه‌سازی افق‌های زمانی بلند مدت با کاهش رو به رو می‌شود. در ادامه نمودارهای مقایسه‌ای مقادیر پیش‌بینی شده و واقعی شاخص کل بورس اوراق بهادار در افق‌های پیش‌بینی ۷ ، ۲۰، ۶۰ و ۹۰ روزه مشاهده می‌شود.



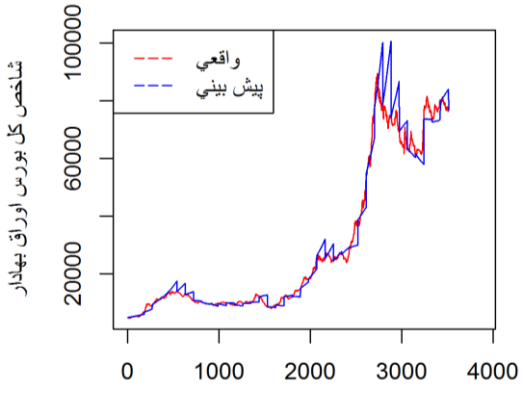
شکل ۴ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۷ روزه و مقادیر واقعی شاخص کل



شکل ۵ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۲۰ روزه و مقادیر واقعی شاخص کل



شکل ۶ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۶۰ روزه و مقادیر واقعی شاخص کل



شکل ۷ نمودار مقایسه‌ای افق‌های پیش‌بینی ۹۰ روزه و مقادیر واقعی شاخص کل

همانطور که در اشکال شماره (۱) و (۴) الی (۷) نیز مشاهده می‌گردد، هرچه افق پیش‌بینی افزایش می‌یابد و از افق پیش‌بینی ۱ روزه به سمت افق پیش‌بینی ۹۰ روزه حرکت می‌کنیم، مقدار خطا در مقادیر پیش‌بینی شده افزایش می‌یابد و مقادیر پیش‌بینی شده شاخص کل، انحراف بیشتری از مقادیر واقعی آن پیدا می‌کند.

۷- نتایج و پیشنهادها

توسعه علوم ریاضی و پیوند آن با مباحث اقتصادی و مالی در سالیان اخیر توانسته به رشد و توسعه علوم مرتبط با موضوعات مالی منجر گردد. در این بین یکی از متغیرهای اقتصادی تاثیرگذار در اقتصاد، شاخص کل بورس اوراق بهادار است که همواره مورد توجه فعالین و پژوهشگران حوزه بازار سرمایه قرار داشته است. با توجه به این که مدل حرکت براونی هندسی یکی از مدل‌های شناخته شده در علوم ریاضیات مالی شناخته می‌شود، در این پژوهش از آن جهت پیش‌بینی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران استفاده گردید. هدف تحقیق حاضر پاسخ به دو سوال بود که این سوالات به سنجش توانایی مدل GBM در پیش‌بینی افق‌های زمانی ۱ روزه شاخص کل و همچنین میزان توانایی مدل در پیش‌بینی مقادیر شاخص در افق‌های زمانی طولانی تمرکز داشت.

نتایج تحقیق نشان‌دهنده این موضوع بوده است که این مدل با صحت بالا قادر به پیش‌بینی افق زمانی ۱ روزه بوده است. همچنین با افزایش طول افق زمانی پیش‌بینی، صحت مقادیر پیش‌بینی شده توسط مدل کاسته می‌شود و توانایی مدل GBM در شبیه‌سازی مقادیر شاخص کل بورس اوراق بهادار کاهش می‌یابد اما با این حال همچنان تا افق پیش‌بینی ۹۰ روزه مقادیر پیش‌بینی شده از صحت بالایی برخوردار بوده‌اند. با توجه به نتایج تحقیق به نظر می‌رسد که به کارگیری مدل GBM جهت شبیه‌سازی شاخص بورس تهران، مشابه تحقیق عمر و جعفر (۲۰۱۱) می‌تواند شاخص بورس را با صحت بالا پیش‌بینی نماید همچنین مانند تحقیق خالوزاده و خاکی صدیق (۱۳۸۴) که به کارآمدی مدل GBM در پیش‌بینی افق‌های ۱ روزه و بلندمدت قیمت سهام اشاره داشته‌اند، نتایج تحقیق حکایت از این موضوع دارد که مدل GBM توانایی بالایی در پیش‌بینی مقدار شاخص کل بورس در افق‌های ۱ روزه و بلندمدت داشته است. از سوی دیگر نتایجی که با افزایش طول افق پیش‌بینی از تحقیق حاضر حاصل گردیده است مشابه نتایج تحقیق ردی و کلینتون (۲۰۱۶) است که در آن با افزایش طول افق پیش‌بینی، توانایی مدل GBM در پیش‌بینی کاهش می‌یابد و مقادیر پیش‌بینی شده با خطای بیشتری مواجه خواهند بود.

در عین حال که نتایج تحقیق نشان‌دهنده توانایی مدل GBM در پیش‌بینی شاخص کل بوده است، اما ممکن است مدل‌های دیگر دیفرانسیل تصادفی نیز بتوانند پیش‌بینی‌هایی با دقت بالاتر ارائه نمایند لذا جهت توسعه پژوهش‌هایی از این دست پیشنهاد می‌شود پژوهشگران در مطالعات آتی به بررسی توانایی سایر مدل‌های دیفرانسیل تصادفی جهت پیش‌بینی شاخص کل بورس متناسب با روش تحقیق پژوهش حاضر بپردازند و نتایج را با مدل GBM مقایسه نمایند. همچنین پیشنهاد می‌شود از مدل GBM و روش به کارگیری آن مطابق تحقیق حاضر، جهت شبیه‌سازی سایر متغیرهای مالی و اقتصادی بهره گرفته شود.

فهرست منابع

* تهرانی، ر، مرادپور، سعید. (۱۳۹۱). پیش‌بینی بازده شاخص بورس اوراق بهادار با استفاده از مدلهای شبکه‌های عصبی مضنوعی شعاع پایه. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار. ۱۰.
* جهانی پور، روح الله. (۱۳۸۵). نیوتن و لایب نیتس، سپس کیوشی ایتو. فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۶، ۶۶-۶۱.
* چانگ کای لای و فرید ایت سهلیه. (۱۳۸۸). نظریه‌ی مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی، (ترجمه‌ی وحیدی اصل، محمد قاسم و میامئی ابوالقاسم). مرکز نشر دانشگاهی.
* خالوزاده، ح، خاکی صدیق، ع. (۱۳۸۴). مدل سازی و پیش بینی قیمت سهام با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی. مجله تحقیقات اقتصادی، دوره ۴۰، شماره ۲.
* خسروی‌نژاد، ع، شعبانی صدرپیشه، م. (۱۳۹۳). ارزیابی مدل‌های خطی و غیر خطی در پیش‌بینی شاخص قیمت سهام در بورس اوراق بهادار تهران. فصلنامه علوم اقتصادی. ۸(۲۷).
* راعی، ر، فلاح طلب، حسین. (۱۳۹۲). کاربرد شبیه سازی مونت کارلو و فرآیند قدم زدن تصادفی در پیش بینی ارزش در معرض ریسک. مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار، شماره شانزدهم.
* ژارو، رابرت، پروتر، فیلیپ. (۱۳۸۵). تاریخچه انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی از ۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰، (ترجمه‌ی روح الله جهانی پور) فرهنگ و اندیشه ریاضی، شماره ۳۶، ۳۸-۱۷.
* طیبی، ک، خوش اخلاق، ر، فراهانی، م. (۱۳۹۰). براوارد نااطمینانی در قیمت نفت سنگین ایران و سبد اوپک: کاربرد معادلات دیفرانسیل تصادفی. فصلنامه مطالعات اقتصاد انرژی، سال هشتم، شماره ۳۱، ۲۳-۱.
* قلی زاده، ا، ابراهیمی، م، کمیاب، ب. (۱۳۹۴). استراتژی تخصیص بهینه دارایی ها در حضور بازار

مسکن. فصلنامه تحقیقات مدلسازی اقتصادی، شماره ۲۱.

* نیسی، ع، پیمانی، م. (۱۳۹۳). مدلسازی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از معادله دیفرانسیل تصادفی هستون. فصلنامه پژوهشنامه اقتصادی، سال چهاردهم، شماره ۵۳، ۱۶۶-۱۴۳.
* Agustini, W. F., Affianti, I. R., & Putri, E. R. (2018, March). Stock price prediction using geometric Brownian motion. In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 974, No. 1, p. 012047). IOP Publishing.
* Bachelier, L. (1900). Théorie de la Spéculation. Annales Scientifiques de l'École Normale spérieure, 21-86.
* Badriah, N., Siti Nazifah, Z. A., & Maheran, M. J. (2018). Forecasting Share Prices Accurately For One Month Using Geometric Brownian Motion. Pertanika Journal of Science & Technology, 26(4).
* Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. Journal of political economy, 81(3), 637-654.
* Brandimarte, P. (2006). Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction. John Wiley & Sons.
* Du, Y. (2018, June). Application and analysis of forecasting stock price index based on combination of ARIMA model and BP neural network. In 2018 Chinese Control And Decision Conference (CCDC) (pp. 2854-2857). IEEE.
* Einshtein, A. (1905). Uber die von der Molecularkinetischen Theorie der Warme gefordete Bewegung von in ruhenden Flussigkeiten suspendierten Teinchen. Ann. Phys, 17, 539.
* Harris, L. (2003). Trading and exchanges: Market microstructure for practitioners. Oxford University Press, USA.
* Hiransha, M., Gopalakrishnan, E. A., Menon, V. K., & Soman, K. P. (2018). NSE Stock Market Prediction Using Deep-Learning Models. Procedia Computer Science, 132, 1351-1362.
* Iliev, O., Nagapetyan, T., & Ritter, K. (2013). Monte Carlo simulation of asymmetric flow field flow fractionation. In Monte Carlo Methods and Applications: Proceedings of the 8th IMACS Seminar on Monte Carlo Methods, de Gruyter (pp. 115-123).
* Knill, O. (1994). Probability and stochastic processes with applications. Havard Web-Based.
* Korrapati, R. (2016). Five Chapter Model for Research Thesis Writing: 108 Practical Lessons for MS/MBA/M. Tech/M. Phil/LLM/Ph. D Students. Diamond Pocket Books Pvt Ltd.
* Lawrence, K. D., Klimberg, R. K., & Lawrence, S. M. (2009). Fundamentals of forecasting using excel. Industrial Press Inc.
* Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. The Bell Journal of economics and management science, 141-183.
* Mittal, A., & Goel, A. (2012). Stock prediction using twitter sentiment analysis. Standford University, CS229 (2011 http://cs229. stanford. edu/proj2011/GoelMittal-StockMarketPredictionUsingTwitterSentimentAnalysis. pdf), 15.
* Omar, A., & Jaffar, M. M. (2011, September). Comparative analysis of Geometric Brownian motion model in forecasting FBMHS and FBMKLCI index in Bursa Malaysia. In Business, Engineering and Industrial Applications (ISBEIA), 2011 IEEE Symposium on (pp. 157-161). IEEE.
* Postali, F. A., & Picchetti, P. (2006). Geometric Brownian motion and structural breaks in oil prices: a quantitative analysis. Energy Economics, 28(4), 506-522.
* Rathnayaka, R. K. T., Jianguo, W., & Seneviratna, D. N. (2014, October). Geometric Brownian motion with Ito's lemma approach to evaluate market fluctuations: A case study on Colombo Stock Exchange. In Behavior, Economic and Social Computing (BESC), 2014 International Conference on (pp. 1-6). IEEE.
* Reddy, K., & Clinton, V. (2016). Simulating Stock Prices Using Geometric Brownian motion: Evidence from Australian Companies. Australasian Accounting, Business and Finance Journal, 10(3), 23-47.
* Sobczyk, K. (2013). Stochastic differential equations: with applications to physics and engineering (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
* Thomaidis, N., 2007, Efficient Statistical Analysis of Financial Time-Series using Neural Networks and GARCH models, PP: 2-6

یادداشت‌ها

[1] Index
[2] Thomaidis
[3] Mittal & Goel
[4] Knill
[5] Sobczyk
[6] Du
[7] Colombo Stock Exchange
[8] Percentage of correct directional predictions
[9] Jakarta Composite Index
[10] Violation ratio
[11] Least underestimation
[12] Least distance
[13] Brandimarte
[14] Korrapati
[15] Mean Absolute Percentage Error
[16] Highly Accurate
[17] Good Accurate
[18] Reasonable Forecast
[19] Inaccurate Forecast