نشریـه علمـی
دانش مالی تحلیل اوراق بهادار
سال چهاردهم، شماره پنجاه‌ام
تابستان ۱۴۰۰

مقایسه توزیع فریشه (FD) و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) در برآورد ارزش در معرض ریسک (VAR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) شاخص بورس اوراق بهادار تهران

آزاده مهرانی[۱]
علی نجفی مقدم[۲]
علی باغانی[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۱۸ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۹

چکیده

چالش اساسی در محاسبه ریسک انتخاب روشی است که بتواند دقیق‌ترین مقدار ریسک را محاسبه کند. هدف این مطالعه مقایسه برآورد ارزش در معرض ریسک (VAR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از توزیع فریشه (FD) و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) هست. در این پژوهش از بازده داده‌های ۲۱ و ۶۳ روزه سری زمانی شاخص کل، شاخص سهام آزاد شناور و شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی ۱۳۹۱/۰۱/۰۱ الی ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ استفاده گردید. برای پذیرش مدل‌ها به لحاظ آماری از آزمون‌های پس آزمایی کوپیک و آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن استفاده شد. مقایسه مدل‌ها از طریق توابع زیان دوم لوپز و بلانکو-ایهل انجام شد. برای رتبه‌بندی مدل‌های CoVaR نیز دو تابع زیان شامل میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها (RMSE) به کار رفت. نتایج نشان داد طبق خروجی آماره تابع زیان دوم لوپز، توزیع پارتو تعمیم‌یافته در برآورد VaR بازده شاخص کل و بازده شاخص ۵۰ شرکت برتر بهتر از توزیع فریشه عمل نمود، اما برای شاخص آزاد شناور، توزیع فریشه عملکرد بهتری دارد. نتایج طبق مقادیر تابع زیان بلانکو-ایهل مخالف نتایج آماره تابع زیان دوم لوپز بود. نتایج میانگین قدر مطلق خطاها و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها نشان از برتری توزیع فریشه در برآورد CoVaR نسبت توزیع پارتو تعمیم‌یافته داشت.

واژه‌های کلیدی: ارزش در معرض ریسک(VAR)[۱]، ارزش در معرض ریسک شرطی(CoVaR)[۲]، توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته(GEV)[۳]، توزیع فریشه (FD)[۴]، توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD)[۵].

۱- دانشجوی دکتری تخصصی مدیریت مالی، دانشکده اقتصاد و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران
mehrani_azade165@yahoo.com
۲- استادیار گروه حسابداری، دانشکده اقتصاد و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران (نویسنده مسئول)
ali_najafi@azad.ac.ir
۳- استادیار و عضو هیات علمی، دانشکده اقتصاد و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب، تهران، ایران
A_baghani@azad.ac.ir

۱- مقدمه

گسترش پریشانی مالی باعث ایجاد ریسک سیستماتیک می‌شود: چنانچه ظرفیت سیستم مالی مختل شود، پیامدهای بالقوه منفی برای اقتصاد کلان به همراه خواهد داشت (Tobias & Brunnermeier, 2016). سنجش ریسک در ادبیات مالی اهمیت ویژه ای دارد. مارکویتز ریسک را به معنای عدم وقوع بازده مورد انتظار تعریف کرده و آن را با واریانس بازده های تاریخی، حول مقدار مورد انتظار بازده که همان میانگین بازده های تاریخی بود اندازه گرفت. پس از مارکویتز، محققان اشکالاتی را بر تئوری مارکویتز، از بعد سنجش ریسک آن وارد می‌دانستند. ازجمله اینکه طبق نظریه مارکویتز، بازده های بالاتر از مقدار مورد انتظار نیز به‌عنوان ریسک در نظر گرفته می شد این در حالی است که ازنظر منطقی، بازده بالاتر از مقدار مورد انتظار درواقع برای سرمایه گذار امری مطلوب است و در نظر گرفتن آن به‌عنوان ریسک، باعث کاهش امکان وقوع آن می‌گردد (Naccarato et al., 2019). این امر، باعث به وجود آمدن سنجه‌هایی شد که تنها نوسانات غیر مطلوب را به‌عنوان ریسک در نظر می‌گرفتند ازجمله این سنجه‌ها می‌توان به سنجه ارزش در معرض ریسک (VAR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) اشاره کرد (Zhao et al., 2018). VAR بیانگر حداکثر زیان مورد انتظار سبد دارایی‌ها در طول افق زمانی معین و در سطح اطمینان معین است و روش‌های پارامتریک، غیر پارامتریک و نیمه پارامتریک بسیاری برای برآورد آن ابداع‌شده است(Usman, Jibran, Amir-ud-Din, & Akhter, 2019). دلیل محبوبیت و همچنین عمومیت این روش، سادگی آن در ایجاد شکل‌های آماری خلاصه از زیان‌های بالقوه طی یک افق زمانی معین بود (Lotfi & Zenios, 2018). اگرچه VaR خط اول دفاع در برابر ریسک‌های مالی را فراهم می‌نماید، اما تمامی آن‌ها را برطرف نمی‌نماید و کامل نیست. یک محدودیت مهم سنجه VaR این است که تنها در صورت تخطی، در مورد بیشترین زیان سخن می‌گوید و در مورد زیان‌های فراتر از مقدارش چیزی برای گفتن ندارد. ناکامی VaR در محاسبه چنین زیان‌هایی باعث شد ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) به‌عنوان جایگزینی مناسب برای VaR در تحقیقات مالی به کار گرفته شود. CoVaR سنجه‌ای است که از ویژگی انسجام برخوردار بوده و بنابراین نسبت به VaR از اعتبار بیشتری برخوردار است. CoVaR زیان مورد انتظار را هنگامی‌که زیان، بیشتر از VaR تعیین‌شده است، اندازه‌گیری می‌نماید(Sun, Liu, Wang, & Li, 2020). VaR و CoVaR را می‌توان از روش‌های پارامتریک، غیر پارامتریک یا شبیه‌ساز استفاده کرد. اما چالش اساسی در محاسبه ارزش در معرض ریسک انتخاب روشی است که بتواند دقیق‌ترین مقدار را برای ارزش در معرض ریسک محاسبه کند. (Shahiki Tash, Esmail Ezazi, & Bimorgh, 2013). در محاسبه VaR و CoVaR ، چولگی و کشیدگی متغیرهای بازار و همبستگی غیرخطی آن‌ها را باید با توزیع‌هایی غیر از توزیع نرمال بررسی گردد. توزیع مقادیر حدی می تواند در این خصوص کمک زیادی نماید و رفتار دنباله سری‌های تحت مطالعه را تا حدود زیادی نشان دهند (Diebold, Schuermann, & Stroughair, 1998, 2000; Longin, 2000; McNeil & Frey, 2000). مطالعه وقایع حداکثری در بازارهای مالی همیشه یکی از فاکتورهای اصلی در مدیریت ریسک بوده است. برای مثال، مدیران صندوق‌های سرمایه‌گذاری ملزم به ارزیابی حداکثر زیان روزانه برای تمامی اوراق و سهام در پرتفوی خودشان هستند. سطح حداکثر زیان روزانه بالقوه برای معامله گران با فرکانس بالا مهم است. با توجه به تئوری فیشر-تیپت-گندکو[۶]، توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته[۷] (GEV) برای مشخص کردن رفتار حداکثر استفاده می‌شود، که تئوری مقدار کرانگین[۸] (EVT) را رویکردی گسترده برای مدیریت ریسک در صنعت مالی می‌سازد(Kratz, Lok, & McNeil, 2018). علاوه بر روش‌شناسی حداکثر GEV، روش بنیادی دیگری برای مقدار کرانگین وجود دارد که همان اوج بیش از آستانه است، که مبتنی بر توزیع

پارتوی تعمیم‌یافته[9] (GPD) است. با توجه به قضیه پیکلندز-بالکما- دی هان[10]، GPD را می‌توان برای رفتار شرطی متغیر تصادفی بعدازاینکه از آستانه بالاتر رفت استفاده کرد (Bücher & Segers, 2018).

این پژوهش یک مدل ارزش حدی تعمیم یافته (GEV) با رویکرد استفاده از توزیع فریشه (FD) را برای مدل‌سازی رفتار متغیر زمانی ماکزیمم، در سری‌های زمانی شاخص کل، شاخص آزاد سهام شناور و شاخص ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران را معرفی می‌کند. همچنین ما در ادامه ضمن برآورد VaR و CoVaR با استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD)، به مقایسه VaR و CoVaR برآورد شده از طریق توزیع فریشه (FD) و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) می‌پردازیم. در مرحله اول برای اعتبار سنجی مدل‌ها از آزمون‌های پس آزمایی کوپیک و آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن استفاده‌شده و برای مقایسه مدل ها با یکدیگر از توابع زیان دوم لوپز و بلانکو- ایهل استفاده نمودیم. برای رتبه‌بندی مدل‌های ارزش در معرض خطر شرطی نیز دو تابع زیان شامل میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها (RMSE) به کار رفت.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی از معیارهای مهم در مدیریت ریسک به شمار می‌رود. تیل گولدیمان[11] را می‌توان مبدع عبارت ارزش در معرض ریسک به‌حساب آورد. در اواخر دهه ۸۰ او مدیر بخش تحقیقات موسسه جی.پی.مورگان بود و یک گروه تحقیقاتی را برای پژوهش درزمینه ریسک پایه‌ریزی کرد. گروه ۳۰ که نماینده جی‌پی‌مورگان هم در آن حضور داشت، سلسله مباحث بهترین روش مدیریت ریسک را آغاز کرد. عبارت ارزش در معرض ریسک در سال ۱۹۹۳ در گزارش گروه ۳۰ وارد شد. قبل از آن عناوین سرمایه در معرض ریسک و دلارهای در معرض ریسک را هم‌ارز باارزش در معرض ریسک به کار می‌بردند (Zhang & Nadarajah, 2018). در سال ۱۹۹۹ سنجه ریسک دیگری بانام ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) یا زیان مورد انتظار دنباله CVaR، توسط اوریاسف[12] و راکفلر[13] معرفی شد که از ویژگی انسجام بهتری نسبت به VaR برخوردار بود(Sivnarain, 2018). یکی از دلایل استفاده از سنجه CoVaR در میان مدیران اجرایی، جذابیت این سنجه به دلیل سادگی و قابل‌فهم بودن آن است. سنجه CoVaR بیان می‌کند که مدیران یک موسسه یا شرکت تا چه حدی نسبت به از دست دادن دارایی‌ها باید نگران باشند. به‌بیان‌دیگر این سنجه نشانگر نگرانی از دست رفتن دارایی‌های یک موسسه یا سازمان است. CoVaR مقدار نگرانی را بر به‌صورت درصد و کمیت پولی ارائه می‌دهد. مقدار درصد قابل‌اطمینانی که برای برآورد CoVaR در نظر گرفته می‌شود، در حقیقت مقدار استرس ایجادشده به حداکثر زیان مشروطی است که متوجه دارایی های سازمان یا موسسه در یک دوره زمانی مشخص است. با توجه به الزامات قانونی از طرف قانون‌گذاران بازار پول، سرمایه و شرکت‌های بیمه در محاسبه CoVaR اهمیت این سنجه را بیشتر نمایان می‌کند. برای محاسبه معیار CoVaR بایستی بر دنباله توزیع تغییرات سری‌های زمانی مالی تمرکز کرد. نظریه ارزش فرین که بر دنباله توزیع‌ها تمرکز دارد، توزیع مقادیر بسیار بزرگ یا بسیار کوچک را توصیف می‌کند. همان‌طور که دیبولد و همکاران در سال ۱۹۹۸ ذکر کرده‌اند، اکثر روش‌های کاربردی EVT روی مدل‌سازی وقایع حدی در سری‌های زمانی به همراه رویکرد استاتیک، بر اساس توزیع تعادلی متمرکز هستند. بااین‌حال، رفتار سری‌های زمانی اساسی ممکن است باگذشت زمان تغیر کند. برای مثال، سری‌های زمانی مالی تمایل به تغییرات ساختاری و پویایی متغیر زمانی مثل خوشه‌بندی نوسانات دارند. برای تطابق پویایی‌های وقایع حدی و مطالعه رفتار شرطی ریسک دم در بازارهای مالی، مطالعات اخیر روی مدل‌های پویایی POT-GPD متمرکزشده‌اند. برای مثال، اسمیت و گودمن در سال

۲۰۰۰ و پاوز-دیمولین و همکاران در سال ۲۰۱۴ از روش بیزی برای به‌روزرسانی پارامترهای متغیر زمانی GPD استفاده کردند. کلی در سال ۲۰۱۴ و کلی و جیانگ در سال ۲۰۱۴ مدل پویای دم را به همراه POT-GPD برای داده‌های پانل ایجاد کردند(Chavez-Demoulin, Embrechts, & Sardy, 2014; Smith & Goodman, 2000). ماساکی در سال ۲۰۱۶ و ژانگ در سال ۲۰۱۷ از مدل امتیازدهی خود همبسته تعمیم‌یافته [14] برای پارامترهای GPD استفاده کردند(Massacci, 2017). این مطالعات شواهدی قوی از رفتار متغیر زمانی وقایع حدی در بازارهای مالی را به‌خصوص برای شاخص دم نشان داد. یکی از مزیت‌های رویکرد حداکثر-GEV نسبت به POT-GPD این است که این رویکرد، مدل‌سازی حداکثری را در سری‌های زمانی نشان می‌دهد و لذا از اهمیت خاصی برخوردار است. برخلاف مدل‌های پویای GPD تحقیقات کمی روی مدل‌های پویای GEV انجام‌شده است. بالی و وینبوم ۲۰۰۷ مدل GEV متغیر زمانی را برای تخمین نوسانات مشخص‌شده در مطالعات تجربی ریسک بازار طراحی کردند، بااین‌حال، نتایج تئوریک ارائه نشدند(Bali & Weinbaum, 2007).

برونلس و انگل (۲۰۱۲) ریسک سیستمی را با استفاده از دو سنجه MES و VaR شرطی دلتا (ΔCoVaR) محاسبه کردند(Lin, Sun, & Yu, 2018). شهزاد و همکاران (۲۰۱۸) تحلیل سیستماتیک ریسک در بازارهای سهام اسلامی با استفاده از و این کاپیولا و مدل‌سازی دلتا CoVaR را موردمطالعه قراردادند. مطالعات آن‌ها نشان داد نتایج تجربی از اجرای (VaR) Valueat-Risk، VaR شرطی (CoVaR) ، VaR شرطی دلتا (ΔCoVaR) ، VaR مشروط و این کانونی (c-vin CoVaR) و متغیرهای زمان و متغیرهای ثابت مدل‌های کوپل به دست می‌آید(Shahzad, Arreola-Hernandez, Bekiros, Shahbaz, & Kayani, 2018). همچنین از مقالاتی که رفتار توزیع سری‌های زمانی مالی در برآورد ریسک با رویکرد استفاده از توزیع مقادیر حدی (EVT) ، در آن بررسی‌شده است و ارجاعاتی فراوانی نیز به آن شده، مقاله مربوط به مطالعات گیلی و کلیزی (۲۰۰۶) است (Gilli, 2006).

مقاله دیگری که به برآورد ارزش در معرض ریسک با استفاده از نظریه حدی تعمیم‌یافته نوشته‌شده است، مقاله‌ی جاکوب (۲۰۲۰) است. جاکوب برای پیش‌بینی توزیع بیشترین مصرف روزانه برق از توزیع حدی تعمیم‌یافته استفاده کرده است(Jacob, Neves, & Greetham, 2020). همچنین اچوست و جاست (۲۰۲۰) نشان دادند، اگرچه در برآورد VaR و CoVaR، هر رویکرد سطوح آستانه متفاوتی را ایجاد می‌کند، ولی مدل GARCH-EVT ارزش مشابهی را با تخمین ریسک تولید می‌کند(Echaust & Just, 2020).

موتبا و ملنگا (۲۰۱۳) به رتبه‌بندی روش‌های برآورد VaR و CoVaR با استفاده از توزیع‌های مقدار حدی (EVT) و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) و روش‌های شبیه‌سازی تاریخی و روش کوواریانس واریانس پرداختند. نتایج نشان داد مدل GEV شرطی از همه مدل‌های دیگر در همه مقادیر بهتر است. (Muteba Mwamba & Mhlanga, 2013).

در داخل کشور نیز محققان زیادی در خصوص برآورد ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض خطر به مطالعه پرداختند. ازجمله تحقیقات داخلی درزمینه برآورد VaR می‌توان به تحقیق انجام‌شده توسط رهنمای رود پشتی و قندهاری (۱۳۹۴) اشاره کرد. آن‌ها ارزش در معرض خطر مبتنی بر محدودیت بر ارزیابی عملکرد مدیریت پرتفوی فعال در بورس اوراق بهادار تهران را برآورد کردند (رهنمای رود پشتی و قندهاری، ۱۳۹۴).

مظفری و نیکو مرام (۱۳۹۹)، در پژوهشی تحت عنوان " بررسی کارایی شاخص ارزش در معرض ریسک (VAR) با استفاده از نظریه ارزش فرین در مقایسه با روش‌های سنتی ارزیابی ریسک " با استفاده از بازده روزانه و ماهانه لگاریتمی شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران با رویکرد ماکزیمم بلوک‌ها در اندازه گیری سنجه ارزش در معرض ریسک VaR نشان

دادند که استفاده از اطلاعات ماهیانه در محاسبه شاخص ارزش در معرض ریسک از دقت پیش‌بینی بالاتری برخوردار بوده و نسبت تخطی (خطای آزمون) در این حالت در مقایسه با روش‌های سنتی ارزیابی ریسک نیز پایین‌تر است (مظفری و نیکو مرام، ۱۳۹۹).

فلاح شمس و سینا (۱۳۹۸) بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با رویکرد توزیع مقادیر حدی در بورس اوراق بهادار تهران را موردمطالعه قراردادند. نتایج مطالعه نشان داد تشکیل سبد سهام بهینه، با استفاده از توزیع مقادیر حدی با مدل میانگین- واریانس مارکویتز تفاوت قابل‌ملاحظه‌ای ندارد (فلاح شمس و سینا، ۱۳۹۸).

کاشی و همکاران (۱۳۹۶) ارزش در معرض ریسک (VAR)و ریزش مورد انتظار (ES) در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه مقدار حدی با رویکرد ماکسیمم بلاک‌ها و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برآورد کردند (کاشی و همکاران، ۱۳۹۶).

سارنج و نور احمدی (۱۳۹۶) در پژوهشی به رتبه‌بندی رویکردهای مختلف VAR و CoVaR بر روی‌داده‌های روزانه شاخص صنعت بانکداری در طی دوره زمانی ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۵ با تأکید بر رویکرد ارزش فرین شرطی پرداختند. ابتدا برای بررسی اعتبار پیش‌بینی مدل‌های مختلف از روش‌های پس آزمایی پوشش برنولی و آزمون استقلال تخطی برای VaR و آزمون مک‌نیل‌وفری برای CoVaR استفاده نمودند. سپس توابع زیان مدل‌های معتبر باقی‌مانده از مرحله اول وارد تابعMCS شده و رتبه‌بندی آماری صورت پذیرفت. تابع زیان مورداستفاده در مدل‌های VaR، تابع زیان داو و در مدل‌های CoVaR، اولسن استفاده شد. نتایج نشان داد در هر دو مدل‌های VaR و CoVaR و در سطح اطمینان ۹۹٪، رویکردهای ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استانداردشده نرمال، ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استانداردشده تی‌استیودنت و گارچ با پسماندهای تی‌استیودنت به ترتیب رتبه‌های اول تا سوم رادارند (سارنج و نور احمدی، ۱۳۹۶).

پویان‌فر و موسوی (۱۳۹۵) تخمین ارزش در معرض ریسک داده‌های درون‌ریز با رویکرد EVT- COPULA را انجام دادند. نتایج پژوهش حاکی از برتری مدل ترکیبی نسبت به مدل‌های شبیه‌سازی تاریخی، پارامتریک و مدل ترکیبی واریانس ناهمسان شرطی تعمیم یافته و نظریه ارزش فرین بود (پویان‌فر و موسوی، ۱۳۹۵).

زمانی و همکاران (۱۳۹۲) در مطالعه‌ای با استفاده از نظریه ارزش فرین برای محاسبه ارزش در معرض ریسک بازده لگاریتمی شاخص قیمت و ثمره نقدی بورس اوراق بهادار نشان دادند که برای دم سمت راست توزیع بازده شاخص بورس اوراق بهادار تهران که نسبت به دم سمت چپ پهن، تر است روش نظریه ارزش فرین در تمام سطوح اطمینان کاراترین روش محاسبه ارزش در معرض ریسک است، درحالی‌که برای دم سمت چپ نه در تمام سطوح اطمینان، بلکه در بالاترین آن‌ها روش نظریه ارزش فرین بیشترین کارایی را دارد (زمانی و همکاران، ۱۳۹۲)

فلاح پور و یار احمدی (۱۳۹۱) به بررسی دنباله تابع توزیع بازده بورس اوراق بهادار تهران (شاخص قیمت و بازده نقدی و شاخص صنایع) در دو بازه زمانی مختلف پرداختند. وجود دنباله پهن مورد آزمون قرار گرفت. نتایج توزیع مقدار حدی، وجود دنباله پهن در تابع توزیع بازده سهام برای شاخص‌های موردمطالعه را تائید کرد (فلاح‌پور و یاراحمدی، ۱۳۹۱).

محمدی و همکاران (۱۳۸۷)، به محاسبه VaR پارامتریک با استفاده از مدل‌های ناهمسانی واریانس شرطی در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته‌اند. نتایج نشان می‌دهد که برآورد مقادیر VaR یک‌روزه و ده‌روزه با استفاده از توزیع‌های لپتو کورتیک از دقت بالاتری برخوردار هست (محمدی و همکاران، ۱۳۸۷).

در اکثر تحقیقات انجام‌شده جهت محاسبه VaR و CoVaR با رویکرد استفاده از نظریه ارزش حدی، به رویکردهای مورداستفاده از انواع متفاوت این توزیع پرداخته نشده است. لذا با توجه به اینکه در این مطالعه تمرکز ما به استفاده از توزیع فریشه به‌عنوان

نوع دوم توزیع حدی تعمیم‌یافته هست، در گام سوم به چگونگی محاسبه VaR و CoVaR با استفاده از توزیع فریشه و توزیع پارتو تعمیم‌یافته می‌پردازیم.

۳- روش‌شناسی پژوهش، فرضیه‌ها، تبیین و مراحل برازش مدل‌ها

این بخش شامل معرفی روش‌های آماری، تعریف ارزش در معرض ریسک، ارزش در معرض ریسک شرطی، معرفی توزیع حدی تعمیم‌یافته با رویکرد توزیع فریشه و توزیع رویکرد فراتر از آستانه برای محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی و همچنین معرفی مبانی نظری آزمونه‌ای پس آزمایی کوپیک و آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن و آزمونه‌ای مقایسه‌ای مدل شامل توابع زیان دوم لوپز و بلانکو- ایهل هست. پژوهش حاضر ازنظر هدف پژوهشی کاربردی بوده و در زمره تحقیقات کمی و توصیفی مدیریت مالی به شمار می‌رود. به‌علاوه با توجه به اینکه از اطلاعات تاریخی در آزمون فرضیه در آن استفاده‌شده، ازنظر بعد زمانی گذشته‌نگر و در گروه تحقیقات شبه آزمایشی طبقه بندی می گردد. در این پژوهش از بازده داده‌های ۲۱ روزه و ۶۳ روزه سری زمانی شاخص کل، شاخص سهام آزاد شناور و شاخص ۵۰ شرکت فعال بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی ۱۳۹۱/۰۱/۰۱ الی ۱۳۹۸/۱۲/۲۹، استفاده گردید. به‌منظور تعین نمونه و داده‌های موردنیاز مدل‌های این پژوهش از روش نمونه‌گیری برش مقطعی طولی استفاده‌شده است. اطلاعات مربوط به بررسی مبانی نظری و ادبیات موضوع از طریق مطالعات کتابخانه‌ای و جستجوی اینترنتی جمع‌آوری گردیده است. در این پژوهش پس از جمع‌آوری داده‌های موردنیاز نسبت به تحلیل آمار توصیفی داده ها اقدام شده و آزمونه ای موردنیاز مربوط به نرمالیتی، مانایی و سایر آزمون‌های موردنیاز برای داده‌ها اقدام کردیم. در ادامه برای برآورد در این تحقیق از روش حداکثر درستنمایی برای تخمین پارامترهای توابع توزیع مقدار کرانی استفاده شده است. همچنین برای سنجش قابل‌قبول بودن مدل‌ها به لحاظ آماری از آزمون‌های پس آزمایی کوپیک و آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن استفاده‌شده و برای مقایسه مدل‌ها با یکدیگر از توابع زیان دوم لوپز و بلانکو- ایهل استفاده کرده‌ایم. برای رتبه‌بندی مدل‌های ارزش در معرض خطر شرطی نیز دو تابع زیان شامل میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها (RMSE) به کار خواهد رفت. برای تخمین پارامترها و انجام آزمون‌ها از نرم‌افزار R استفاده‌شده است. به طورکلی مراحل این پژوهش به سه بخش زیر تقسیم می‌شود:

- ✓ بخش اول: تحلیل داده‌ها و برآورد پارامترها شامل تحلیل توصیفی داده‌ها، برآورد پارامترها و تحلیل پس از برآورد
- ✓ بخش دوم: محاسبه ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی
- ✓ بخش سوم: پس آزمایی مدل‌های ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی

قبل از انجام مراحل برازش مدل‌ها، معرفی فرضیه‌ها و مبانی نظری هر یک از مدل‌ها و توزیع‌های مورداستفاده در زیر ارائه گردیده است.

۳-۱- فرضیه‌های تحقیق

فرضیه اول: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک (VaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص کل بهابازار اوراق بهادار تهران می‌شود.

فرضیه دوم: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک (VaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص سهام آزاد شناور بورس اوراق بهادار تهران می‌شود.

فرضیه سوم: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک (VaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران می‌شود.

فرضیه چهارم: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران می‌شود.

فرضیه پنجم: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص سهام آزاد شناور بورس اوراق بهادار تهران می‌شود.

فرضیه ششم: توزیع مقدار حدی تعمیم‌یافته (GEV) با رویکرد توزیع فریشه (FD) منجر به محاسبه دقیق‌تر ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) نسبت به استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) برای داده‌های بازده شاخص ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران می‌شود.

۳-۲- متغیرهای تحقیق

در راستای موضوع تحقیق متغیرهای وابسته و مستقل به شرح جدول یک انتخاب‌شده‌اند.

جدول ۱- خلاصه متغیرهای پژوهش (منبع: داده‌های تحقیق)

نام متغیر	نوع متغیر	علامت اختصاری	تعریف
ارزش در معرض خطر	وابسته	VaR_{it}	بیشترین زیان پرتفوی موردنظر، در یک افق زمانی تعیین‌شده در سطح اطمینان معین برای شاخص i دوره t؛
ارزش در معرض خطر شرطی	وابسته	$CoVaR_{it}$	زیان انتظاری یک سرمایه‌گذاری، به‌شرط وقوع زیان‌هایی فراتر از VaR برای شاخص i دوره t؛
بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار	مستقل	$R\text{-}TEPIX_t$	بازده شاخص کل قیمت در بورس اوراق بهادار که به‌اختصار آن را شاخص کل می‌گویند، نشان‌دهنده تغییرات سطح عمومی قیمت‌ها در کل بازار است و میانگین افزایش یا کاهش قیمت سهام در بازار را بیان می‌کند.
بازده شاخص سهام آزاد شناور	مستقل	R-TEFIXt	بازده شاخص سهام آزاد شناور، تغییرات آن بخش از سهام یک شرکت را محاسبه می‌کند که توسط سرمایه‌گذاران خرد مورد معامله قرار می‌گیرد.
بازده شاخص ۵۰ شرکت فعال	مستقل	R-Ir50t	بازده شاخص ۵۰ شرکت برتر، شاخص میانگین وزنی ۵۰ شرکتی است که بالاترین درجه نقد شوندگی را در بورس اوراق بهادار رادارند.

۳-۳- مدل‌های مورداستفاده در تحقیق

۳-۳-۱- توزیع حدی تعمیم‌یافته با رویکرد توزیع فریشه

یک دارایی را در نظر بگیرید و بازده آن را در هرروز با r_t نشان دهید. یک سری n تایی از این بازده‌ها را به‌صورت $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ در نظر بگیرید. مینیمم این بازده‌ها را با $r_{(1)}$ و ماکسیمم آن‌ها را با $r_{(n)}$ نشان دهید. در نظریه ارزش حدی تمرکز بر روی ماکسیمم بازده‌ها یا $r_{(n)}$ است. اگرچه این نظریه به‌راحتی با تغییر علامت بازده‌ها برای مینیمم بازده‌ها نیز قابل‌استفاده است.

فرض کنید که بازده‌ها مستقل[15]، با تابع توزیع تجمعی[16] یکسان و برد[17] $u[l,u]$ بزرگ‌تر از یک و هر دو اعداد حقیقی‌اند، لذا تابع توزیع تجمعی $r_{(n)}$ را با $F_{n,n}$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

رابطه ۱)

$$F_{n,n}(x) = Pr\left[r_{(n)} \le x\right]$$

اما با توجه به استقلال بازده‌ها و یکی بودن توزیع آن‌ها، $F_{n,n}$ چنین محاسبه می‌شود:

رابطه ۲)

$$F_{n,n}(x) = Pr(r_1 \le x, r_2 \le x, ..., r_n \le x)$$
$$= \prod_{j=1}^{n} Pr(r_j \le x) = \prod_{j=1}^{n} F(x) = \left[F(x)\right]^n$$

با توجه به این‌که توزیع تجمعی r_t با $F(x)$ نامشخص است، $F_{n,n}$ نیز نامشخص است. زمانی که n به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، $F_{n,n}$ تابعی نا تباهیده[18 و 19] می‌شود. به‌عبارت‌دیگر در این حالت:

رابطه ۳)

$$\begin{cases} F_{n,n}(x) \to 0 \; if \;\; x < u \\ F_{n,n}(x) \to 1 \; if \;\; x \ge u \end{cases}$$

که تابع تباهیده $F_{n,n}$ فاقد ارزش است. در نظریه ارزش حدی دو پارامتر μ_n و σ_n، $\sigma_n > 0$ را طوری تعیین می‌کنند که توزیع حدی $(r_{(n)} - \mu_n)/\sigma_n$ یک توزیع ناتباهیده[20] باشد. به ترتیب μ_n و σ_n به ترتیب پارامترهای مکان[21] و مقیاس[22] گفته می‌شود. با توجه به فرض مستقل بودن بازده‌ها، توزیع حدی $r_{(n)}$ نرمال شده طبق قضیه فیشر و تیپت (۱۹۲۸)، گنیدنکوف (۱۹۴۳)[23 و 24] به‌صورت زیر به دست می‌آید:

این تابع اگر $\xi > 0$ برای $x < -1/\xi$ و اگر $\xi > 0$ برای $x > -1/\xi$ تعریف می‌شود.

به ξ پارامتر شکل[25] گفته می‌شود که تعیین‌کننده شکل دم توزیع است. به توزیع حدی رابطه (۱) توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته[26] (GEV) برای ماکسیمم‌ها گفته می‌شود. این توزیع با توجه به مقدار پارامتر شکل (ξ) به سه گروه توزیع‌های زیر طبقه‌بندی می‌شوند. (فیشر و تیپ پت، ۱۹۲۸)

گروه اول: به ازای $\xi = 0$، خانواده گامبل[27]، با توزیع:

$$F(x) = \exp(-\exp(-x)) x \in R, \quad -\infty < x < \infty \qquad (۴)$$

گروه دوم: به ازای $\xi > 0$، خانواده فرشه[28]، با توزیع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; otherwise \\ \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) & , \; x > -\frac{1}{\xi} \end{cases} \qquad (۵)$$

گروه سوم: به ازای $\xi < 0$، خانواده ویبول[29]، با توزیع:

$$F(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) & , \; x < -\frac{1}{\xi} \\ 1 & , \; otherwise \end{cases} \qquad (۶)$$

تابع چگالی توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته با مشتق‌گیری از تابع توزیع آن به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$f(x) = \begin{cases} (1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}-1} \exp(-1(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}} & \xi \ne 0 \\ \exp(-x - \exp(-x)) & \xi = 0 \end{cases} \qquad (۷)$$

این تابع اگر $\xi > 0$ برای $x < -1/\xi$ و اگر $\xi > 0$ برای $x > -1/\xi$ تعریف می‌شود(McNeil, Frey, & Embrechts, 2015).

برای برآورد پارامترها، چون برای هر نمونه فقط یک ماکسیمم وجود دارد، بنابراین پارامترهای توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته را نمی‌توان تنها با استفاده از یک نمونه برآورد کرد. یکی از ایده‌هایی که برای رفع این مشکل مطرح‌شده افراز نمونه به زیر نمونه‌هایی[30] با اندازه‌ی برابر و سپس به‌کارگیری نظریه ارزش حدی بر ماکسیمم این زیر نمونه‌ها است (McNeil et al., 2015).

با توجه به فرض استقلال داده‌ها، تابع ماکسیمم درستنمایی، زیر نمونه‌ها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$l\left(r_n, 1, ..., r_{n,g} \,|\, \xi_n, \sigma_n, \mu_n\right) = \prod_{i=1}^{g} f(r_{n,i}) \qquad (۸)$$

با در نظر گرفتن رویکرد بالا، با روش بهینه‌سازی مقدارهای σ_n , μ_n , ξ_n به نحوی تعین می‌شوند تا مقدار تابع بالا ماکسیمم شود(Fisher & Tippett, 1928).

۳-۳-۲- رویکرد فراتر از آستانه[۳۱] یا توزیع تعمیم‌یافته پرتو[۳۲]

در اینجا به بخش دوم ادبیات مقادیر حدی می‌پردازیم. این بخش با کاربرد تئوری مقادیر حدی برای توزیع زیان‌های فراتر از یک آستانه سروکار دارد. رویکردی که برای مطالعه زیان‌های فراتر از آستانه به کار می‌گیریم، فراتر از آستانه یا توزیع تعمیم‌یافته پارتو هست که بر اساس قضیه مقدار حدی، تعمیم‌یافته است و نسبت به رویکردهای مقادیر حدی به پارامترهای کمتری نیاز دارد. همان‌گونه که تئوری مقدار حدی تعمیم‌یافته یک راه‌حل طبیعی برای مدل‌سازی حداکثرها و حداقل‌ها است، رویکرد فراتر از آستانه نیز روشی طبیعی برای مدل‌سازی تخطی‌ها از یک آستانه بزرگ هست. به‌عبارتی‌دیگر ما تنها به دنبال مشاهدات حداکثر یا حداقل نیستیم بلکه تخطی مشاهدات حدی از یک آستانه بزرگ نیز جالب‌توجه است. یک‌راه استخراج مقادیر حدی از یک نمونه مشاهدات این است که تخطی‌ها از یک آستانه بزرگ را به‌عنوان مقادیر حدی در نظر بگیریم(Balkema & De Haan, 1974). اگر نمونه مشاهدات را با $X_1, X_2, ..., X_n$ و تابع توزیع آن را با F(x) و مقدار آستانه را با u نشان دهیم، F(u) را به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$F(u) = Pr\{X_i \le u\} \qquad (۹)$$

تخطی زمانی اتفاق می‌افتد که برای هر $i = 1, 2, ..., n$ داشته باشیم:

$$X_i > u \qquad (۱۰)$$

بر این اساس، مقدار اضافی فراتر از آستانه را نیز به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم:

$$y_i = X_i - u \qquad (۱۱)$$

و برای احتمالات $X_i \le y_i + u$ خواهیم داشت:

$$Pr\{X_i \le y_i + u\} = F(y_i + u) \qquad (۱۲)$$

به‌این‌ترتیب توزیع احتمال مقادیر اضافی فراتر از آستانه u را به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم.

$$F_u(y) = Pr\{X_i - u \le y_i | X_i > u\} \qquad (۱۳)$$

که $F_u(y)$ نمایانگر احتمال تخطی X حداکثر به‌اندازه y از آستانه u هست، البته مشروط بر اینکه X از u فراتر رفته باشد. این احتمال مشروط را می‌توان به‌صورت ذیل نوشت:

$$F_u(y) = \frac{Pr\{X_i - u \le y_i , X_i > u\}}{Pr(X > u} \qquad (۱۴)$$

$$F_u(y) = \frac{F(y_i + u) - F(u)}{1 - F(u)} \qquad (۱۵)$$

ازآنجایی‌که $F_u(y)$ احتمال مشروط بر تخطی از آستانه است، y_i تنها برای مقادیر بزرگ‌تر از صفر تعریف می‌شود و بدین ترتیب هر زمان که y_i مقدار می‌گیرد، تخطی روی‌داده است. می‌دانیم که برای هر $X > u$ داریم: $X = y + u$ بنابراین توزیع احتمال متغیر X را می‌توان به‌صورت ذیل نوشت:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \qquad (۱۶)$$

باید توجه داشت که رابطه فوق تنها برای $X > u$، صادق است.

الکما[۳۳]، دی‌هان[۳۴] (۱۹۷۴) و پیکاندس[۳۵] (۱۹۷۵) طی قضیه‌ای نشان دادند که برای «u» هایی که به‌اندازه کافی بزرگ هستند، تابع توزیع مقادیر فراتر از آستانه را می‌توان با توزیع تعمیم‌یافته پارتو تقریب زد چراکه با بزرگ شدن آستانه، توزیع مقادیر فراتر از آستانه $F_u(y)$ به توزیع تعمیم‌یافته پارتو نزدیک می‌شود. توزیع تعمیم‌یافته پارتو را به‌صورت ذیل تعریف می‌کنیم: (Zhao, Cheng, & Zhang, 2020)

(۱۷)

$$G_{\xi,\mu,\sigma}(x_{\max})=\begin{cases}1-\left[1+\xi\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-1/\xi_{\max}} & if \quad \xi\neq 0\\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right] & if \quad \xi=0\end{cases}$$

$$with$$

$$x\in\begin{cases}[\mu_{\max},\infty] & if\ \xi\geq 0\\ \left[\mu_{\max},\dfrac{\mu_{\max}-\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi<0\end{cases}$$

که $\xi_{\max}$ پارامتر شکل دنباله است، $\mu_{\max}$ پارامتر مکان و $\sigma_{\max}$ پارامتر مقیاس هست.

اهمیت قضیه بالکما، دی‌هان و پیکاندس در این است که می‌توان توزیع مقادیر فراتر از آستانه را با انتخاب یک شاخص دنباله و یک آستانه بزرگ از طریق توزیع تعمیم‌یافته پارتو تخمین زد.

در روابط (۱۷)، $x_{\max}$ همان مقادیر فراتر از آستانه یا X های بزرگ‌تر از u هست و $\mu_{\max}$ نیز معادل آستانه یا همان u است؛ بنابراین رابطه (۱۷) را می‌توان به‌صورت ذیل بازنویسی کرد:

(۱۸)

$$F(x)\begin{cases}1-\left[1+\xi\left(\dfrac{x-u}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-1/\xi_{\max}} & if \quad \xi\neq 0\\ 1-\exp\left[-\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma_{\max}}\right)\right] & if \quad \xi=0\end{cases}$$

$$with$$

$$x\in\begin{cases}[u,\infty] & if\ \xi\geq 0\\ \left[u,\dfrac{u-\sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi<0\end{cases}$$

برای تخمین پارامترها باید یک مقدار منطقی برای آستانه u انتخاب نماییم. این آستانه تعیین‌کننده تعداد مشاهدات فراتر از آستانه یعنی nu است. باید توجه داشت که پارامتر مکان یعنی $\mu_{\max}$ همان آستانه ما است و با انتخاب u مشکل انتخاب این پارامتر مرتفع می‌گردد. مقدار آستانه با استفاده از نمودار تابع میانگین فزونی و نمودار هیل محاسبه می‌گردد. در ادامه کار باید پارامترهای $\xi_{\max}$ و $\sigma_{\max}$ را نیز برآورد نماییم. این پارامترها را می‌توان با استفاده از روش حداکثر درست نمایی، روش رگرسیون و یا دیگر روش‌های مناسب تخمین زد. روش حداکثر درستنمایی نسبت به دیگر روش‌ها از قابلیت اتکای بیشتری برخوردار است(Zhao et al., 2020).

همان‌گونه که می‌دانیم برای استفاده از این روش، ابتدا باید تابع احتمال[۳۶] و یا لگاریتم احتمال[۳۷] را بنا کنیم. بدیهی است تابع احتمال از روی تابع چگالی احتمال حاصل می‌شود. تابع چگالی احتمال توزیع GPD برابر است با:

(۱۹)

$$g_{\max}(G;x_{\max})=\left(\frac{1}{\sigma_{\max}}\right)\left[1+\xi_{\max}\left(\frac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]^{-\left(\frac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)}$$

بدین ترتیب تابع لگاریتم احتمال نیز به‌صورت ذیل خواهد بود:

(۲۰)

$$\ln L_h=\begin{cases}if\ \xi\neq 0\\ -n_u\ln\sigma_{\max}-\left(\dfrac{1+\xi_{\max}}{\xi_{\max}}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n_u}\left[1+\xi_{\max}\left(\dfrac{x_{\max}-\mu_{\max}}{\sigma_{\max}}\right)\right]\\ if\ \xi=0\\ -n\ln\sigma_{\max}-\left(\dfrac{1}{\sigma_{\max}}\right)\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_{\max}-\mu_{\max})\end{cases}$$

برای تخمین پارامترها کافی است که تابع لگاریتم احتمال GPD را با توجه به محدودیت زیر حداکثر نماییم:

(۲۱)

$$x \in \begin{cases} \left[\mu_{\max}, \infty\right] & if\ \xi \geq 0 \\ \left[\mu_{\max}, \dfrac{\mu_{\max} - \sigma_{\max}}{\xi_{\max}}\right] & if\ \xi < 0 \end{cases}$$

اگر $-0.5 < \xi$ برآورد کننده‌های حاصل از روش حداکثر درستنمایی مجانباً نرمال بوده و بنابراین از خصوصیت نسبتاً مناسبی برخوردار هستند(Bollerslev, 1986).

۳-۳-۳- محاسبه ارزش در معرض ریسک

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه با استفاده از رویکرد سنتی نظریه ارزش حدی، ارزش در معرض ریسک محاسبه می‌شود. در این روش در ابتدا سه پارامتر توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم برآورد می‌شوند و سپس ارزش در معرض ریسک به دست می‌آید. فرض کنید که تعداد T بازده از دارایی موردنظر را به‌عنوان نمونه داریم. این نمونه را به g زیر نمونه n تایی افراز می‌کنیم، درصورتی‌که $T \neq ng$، زیر نمونه انتهایی را کوچک‌تر در نظر می‌گیریم. سپس ماکسیمم هر زیر نمونه را تعیین کرده و مجموعه ماکسیمم‌های حاصل را به‌عنوان نمونه برای برآورد پارامترهای ξ_n , μ_n , σ_n با استفاده از روش درستنمایی ماکسیمم به کار می‌گیریم.

با در نظر گرفتن $X = (r - \mu_n)/\sigma_n$ و قرار دادن آن در تابع توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته چندک این توزیع در سطح اطمینان موردنظر، به دست آورده می‌شود. فرض کنید که P^* مقدار خطا و r_n^* چندک $(1-P^*)$ام ماکسیمم زیر نمونه تحت توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته باشد، با جایگذاری X در تابع توزیع ارزش حدی تعمیم‌یافته داریم:

(۲۲)

$$1-P^* = \begin{cases} \exp\left(-\left[1+\dfrac{\xi_n(r_n^*-\mu_n)}{\sigma_n}\right]^{\frac{-1}{\xi_n}}\right) & , \quad \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\dfrac{r_n^*-\mu_n}{\sigma_n}\right)\right) & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

دقت کنید که اگر

$$1+\xi_n(r_{n,i}-\mu_n)/\sigma_n > 0 \quad , \quad \xi \neq 0$$

با گرفتن لگاریتم از رابطه بالا داریم:

(۲۳)

$$ln\ (1-P^*) = \begin{cases} -\left[1+\dfrac{\xi_n(r_n^*-\mu_n)}{\sigma_n}\right]^{\frac{-1}{\xi_n}} & , \quad \xi \neq 0 \\ -\exp\left(-\dfrac{r_n^*-\mu_n}{\sigma_n}\right) & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

که بعد از ساده کردن آن r_n^* به‌صورت زیر به دست می‌آید:

(۲۴)

$$r_n^* = \begin{cases} \mu_n - \dfrac{\sigma_n}{\xi_n}\left\{1-\left[-ln(1-P^*)\right]^{-\xi_n}\right\} & , \quad \xi \neq 0 \\ \mu_n - \sigma_n\ ln\left[-ln(1-P^*)\right] & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

که r_n^* در رابطه‌ی بالا همان ارزش در معرض ریسک ماکسیمم زیر نمونه در سطح اطمینان $(1-p^*)$ درصد است.

ارزش در معرض ریسک بازده لگاریتمی دارایی مالی (r_t) در سطح اطمینان $(1-P)$ درصد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۲۵)

$$VaR = \begin{cases} \mu_n - \dfrac{\sigma_n}{\xi_n}\left\{1-\left[-n\ ln\ (1-P^*)\right]^{-\xi_n}\right\} & , \quad \xi \neq 0 \\ \mu_n - \sigma_n\ ln\left[-n\ ln\ (1-P^*)\right] & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

۳-۳-۴- محاسبه ارزش در معرض خطر شرطی CoVAR

اگرچه ارزش در معـرض خطـر (VaR) خـط اول دفاع در برابر ریسک‌های مالی را فراهم مـی‌نمایـد، امـا تمـامی آن‌هـا را برطـرف نمـی‌کنـد و کامـل نیسـت. استفاده‌کنندگان می‌بایست به محـدودیت‌هـای سـنجه VaR واقف باشند. یـک محـدودیت مهـم سـنجه VaR این است که تنها در صورت تخطی، در مورد بیشـترین زیان سخن می‌گوید. مثلاً به ما می‌گوید در ۹۵٪ موارد زیان‌ها از مقدار در معرض خطر بیشتر نمی‌شود؛ اما در مورد رخداد تخطر، انتظار داریم میزان زیـان بیشـتر از VaR شود و این در حالی است که در مورد زیـان‌هـای فراتر از مقدارش چیزی برای گفتن ندارد. ناکامی ارزش در معرض خطر در احتساب چنین زیـان‌هـایی مسـائل قابل ملاحظه‌ای را پدیـد مـی‌آورد. بـه‌عنـوان‌مثـال، دو موقعیت که دارای VaR یکسانی هستند ممکـن اسـت به علت‌هایی که بیان گردیـد در معـرض ریسـک‌هـای بسیار متفاوتی باشند؛ بنابراین ارزش در معـرض خطـر باوجود مقبولیتی که در میان فعالان ریسک پیـداکرده است، به دلیل عدم برخورداری از ویژگی انسجام، یـک سنجه تمام‌عیار نیست. بدین ترتیب می‌بایست علاوه بر VaR سنجه‌های دیگری را نیـز بـرای بـرآورد ریسـک، ماننـد ارزش در معـرض ریسـک شـرطی (CoVaR) را مدنظر قرار دهیم. ظهور تطابق یافته CoVaR بر اساس مواردی است که سدونو (۲۰۱۶) تعریـف کـرده اسـت. ایـن نویســنده دو تمهیــد کلیــدی را بــرای تخمــین خطرپذیری سیستماتیک یک شرکت ارائه داده‌اند. هـر یک از این تمهیدات جنبه متفاوتی از یک خطرپـذیری سیستماتیک موسسه‌ای مالی را ارائه می‌دهد. CoVaR یک موسسه مالی، تنها زیان‌های واردشـده در سیسـتم مـالی، در یـک رویـداد بحرانـی را تخمـین مـی‌زنـد (Sedunov, 2016).

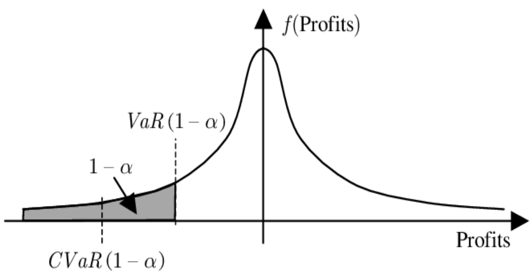
از معیار CoVAR بـرای پاسـخگویی بـه سـؤالات زیـر استفاده می‌شود:

- حداقل زیان تحقق‌یافته درα درصد بـدترین مـوارد روی‌داده، چه میزان است؟

این سـؤال در اکثـر محافـل مـدیریت ریسـک مطرح می‌شود .از آنجائی کـه در ارزش در معـرض ریسک، آستانه پایین زیان‌های محتمل درα درصـد موارد مدنظر قرار می‌گیرد، ایـن معیـار، زیـان‌هـای فراتر از آستانه تعیین‌شده را نادیده می‌گیرد .حـال سؤال زیر جایگزین سؤال فوق می‌شود.

- زیان مورد انتظار در درصد بـدترین مـوارد بـه چـه میزان است؟

سؤال فوق به دو دلیل قابل‌توجه است .اولاً، این سؤال یک سؤال طبیعی اسـت کـه بـدون شـک بـا مشاهده نمونه‌ای از بدترین اتفاقات به ذهن می‌رسد و ثانیاً، این سـؤال حرکتـی اسـت بـه‌سـوی تعریـف معیارهای جمع‌پذیر (نمودار ۱)



نمودار (۱) توزیع VAR و COVAR (Shahiki Tash et al., 2013).

اگر معادلـه توزیـع پرتفـوی پیوسـته باشـد، مـی‌تـوان به‌آسانی توسـط ارزش مـورد انتظـار شـرطی کمتـر از چارک و یا" دنباله مورد انتظار شرطی "به سـؤال فـوق پاسخ داد.

(۲۶)

$$TCE^{(x)}(X) = -E\left\{X \,\middle|\, X \le x^{(\alpha)}\right\}$$

معادله فوق برای بسیاری از توزیع‌های عمـومی، سـؤال اخیر را پوشش نمی‌دهد، چراکه احتمال $\{\ X \le x^{(\alpha)}\ \}$ بزرگ‌تـر ازα درصـد و درنهایـت بـزرگ‌تـر از مجموعـه بدترین حوادث در نظر گرفته‌شده خواهد بـود" .دنبالـه مورد انتظار شرطی "تنها در محدوده توزیع‌های پیوسته

معیار اندازه‌گیری ریسک است و در توزیع‌های گسسته احتمالاً از قانون جمع‌پذیری تبعیت نخواهد کرد.

برای تعیین آنکه کدام معادله سؤال اخیر را پوشش می‌دهد، n مشاهده را به‌صورت $X_{1:n} \le \ldots\ldots \le X_{n:n}$ مرتب کرده و α درصد مشاهدات با استفاده از $\omega=[n\alpha]$ $=\max\{ m|\ m \le n\alpha,\ m \in n \}$ تعیین‌شده است. درنهایت مجموعه درصد بدترین موارد به‌صورت $\{X_{1:n} \le \ldots\ldots \le X_{\omega:n}\}$ نتیجه شده است.

(۲۷)

$$x_n^{(\alpha)}(x) = X_{\omega:n}$$

درنهایت" ارزش در معرض ریسک شرطی "در α درصد بدترین حوادث به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

(۲۸)

$$\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} X_{i:n}}{\omega}$$
$$= -\text{ (Average of least } \alpha\% \text{ outcomes } X_i)$$

نتیجه حاصله" ارزش در معرض ریسک شرطی "با احتمال α درصد خوانده می‌شود. در ادامه می‌توان اثبات کرد که $\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}$ به ازای تمامی n های یکسان، جمع‌پذیر است.

دو متغیر X و Y را در نظر بگیرید .برای هر یک از این متغیرها n مشاهده وجود دارد.

(۲۹)

$$\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}(X+Y) = -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} X_{i:n}}{\omega}$$
$$= -\frac{\sum_{i}^{\omega}(X_{i:n}+Y_{i:n})}{\omega}$$
$$= \mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}(X) + \mathrm{ES}_n^{(\alpha)}(\mathrm{Y})$$

می‌توان معادله ($\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}$) را به‌صورت زیر توسعه داد:

(۳۰)

$$\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)} = -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} x_{i:n}}{\omega} = -\frac{\sum_{i=1}^{\omega} x_{i:n} 1_{\{i\le\omega\}}}{\omega}$$
$$= -\frac{1}{\omega}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_{i:n} 1_{\{x_{i:n}\le x_{\omega:n}\}} - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_{i:n}\big(1_{\{x_{i:n}\le x_{\omega:n}\}} - 1_{\{i\le\omega\}}\big)\Big)$$
$$= -\frac{1}{\omega}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i 1_{\{x_i\le x_{\omega:n}\}} - x_{\omega:n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_{i:n}\le x_{\omega:n}\}} - 1_{\{i\le\omega\}}\Big)$$
$$= -\frac{n}{\omega}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i 1_{\{x_i\le x_{\omega:n}\}} - x_{\omega:n}\big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{x_i\le x_{\omega:n}\}} - \frac{\omega}{n}\big)\Big)$$

اگر با احتمال یک داشته باشیم، $\lim_{n\to\infty} X_{\omega:n} = x^{(\alpha)}$ معادله (۱۹) می‌توان نتیجه گرفت:

(۳۱)

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\Big(E\big[X 1_{\{X\le x^{(\alpha)}\}}\big]$$
$$- x^{(\alpha)}\big(p\big[X \le x^{(\alpha)}\big] - \alpha\big)\Big)$$

معادله اخیر معادله‌ای جایگزین برای برآورد چارکی است که قبلاً به آن اشاره شد (Acerbi & Tasche, 2002).

درنهایت می‌توان" ارزش در معرض ریسک شرطی "در α درصد را به‌صورت زیر تعریف کرد:

(۳۲)

$$\mathrm{co\,var}_n^{(\alpha)}(X) = -\frac{1}{\alpha}\Big(E\big[X 1_{\{X\le x^{(\alpha)}\}}\big]$$
$$- x^{(\alpha)}\big(p\big[X \le x^{(\alpha)}\big] - \alpha\big)\Big)$$

در معادله فوق، X نشان‌دهنده سود و یا زیان پرتفوی در افق زمانی T و $\alpha=A\%\ (0,1)$ است. معادله فوق‌الذکر معیاری برای اندازه‌گیری ریسک است که تمامی شروط انسجام را پوشش می‌دهد. معادله اخیر با حداکثر تعداد در نظر گرفته‌شده برای n، بیان ریاضی سؤالی است که قبلاً مطرح شد .سادگی معادله" ارزش در معرض ریسک شرطی "تنها زمانی فهمیده می‌شود که تعریف آن به‌عنوان ترکیب زیان‌ها را در نظر نگیرید .

در این صورت‌نمایشی معادل برای معادلـه (۳۲) خلـق می‌شود کـه بـه و تـابع توزیـع $F_{(x)}=P[X \le x]$ وابسـته است .با معرفی معادله معکـوس بـرای تـابع توزیـع کـه به‌صورت زیر بیان می‌شود به α‌راحتی می‌تـوان" ارزش در معرض ریسک شرطی "را به‌صورت میـانگین منفـی $F^{\leftarrow}(P)$ بـرای سـطح اطمینـان $P=(0,\alpha]$ بیـان کرد(Sedunov, 2016).

$$F^{\leftarrow}(P)=\inf\{x|F(x)\ge p\rangle\} \qquad (۳۳)$$

$$co\,var^{(\alpha)}=-\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F^{\leftarrow}(p)dp \qquad (۳۴)$$

معادله اخیر بنیـادی‌تـرین فرمـول بـرای محاسـبه "ارزش در معرض ریسک شرطی" است. قابلیت توضیح دهندگی، این معادله را برای انجام پژوهش در خصوص ویژگـی‌هـای تحلیلـی" ارزش در معـرض ریسـک شرطی"مناسب (Acerbi & Tasche, 2002). پیوستگی درα که" ارزش در معرض ریسک شرطی "را از" دنباله مورد انتظار شرطی "متمایز می‌سـازد، در معادلـه (۳۴) قابل‌مشاهده است، درحالی‌کـه در معادلـه (۳۲) بـه آن اشاره‌ای نشده بود. در آخر می‌تـوان" ارزش در معـرض ریسک شرطی"را به‌صورت زیر بیان کرد:

(۳۵)

$$co\,var^{(\alpha)}=TCE^{(\alpha)}+(\lambda-1)(TCE^{(\alpha)}-VAR^{(\alpha)})$$

در معادله فـوق $\lambda \equiv P\left[X \le x^{(\alpha)}\right]/\alpha \ge 1$: اسـت. معادلـه (۳۵) کـه بـه‌آسـانی بـا ضـرب‌در $P\left[X \le x^{(\alpha)}\right]$ و تقسیم‌بر کـردن در معادلـه (۳۴) اسـتخراج مـی‌شـود، اجازه می‌دهد تا ثابت کنـیم کـه: (Acerbi & Tasche, 2002)

$$co\,var^{(\alpha)} \ge TCE^{(\alpha)} \qquad (۳۶)$$

۳-۴- پس آزمایی مدل‌ها

برای پس آزمایی مدل‌هـای ارزش در معـرض خطـر از یک فرایند دومرحله‌ای استفاده‌شـده اسـت. در مرحلـه اول از آزمون‌های پوشش غیرشرطی کوپیک، اسـتقلال و پوشش شرطی کریستوفرسن، استفاده‌شده اسـت. در مرحله دوم برای مقایسه عملکرد مدل‌ها بـا یکـدیگر از رویکرد توابع زیان شامل دومین تابع زیان لـوپز و تـابع زیان بلانکو وایهـل اسـتفاده‌شـده اسـت. در اینجـا بـه تشریح هرکدام می‌پردازیم.

۳-۴-۱- آزمون کوپیک

یکی از راه‌های ارزیابی توانایی پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک، شمارش دفعاتی است کـه مقـدار زیـان واقعـی از مقـدار زیـان پـیش‌بینـی‌شـده توسـط مـدل بزرگ‌تر باشد. اگر ارزش در معرض خطرهای روزانـه را مستقل فرض کنیم، مقایسه نتایج واقعی سـود و زیـان روزانه شـده بـاارزش در معـرض ریسـک، یـک توزیـع دوجمله‌ای خواهد شد. اگر زیان واقعی از زیـان بـرآورد شده توسط مدل بیشتر باشد، این رویداد یک شکسـت تلقی می‌شود و اگر کوچک‌تر شـود، ایـن رویـداد یـک موفقیت به شمار می‌آید. بـرای نشـان دادن موفقیـت و شکست از $I_t(\alpha)$ استفاده می‌شود که α ضـریب پوشـش ارزش در معرض خطر است.

(۳۷)

$$I_t(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad r_t \prec -\%VaR_{t|t-1}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

کـــه r_t بـــازده مشـــاهده‌شـــده در دوره t اســـت و $\%VaR_{t|t-1}$ ارزش در معرض خطر درصـدی دوره t مشروط بر اطلاعات موجود تا زمان t-1 اسـت. فرضـیه صفر به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{t-1}^{T} I_t(\alpha)=Bin(T,\alpha) \qquad (۳۸)$$

یعنی تعداد تخطی‌ها از مقـدار ارزش در معـرض خطـر (تعداد شکسـت‌هـا) دارای توزیـع دوجملـه‌ای اسـت. T تعداد نمونه و α نرخ پوشش است.

فرضیه آماری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

H_0: مجموع تخطی‌ها دارای توزیع دوجمله‌ای است.

H_1: مجموع تخطی‌ها دارای توزیع دوجمله‌ای نیست.

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1 : \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases} \qquad (۳۹)$$

کـه در آن، $\hat{\alpha}$ نسـبت تعـداد تخطـی‌هـا بـه‌کـل پیش‌بینی‌ها یـا نسبت شکست است. کوپیـک بـرای بررسی فرضیه ارائه‌شده، آزمـون نسـبت شکسـت‌هـا را پیشنهاد می‌کنـد. نسـبت درسـتنمایی کوپیـک (LR) دارای توزیع کای دو با یک درجه آزادی اسـت و آمـاره آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LR_{PF} = 2Ln\left[\frac{\hat{\alpha}^{T_1}(1-\hat{\alpha})^{T-T_1}}{\alpha^{T_1}(1-\alpha)^{T-T_1}}\right] \qquad (۴۰)$$

LR_{PF}: نسبت احتمال شکست

T: تعداد کل پیش‌بینی‌ها

T_1: تعداد شکست‌ها

درصورتی‌که نسبت احتمال شکست بزرگ‌تـر از توزیـع کای دو با یـک درجـه آزادی و سـطح خطـای αباشـد، فرض صفر رد می‌شود و نمی‌تـوان پـذیرفت کـه مـدل ارزش در معرض خطر را به‌درستی برآورد کـرده اسـت. اگر فرضیه صفر رد شود و $\hat{\alpha} \succ \alpha$ باشـد، مـدل ارزش در معرض خطر را دست بالا و اگر $\hat{\alpha} \prec \alpha$ باشد، دست پایین برآورد کرده است.

۳-۴-۲- آزمون کریستوفرسن[۳۸]

با توجه به وجود پویـایی‌هـای واریـانس در مـدل‌هـای ارزش در معرض خطر، انتظـار مـی‌رود کـه در صـورت ایجاد یک تخطی از مقدار ارزش در معرض خطر، مدل بتواند از تخطی‌های متوالی بعدی جلوگیری نمایـد. بـه همین دلیل آزمون مدل از حیث دقـت مشـروط[۳۹] بـر مستقل بودن تخطی‌های متوالی حائز اهمیت است. در این راستا نسبت احتمال پوشش شرطی[۴۰] (LR_{CC}) از جانب کریستوفرسن (۱۹۹۸)، به‌عنـوان آزمـونی بـرای سطح پوشـش شـرطی[۴۱] پیشـنهاد شـد. دلیـل اصـلی معرفی چنـین آزمـونی ایـن بـود کـه نسـبت احتمـال شکست (LR_{PF}) وجود وابستگی‌های زمانی را نادیده مـی‌گرفـت. آزمـون نسـبت احتمـال پوشـش شـرطی، ترکیبـی از آزمـون پوشـش غیرشـرطی[۴۲] و اسـتقلال زنجیره‌ای[۴۳] است.

$$LR_{CC} = LR_{UC} + LR_{ind} \qquad (۴۱)$$

آماره آزمون پوشش شرطی را می‌توان بـه طریـق زیـر محاسبه نمود:

$$LR_{CC} = 2Ln\left[\frac{L(\hat{\Pi})}{L(\Pi_{\hat{\alpha}})}\right] \sim \chi^2(2) \qquad (۴۲)$$

از ویژگی‌های آزمون پوشش شـرطی، در نظـر گـرفتن شرط کـافی بـرای بررسـی دقت مـدل‌هـای ارزش در معرض خطر است. همچنـین اسـتفاده از آن در جهـت تعیین اعتبار مدل‌ها آسان اسـت. درصـورتی‌که مـدل ارزش در معـرض خطـر، هـر یـک از شـرایط پوشـش غیرشرطی و استقلال را تأمین ننماید، جزء مـدل‌هـای غیر معتبر طبقه‌بندی می‌شود. فرض پوشش شرطی در جهت تعیین دقت مدل ارزش در معرض خطـر نسـبت به پوشش غیرشرطی و استقلال قوی‌تـر اسـت، چراکـه شامل هر دو می‌شود. برای آزمون پوشش شرطی فرض صفر به‌صورت ذیل بیان می‌گردد.

$$I_t(\alpha) \overset{iid}{\sim} Bernoulli(\alpha) \qquad (۴۳)$$

این فرضـیه گویـای ایـن اسـت کـه هـر تخطـی زیـان مشاهده‌شده از زیان پیش‌بینـی‌شـده توسـط ارزش در معرض خطر، دارای توزیع برنولی بـا احتمـال شکسـت α است. همچنین این توزیع‌ها به‌صـورت مسـتقل از هم می‌باشـند؛ بنـابراین آزمـون ایـن فرضـیه دارای دو قسمت است. یک قسمت به آزمون پوشش غیرشـرطی مربوط می‌شود که مطابقت تخطی‌های مشاهده‌شـده را با توزیع برنولی می‌سنجد و قسمت بعدی مستقل بودن این توزیع‌ها را مورد آزمون قرار می‌دهد.

۴- تابع زیان لوپز و تابع زیان بلانکو وایهل

برای اینکه رتبه‌بندی مدل‌ها را اجرا کنیم باید از بین توابع زیان متفاوتی که وجود دارد، تابع زیان را مشخص کنیم. یکی از پرکاربردترین توابع زیان، دومین تابع زیان لوپز است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

(۴۴)

$$C_t \begin{cases} 1+(L_t - VaR_t)^2 & \text{if } L_t > \mathrm{VaR}_t \\ 0 & \text{if } L_t \le \mathrm{VaR}_t \end{cases}$$

این رابطه امکان احتساب اندازه زیان‌های موجود در دنباله را فراهم می‌سازد و به مدلی که زیان‌های دنباله آن بالاتر است، مقدار بیشتری می دهد، لذا هر مدلی که میانگین زیان‌های دنباله آن‌که از رابطه زیر محاسبه می‌شود بیشتر باشد، عملکرد ضعیف‌تری داشته است.

$$QPS = \frac{2}{T}\sum C_t \qquad (۴۵)$$

یکی از ایرادات این مدل آن است که به دلیل آنکه هیچ تعبیر خاصی برای مجذور زیان‌های بالاتر از VaR وجود ندارد، درک شهودی ما را دچار ابهام می‌سازد. برای رفع این مشکل بلانکو- ایهل تابع زیان زیر را پیشنهاد کردند:

(۴۶)

$$C_t \begin{cases} (L_t - VaR_t)/VaR_t & \text{if } L_t > \mathrm{VaR}_t \\ 0 & \text{if } L_t \le \mathrm{VaR}_t \end{cases}$$

درک شهودی این تابع زیان، آسان‌تر است و ما را مطمئن می‌سازد که زیان‌های بزرگ‌تر دنباله‌ی C_t بزرگ‌تری می گیرد. در این حالت معیار مقایسه نیز به‌صورت زیر خواهد بود:

$$P_t = \frac{ES_t - VaR_t}{VaR_t} \qquad (۴۷)$$

تابع نمره برای مدل بلانکو - ایهل به‌صورت زیر خواهد بود:

$$QPS = \frac{2}{T}\sum (C_t - P_t)^2 \qquad (۴۸)$$

نتایج حاصل از این تابع زیان نشان‌دهنده عملکرد مدل‌ها خواهد بود و هرچقدر که مقدار تابع زیان برای مدلی بالاتر باشد، نشان‌دهنده عملکرد ضعیف آن مدل است. همچنین برای رتبه‌بندی مدل‌های ارزش در معرض خطر شرطی نیز از توابع زیان شامل میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها (RMSE)به‌منظور انتخاب مدل برتر ارزش در معرض خطر شرطی، استفاده خواهیم کرد. هرچقدر که مقدار این خطا کمتر باشد طبیعتاً مدل عملکرد بهتری داشته است.

(۴۹)

$$RMSE = \sqrt{\frac{2}{T}\sum (C_t - ES_t)^2}$$

$$MAE = \frac{2}{T}\sum |C_t - ES_t|$$

۵- یافته‌های پژوهش

آمار توصیفی در ابتدا مقدار بازده برای متغیرها شاخص کل، شاخص آزاد شناور شاخص ۵۰ شرکت فعال‌تر در دو دوره ماهانه (۲۱ روزه) و فصلی (۶۳ روزه) محاسبه گردید. مقدار بازده با استفاده از فرمول زیر محاسبه‌شده است.

$$R_i = \frac{R_{i+t} - R_i}{R_i} \qquad (۵۰)$$

که t در اینجا دوره موردنظر و R_i مقدار شاخص در روز i ام است. تحلیل توصیفی این داده‌ها در جدول شماره (۲) شامل تعداد مینیمم، ماکسیمم، میانه، میانگین و چارک اول و سوم به تفکیک آورده شده است.

جدول ۲- اطلاعات آمار توصیفی بازده شاخص‌های منتخب (منبع: داده‌های تحقیق)

ردیف	بازه بازده‌ها	نام سری	تعداد	min	چارک اول	میانه	میانگین	چارک سوم	max
1	بازه ۲۱ روزه	$R\text{-}TEPIX_t$	۱۹۱۲	-12/41	-1/91	2/06	3/59	7/56	46/62
۲		R-TEFIXt	۱۹۱۲	-12/54	-2/30	1/73	3/59	7/91	44/52
۳		R-Ir50t	۱۹۱۲	-14/39	-2/29	1/46	3/13	7/21	43/05
۴	بازه ۶۳ روزه	$R\text{-}TEPIX_t$	۱۸۷۳	-17/59	-2/12	4/57	10/79	23/19	76/02
۵		R-TEFIXt	۱۸۷۳	-17/60	-2/61	4/54	10/73	23/27	80/97
۶		R-Ir50t	۱۸۷۳	-18/21	-2/68	4/03	10/06	20/02	81/53

برای اینکه بدانیم آیا این داده‌ها از توزیع نرمال پیروی می‌کنند یا خیر از آزمون نرمالیتی کولموگروف اسمیرنوف استفاده کردیم (جدول ۳). نتایج چولگی و کشیدگی و همچنین آماره آزمون نرمالیتی کولموگروف اسمیرنوف نشان داد هیچ‌یک ازسری‌های زمانی موردمطالعه از توزیع نرمال پیروی نمی‌کند. لذا در این مطالعه قبل از انجام هرگونه فرایندی اقدام به نرمال و استاندارد کردن داده‌ها نمودیم. همچنین آزمون دیکی فولر تعمیم‌یافته[۴۴] را برای ارزیابی مانایی سری زمانی شاخص کل انجام دادیم که نتایج آن در جدول (۳) ارائه‌شده است.

آزمون دیکی فولر تعمیم‌یافته، یکی از سودمندترین آزمون‌ها در زمینه مانایی (سکون) است. فرض کنید سری y_t بر اساس ساده‌ترین شکل خود، یک مدل خود رگرسیونی از درجه اول است؛ یعنی درزمانی که $yt=\alpha y_{t-1}+\epsilon_t$ چنانچه $|\alpha|\langle 1$ باشد، سری ماناست.

در این آزمون فرض صفر دلیل بر نا مانایی است و حالت مطلوب زمانی اتفاق می‌افتد که فرض صفر رد شود. همان طور که نتایج جدول ۳ و ۴ نشان می دهد در تمام سری های زمانی مقادیر آماره آزمون از مقدار بحرانی در هر سه سطح بحرانی بزرگ تر بوده و مقدار p-value به‌دست‌آمده برای هر سری نیز کمتر از ۵ درصد هست؛ بنابراین با توجه به ارزش p-value، فرض صفر مبنی بر نامانا بودن سری‌ها رد شده و فرض یک مبنی بر مانا بودن سری‌ها پذیرفته می‌گردد.

برای برآورد VaR و CoVaR نیاز است پارامترهای مکان، شکل و مقیاس مورداستفاده در برآورد را از طریق توزیع فریشه و توزیع پارتو تعمیم‌یافته محاسبه کرد. پس از برازش دادن این داده‌ها روی دو توزیع مذکور پارامترهای موردنظر به همراه خطای استاندارد برآورد شده و جدول (۵ و ۴) ارائه‌شده است.

جدول ۳- نتیجه آزمون کولموگروف اسمیرنوف و دیکی فولر تعمیم‌یافته شاخص‌های منتخب (منبع: داده‌های تحقیق)

ردیف	بازه بازده‌ها	نام سری	دیکی فولر تعمیم‌یافته: آماره آزمون	دیکی فولر تعمیم‌یافته: P-value	کولموگروف اسمیرنوف: آماره آزمون	کولموگروف اسمیرنوف: P-value
1	بازه ۲۱ روزه	$R\text{-}TEPIX_t$	-۵/۵۶	۰/۰۱	۰/۴۸	۰۰۰
۲		R-TEFIXt	-۵/۰۶	۰/۰۱	۰/۴۶	۰۰۰
۳		R-Ir50t	-۵/۶۸	۰/۰۱	۰/۴۵	۰۰۰
۴	بازه ۶۳ روزه	$R\text{-}TEPIX_t$	-۴/۵۵	۰/۰۱	۰/۵۷	۰۰۰
۵		R-TEFIXt	-۴/۵۱	۰/۰۱	۰/۵۸	۰۰۰
۶		R-Ir50t	-۴/۹۴	۰/۰۱	۰/۵۴	۰۰۰

جدول ۳- مقادیر بحرانی آزمون دیکی فولر تعمیم‌یافته (منبع: داده‌های تحقیق)

مقدار بحرانی در سطح ۱٪	مقدار بحرانی در سطح ۵٪	مقدار بحرانی در سطح ۱۰٪
-۳/432666	-۲/862449	-۲/567299

جدول ۴- مقادیر پارامترهای برآورد شده از طریق توزیع فریشه (منبع: داده‌های تحقیق)

بازه بازده‌ها	نام سری	مقدار پارامترها با استفاده از توزیع فریشه		
		σ(SD)	μ(SD)	ξ (SD)
بازه ۲۱ روزه	R-TEPIX$_t$	۵/۸۱ (۰/۱)	۰/۰۴ (۰/۱۴)	۰/۰۲ (۰/۰۱)
	R-TEFIXt	۶/۲۰ (۰/۱۱)	-۰/۰۲ (۰/۱۶)	۰/۰۳ (۰/۰۱)
	R-Ir50t	۶/۱۹ (۰/۱۱)	-۰/۰۴ (۰/۱۵)	۰/۰۲ (۰/۰۱)
بازه ۶۳ روزه	R-TEPIX$_t$	۱۲/۱۶ (۰/۲۵)	۲/۱۷ (۰/۳۲)	۰/۱۲ (۰/۰۲)
	R-TEFIXt	۱۲/۴۷ (۰/۲۶)	۱/۷۲ (۰/۳۳)	۰/۱۳ (۰/۰۲)
	R-Ir50t	۱۲/۶۲ (۰/۲۵)	۱/۴۸ (۰/۳۳)	۰/۰۹ (۰/۰۲)

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار تخمین نقطه‌ای پارامتر شکل دنباله برای سه شاخص موردمطالعه و برای دو بازه زمانی در تمام مقادیر مثبت است. علاوه بر این مقدار پارامتر شکل دنباله در بازه زمانی دوم بیشتر از بازه زمانی اول است. ازآنجایی که در توزیع‌های با دنباله پهن، شاخص دنباله مثبت است و طبق نتایج ارائه‌شده در جدول (۴) مشاهده می‌شود پارامتر شکل برای تمامی داده‌ها در توزیع مقدار حدی تعمیم یافته مثبت بوده و این بدان معنی است که طبق رابطه (۵) داده‌ها از توزیع فریشه تبعیت می‌کنند و شاخص‌های موردمطالعه دارای دم‌پهن هستند.

در ادامه باید پارامترها را از برای استفاده در توزیع پارتو تعمیم‌یافته از طریق رویکرد فراتر از آستانه برآورد کرد. رویکرد فراتر از آستانه روشی بدیهی برای مدل‌سازی تخطی‌ها از یک آستانه بزرگ است. به عبارتی صرف‌نظر از مشاهدات حداکثر و یا حداقل، تخطی مشاهدات فرین از یک آستانه بزرگ نیز جالب‌توجه است. اولین و مهم‌ترین گام برای به‌کارگیری این روش، انتخاب آستانه (threshold) یا همان پارامتر مکان (μ) است و N_u تعداد داده‌های بیشتر از حد آستانه می‌باشند که این مقدار با استفاده از نمودار تابع میانگین فزونی و نمودار هیل محاسبه شد که در جدول (۵) ارائه‌شده است. تابع میانگین فزونی کمک مؤثری در انتخاب آستانه می‌نماید. اگر این تابع بر اساس تغییرات آستانه ترسیم شود، بهتر است آستانه جایی انتخاب شود که تابع میانگین فزونی پس‌ازآن، خطی راست با شیبی مثبت باشد. هیل روشی برای تخمین شاخص دم ارائه کرد که برای کل تابع توزیع، یک‌شکل پارامتری فرض نمی‌کند و تنها روی رفتار دم متمرکز می‌شود. از تخمین گر هیل برای تخمین شاخص دم α وقتی‌که دم بالایی (با ضرب نمونه در ۱- و بعد اقدامی مشابه با قبل برای دم پایینی) توزیع به شکل $1\text{-}F(x)=Cx^{-\alpha}$ استفاده می‌شود اگر $X1 \geq X2 \geq \ldots \geq XN$ از داده‌هایی با توزیع F استخراج شوند، آنگاه تخمین گر هیل، تخمینی از α به‌صورت تابعی از k تا از بزرگ‌ترین اعداد مجموعه داده‌ها به دست می‌دهد. درواقع اگر توزیع موردنظر دقیقاً پارتو باشد، آنگاه تخمین گر هیل به‌راحتی می‌تواند به‌صورت یک تخمین بیشترین احتمال ساخته شود. نمودار تابع میانگین فزونی[۴۵] و نمودار هیل[۴۶] به‌دست‌آمده از داده‌های تحقیق در پاورقی ارائه‌شده است. تابع میانگین فزونی کمک مؤثری در انتخاب آستانه می‌نماید. اگر این تابع بر اساس تغییرات آستانه ترسیم شود، بهتر است آستانه جایی انتخاب شود که تابع میانگین فزونی پس‌ازآن، خطی راست با شیبی مثبت باشد.

جدول ۵- مقادیر پارامترهای برآورد شده از طریق توزیع پارتو تعمیم‌یافته (منبع: داده‌های تحقیق)

بازه بازده‌ها	نام سری	مقدار پارامترها با استفاده از توزیع پارتو تعمیم‌یافته		
		σ(SD)	(threshold)μ(N_u)	ξ (SD)
بازه ۲۱ روزه	R-TEPIX$_t$	۴/۱۲ (۰/۶)	۱۸/۳۵ (۹۶)	۰/۰۸ (۰/۱)
	R-TEFIXt	۴/۷۴ (۰/۷۵)	۱۹/۲۹ (۹۷)	۰/۰۶ (۰/۱۲)
	R-Ir50t	۵/۰۴ (۰/۶۹)	۱۹/۲۶ (۹۶)	-۰/۰۴ (۰/۰۹)
بازه ۶۳ روزه	R-TEPIX$_t$	۱۶/۷۹ (۳)	۴۲/۳۲ (۹۴)	-۰/۴۲ (۰/۱۵)
	R-TEFIXt	۲۰/۸۰ (۳/۰۳)	۴۲/۰۶ (۹۴)	-۰/۴۸ (۰/۱۱)
	R-Ir50t	۱۴/۰۸ (۲/۲۴)	۴۴/۵۹ (۹۴)	-۰/۲۵ (۰/۱۲)

در جدول ۶ مقادیر ماکسیمم درستنمایی، اطلاعات آکاییک و آزمون‌های مرتبط با مقایسه مدل‌ها آورده شده است. در علم آمار برآورد حداکثر درستنمایی روشی است برای برآورد کردن پارامترهای یک مدل آماری. وقتی بر مجموعه‌ای از داده‌ها عملیات انجام می‌شود یک مدل آماری به دست می‌آید آنگاه حداکثر درستنمایی می تواند تخمینی از پارامترهای مدل ارائه دهد. با توجه به تعریف هرچه مقدار ماکسیمم درستنمایی بیشتر باشد مدل مناسب تری خواهیم داشت و برعکس مقدار اطلاعات آکاییک معیاری برای سنجش نیکویی برازش است. این معیار بر اساس مفهوم آنتروپی بناشده است و نشان می دهد که استفاده از یک مدل آماری به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، این معیار تعادلی میان دقت مدل و پیچیدگی آن برقرار می کند. این معیار توسط هیروتسوگو آکائیکه برای انتخاب بهترین مدل آماری پیشنهاد شد. با توجه به داده‌ها، چند مدل رقیب ممکن است با توجه به مقدار AIC رتبه بندی شوند و مدل دارای کمترین AIC بهترین است؛ که از فرمول زیر محاسبه می‌شود و هرچه کمتر باشد مدل از ارزش بیشتری برخوردار است.

به‌صورت کلی AIC را این‌گونه می‌نویسیم:

$$AIC = 2K - 2ln(l) \qquad (۵۱)$$

وقتی که K تعداد پارامترها در مدل آماری و L ماکزیمم تابع در درستنمایی مدل برآورده است. بین چند مدل انتخابی برای داده ها، آماری ارجاع است که کمترین مقدار AIC را داشته باشد.

جدول ۶- اطلاعات مربوط به مقایسه توزیع فریشه و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (منبع: داده‌های تحقیق)

ردیف	بازه بازده‌ها	نام سری	توزیع فریشه		توزیع پارتو تعمیم‌یافته	
			AIC	ماکسیمم درستنمایی	AIC	ماکسیمم درستنمایی
1	بازه ۲۱ روزه	R-TEPIX$_t$	53/-11	27/6416	96/-4	۲۴۰/۵۱
۲		R-TEFIXt	57/-11	40/6551	07/-5	۲۵۳/۸۸
۳		R-Ir50t	56/-11	839/6530	02/-5	۲۴۷/۴۰
۴	بازه ۶۳ روزه	R-TEPIX$_t$	91/-11	50/7770	52/-5	82/318
۵		R-TEFIXt	93/-11	02/8731	61/-5	61/333
۶		R-Ir50t	92/-11	30/7810	52/-5	59/318

با توجه به مقادیر جدول ۶ درمی‌یابیم که مقدار ماکسیمم درستنمایی برای توزیع فریشه در هر دو دوره ماهانه و فصلی بیشتر از توزیع پارتوی تعمیم یافته است و همچنین مقدار AIC توزیع فریشه از توزیع پارتوی تعمیم‌یافته کمتر است. طبق معیار آکائیک و معیار ماکسیمم درستنمایی توزیع فریشه توزیع مناسب‌تری برای برآورد VaR و CoVaR شاخص‌های تحت مطالعه است و به‌نوعی طبق معیار آکائیک و

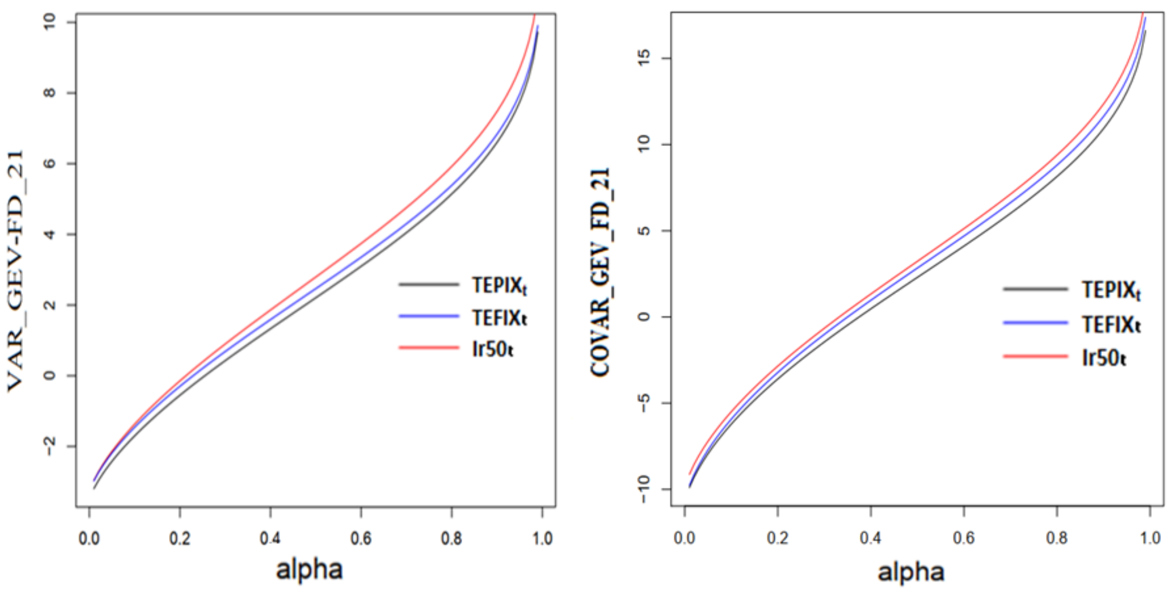
معیار ماکسیمم درستنمایی فرضیات تحقیق در این مرحله پذیرفته خواهند شد. در ادامه به برآورد مقدار ارزش در معرض ریسک (VaR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) از طریق توزیع فریشه و توزیع پارتو تعمیم‌یافته می‌پردازیم. این مقادیر در جدول (۷) در دو سطح اطمینان ۹۵٪ و ۹۹٪ محاسبه‌شده‌اند.

همچنین مقادیر VAR و CoVAR در بازه ۲۱ روزه در سطوح مختلف آلفا در نمودارهای (۲ و ۳) نشان داده‌شده است.

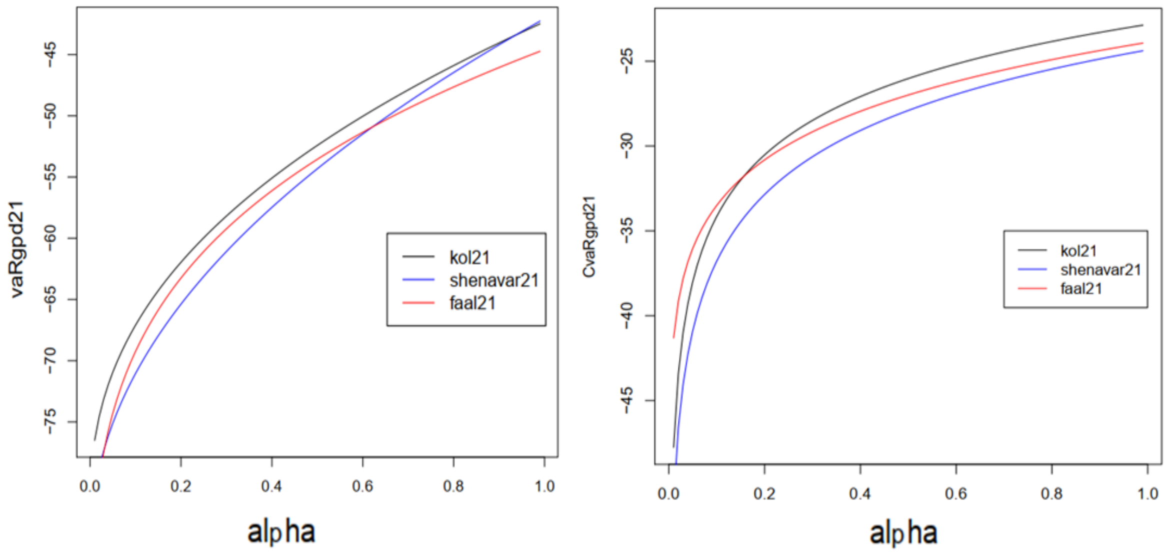
همان‌طور که انتظار می‌رود در تمامی سطوح مقدار ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) همواره بزرگ‌تر از مقدار ارزش در معرض ریسک (VaR) است. این به این معنی است که CoVaR سنجه مناسب‌تری برای برآورد ریسک شاخص‌های تحت مطالعه است. در جدول شماره ۸ و ۹ مقادیر معنی‌داری (p-value) آزمون‌های کوپیک و کریستوفرسن و مقادیر تابع زیان‌های لوپزو بلانکو-ایهل و در سطح ۹۵ و ۹۹ درصد ارائه‌شده است.

۷ – محاسبه مقادیر VAR و COVAR با توزیع فریشه و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (منبع: داده‌های تحقیق)

بازه بازده‌ها	نام سری	توزیع پارتو تعمیم‌یافته				توزیع فریشه			
		سطح ۹۵٪		سطح ۹۹٪		سطح ۹۵٪		سطح ۹۹٪	
		VAR	CoVAR	VAR	CoVAR	VAR	CoVAR	VAR	CoVAR
بازه ۲۱ روزه	R-TEPIX$_t$	18.06	23.05	18.39	22.87	17.81	24.19	28.03	34.55
	R-TEFIXt	19.53	24.59	19.33	24.38	17.81	24.45	28.42	35.32
	R-Ir50t	19.51	24.12	19.31	23.93	18.54	25.33	29.42	36.36
بازه ۶۳ روزه	R-TEPIX$_t$	43.17	54.74	42.48	54.26	45.56	65.56	76.82	100.89
	R-TEFIXt	43.11	56.82	42.26	56.25	46.92	68.30	80.23	106.36
	R-Ir50t	45.30	56.42	44.73	55.96	44.45	62.81	73.39	94.43



نمودار ۲– *VaR* و *CoVaR* برآوردی ۲۱ روزه با توزیع فریشه (منبع: داده‌های تحقیق)



نمودار ۳- *VaR* و *CoVaR* برآوردی ۲۱ روزه با توزیع پارتو تعمیم‌یافته (منبع: داده‌های تحقیق)

جدول ۸- مقدار آزمون‌های کوپیک، کریستوفرسن، لوپز و بلانکو-ایهل در بازه ۲۱ روزه (منبع: داده‌های تحقیق)

توزیع	سنجه‌ها	VaR21 -R-TEPIX$_t$		VaR21 -R-TEFIXt		VaR21 -R-Ir50t	
		(۰,۹۹)	(۰,۹۵)	(۰,۹۹)	(۰,۹۵)	(۰,۹۹)	(۰,۹۵)
پارتوی تعمیم‌یافته	Kupiec(p-value)	۰,۰۰	۰,۲۰	۰,۰۰	۰,۵	۰,۰۲	۰,۰۷
	Christoff(p-value)	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰
	Lopez	۰,۰۰	(۱)۰,۱۶	(۱)۰,۰۱	(۱)۱,۶۲	(۱)۰,۰۰۱	(۱)۰,۰۱
	Blanco& Ihle	۰,۲۸	(٭٭)۰,۱۴	(٭٭)۰,۰۱۲	(٭)۰,۰۰۲	(٭٭)۰,۰۲۷	(٭٭)۰,۱۱
توزیع فریشه	Kupiec(p-value)	۰,۰۰۰۹	۰,۰۷	۰,۰۰	۰,۶	۰,۰۳	۰,۱
	Christoff(p-value)	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰
	Lopez	۷,۸۴	(۲)۰,۳۱	(۲)۶,۴۶	(۲)۰,۰۳	(۲)۷,۶۶	(۲)۰,۳۱
	Blanco& Ihle	۰,۰۰۲	(٭)۰,۰۰۶	(٭)۰,۰۰۵	(٭٭)۰,۰۱۲	(٭) ۰,۰۰	(٭)۰,۰۰۹

جدول ۹- مقدار آزمون‌های کوپیک، کریستوفرسن، لوپز و بلانکو-ایهل برای بازه ۶۳ روزه (منبع: داده‌های تحقیق)

توزیع	سنجه‌ها	VaR63 -R-TEPIX$_t$		VaR63 -R-TEFIXt		VaR63 -R-Ir50t	
		(۰,۹۹)	(۰,۹۵)	(۰,۹۹)	(۰,۹۵)	(۰,۹۹)	(۰,۹۵)
پارتوی تعمیم‌یافته	Kupiec(p-value)	۰,۰۰	۰,۴۰	۰,۰۰	۰,۱۷	۰,۰۰	۰,۷۸
	Christoff(p-value)	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰
	Lopez	۰,۰۰	(۱)۰,۰۴	(۱)۰,۰۱	(۲)۰,۰۰۷	۰,۰۰	(۱)۰,۱۶
	Blanco& Ihle	۰,۰۰	(٭٭)۰,۰۰۱	(٭٭)۰,۶۴	(٭) ۰,۰۰	۰,۰۰۶	(٭٭)۰,۲۲
توزیع فریشه	Kupiec(p-value)	۰,۰۰	۰,۵۲	۰,۰۰	۰,۵	۰,۰۰	۰,۷
	Christoff(p-value)	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰	۰,۰۰
	Lopez	۹,۳۶	(۲)۱,۰۰	(۲)۸,۹۶	(۱)۰,۰۰۲	۸,۰۱	(۲)۱,۴۳
	Blanco& Ihle	۰,۰۰۳	(٭) ۰,۰۰	(٭) ۰,۰۰۶	(٭٭)۰,۲۲	۰,۵۵	(٭) ۰,۰۰۶

نتـایج خلاصـه‌شـده در جـداول (۸ و ۹) نشـان می‌دهد مقدار احتمـال آمـاره کوپیـک بـرای محاسـبه ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینـان ۹۹ درصـد برای همه بازه‌هـای زمـانی ماهانـه (۲۱ روزه) و فصـلی (۶۳ روزه) کمتر از ۵ درصد بوده و در سـطح اطمینـان ۹۵ درصد برای همه بـازه‌هـا بـالاتر از ۵٪ اسـت و لـذا نشان می‌دهد مدل پارتوی تعمیم‌یافته بـرای محاسـبه مقـدار ارزش در معـرض ریسـک VaR 0.99% بـرای هیچ‌کدام از بازده‌ها مناسب نیست امـا بـرای محاسـبه VaR 0.95% این مدل عملکـرد خـوبی داشـته اسـت. همچنین بر اساس نتایج به‌دست‌آمده در جداول ۸ و ۹ مدل توزیع فریشه برای محاسـبه مقـدار VaR 0.95% برای افق زمانی ماهانه (۲۱ روزه) و افـق زمـانی فصـلی (۶۳ روزه) مناسب است اما برای محاسبه مقـدار VaR 0.99% همه بازده‌ها نامناسـب اسـت. بـرخلاف آزمـون کوپیک نتایج حاصـل از آزمـون کریستوفرسـن بـه مـا نشان می‌دهد که هیچ‌کدام از مـدل‌هـا بـرای محاسـبه مقدار ارزش در معرض خطر مناسب نیست. چراکه بـر اسـاس نتـایج جـداول ۸ و ۹ مقـدار احتمـال آزمـون کریستوفرسن در همه بازه‌ها با رویکرد اسـتفاده از هـر دو توزیع موردمطالعه زیر ۵ درصـد بـوده اسـت. دلیـل مغایرت این دو نتیجه در نظر گرفتن اسـتقلال و عـدم استقلال داده‌ها است.

چنان چه دقت یک مدل به لحاظ آماری رد نشود، مدل قابل‌قبول خواهد بـود؛ امـا در بسـیاری از مـوارد چندین مدل در اختیارداریم. در این هنگـام انتخـاب از میان مدل‌های تائید شده به‌عنوان مسئله‌ای پیش روی مدیریت ریسک قـرار مـی گیـرد و لـذا در ایـن هنگـام می توان از آزمون لوپز استفاده نمود. بر ایـن اسـاس در ادامه برای رتبه‌بنـدی عملکـرد سـنجه‌هـای ریسـک از آزمـون لـوپز اسـتفاده‌شـده اسـت. در ایـن آزمـون درصورتی که میزان زیان واقعـی در یـک روز بیشـتر از مقدار پیش‌بینی‌شـده باشـد، بیـانگر حالـت اسـتثنا یـا وضعیت تخطی بوده و برای آن روز مقدار عددی یک و در غیر این صورت مقدار صفر در نظر گرفته مـی‌شـود. نتایج حاصل از پا آزمون لوپز برای شاخص هـای تحـت بررسی در سطح معنی‌داری ۹۰ درصد و ۹۵ درصـد در جدول شماره ۷ و ۸ ارائه‌شده است. رتبه‌بنـدی مقـادیر آماره لوپز نشان می‌دهد در دوره‌های ۲۱ روزه (جـدول ۷) مدل توزیع پارتو تعمیم‌یافته بـرای محاسـبه مقـدار ارزش در معـرض ریسـک در تمـامی مـدل‌هـای پذیرش شده بر اساس آزمون کوپیک، بـر مـدل توزیـع فریشه ارجحیت دارد. به‌طور مشابه این رتبـه‌بنـدی در جدول شماره (۸) بـرای بـازده‌هـای سـهام در دوره ۶۳ روزه نیز مشخص شده است. با توجـه بـه مقـادیر تـابع زیان بلانکو-ایهل نتیجـه مـی گیـریم در دوره‌هـای ۲۱ روزه در همه موارد نتایج برعکس تابع زیان لـوپز بـوده اسـت. در دوره‌هـای ۶۳ روزه نیـز تمـامی رتبـه‌بنـدی مدل‌ها دقیقاً عکس نتایج رتبه‌بندی با تـابع زیـان لـوپز است. چنانچه برای آزمون فرضیه اول تا سوم در سطح ۹۵٪ مقادیر آماره لوپز را در نظر بگیریم فرضـیه اول و سوم رد شده و فرضیه دوم پذیرفته خواهـد شـد و اگـر مقـادیر تـابع زیـان بلانکـو-ایهـل را مـلاک آزمـون فرضیه‌های مـوردنظر قـرار دهـیم فرضـیه اول و سـوم پذیرفته‌شـده و فرضـیه دوم رد خواهـد شـد. (* دارای رتبه یک و ** دارای رتبه دو است).

جهت رتبه‌بندی مدل‌های CoVAR برای بررسـی فرضیه چهارم تا ششم از توابع زیان شامل میانگین قدر مطلـق خطاهـا (MAE) و مجـذور میـانگین مربعـات انحراف‌ها (RMSE) استفاده شد. نتایج ایـن آزمـون‌هـا برای دوره‌هـای ۲۱ و ۶۳ روزه در جـدول شـماره (۱۰) در سطح ۰/۹۵ ارائه‌شده است.

میـانگین قـدر مطلـق خطاهـا (MAE) و مجـذور میـانگین مربعـات انحـراف‌هـا (RMSE)در جـدول (۹) نشان می‌دهد در تمام شاخص‌های تحـت مطالعـه و در هر دو بازه ۲۱ و ۶۳ روزه مقدار MAE و RMSE بـرای توزیع فریشه کمتر از توزیع پارتو تعمیم‌یافته است. لذا نمی‌توان فرضـیه‌هـای سـوم تـا ششـم را در خصـوص برتری توزیع فریشه در برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی را نسبت به توزیع پارتوی تعمیم‌یافتـه رد کـرد. لذا فرضیه سوم، چهارم و ششم پذیرفته می‌شوند.

جدول ۱۰- (MAE) و (RMSE) برای بازه‌های ۶۳ و ۲۱ روزه در سطح ۹۵ درصد (منبع: داده‌های تحقیق)

توزیع	سنجه‌ها	CoVaR63 –R-TEPIX$_t$		CoVaR63 –R-TEFIXt		CoVaR63 –R-Ir50t	
		۶۳ روزه	۲۱ روزه	۶۳ روزه	۲۱ روزه	۶۳ روزه	۲۱ روزه
پارتوی تعمیم‌یافته	MAE	۷۶/۰۵	۷۶/۰۹	۷۵/۸۹	۷۵/۹۸	۷۳/۴۵	۷۳/۶۰
	RMSE	۹۷/۶۱	۹۶/۹۹	۹۷/۱۰	۹۷/۴۰	۹۶/۶۰	۹۶/۶۱
توزیع فریشه	MAE	۷۵/۹۰	۷۴/۹۵	۷۴/۵۶	۷۴/۵۴	۷۲/۴۴	۷۲/۴۰
	RMSE	۹۷/۲۲	۹۶/۲۳	۹۶/۸۵	۹۷/۳۲	۹۶/۵۰	۹۶/۴۳

۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، ابتدا اطلاعات سری زمانی مربوط به نرخ بازده شاخص کل، شاخص سهام آزاد شناور و شاخص ۵۰ شرکت برتر بورس اوراق بهادار تهران برای یک دوره ۱۰ ساله از تاریخ ۱۳۹۱/۰۱/۰۱ الی ۱۳۹۸/۱۲/۲۹ از بانک های اطلاعاتی سازمان بورس و اوراق بهادار ایران گردآوری شده‌اند، ابتدا آمار توصیفی تفسیر و سپس به برآورد ارزش در معرض ریسک (VaR) و ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) شاخص‌های تحت مطالعه با استفاده از توزیع فریشه (FD) و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD) در چارچوب آمار استنباطی و با استفاده از سنجه‌های ریسک طیفی، انحراف و منسجم پرداختیم. برای سنجش قابل‌قبول بودن مدل‌ها به لحاظ آماری از آزمون‌های پس آزمایی کوپیک و آزمون پوشش شرطی کریستوفرسن استفاده‌شده و برای مقایسه مدل‌ها با یکدیگر از توابع زیان دوم لوپز و بلانکو- ایهل استفاده کرده‌ایم. همچنین برای رتبه‌بندی مدل‌های ارزش در معرض خطر شرطی نیز از دو تابع زیان شامل میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف‌ها (RMSE) استفاده شد. برآورد پارامترهای مکان، مقیاس و شکل توزیع حدی تعمیم‌یافته (GEV) نشان داد پارامتر شکل توزیع در تمام بازه‌های ۲۱ روزه و ۶۳ روزه هر یک از شاخص‌ها مثبت بوده و توزیع شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، توزیع شاخص سهام آزاد شناور و توزیع شاخص ۵۰ شرکت برتر، از توزیع فریشه (FD) به‌عنوان توزیع نوع دوم توزیع حدی تعمیم‌یافته (GEV) تبعیت می‌کند. نتایج آزمون کوپیک نشان داد مدل پارتوی تعمیم‌یافته برای محاسبه VaR در سطح ۹۹٪ مناسب نبوده اما برای محاسبه VaR در سطح ۹۵٪ این مدل عملکرد خوبی دارد. نتایج آزمون کوپیک نیز برای مدل توزیع فریشه در محاسبه VaR مشابه مدل توزیع پارتو تعمیم‌یافته بود. در نظر گرفتن استقلال و عدم استقلال داده‌ها در آزمون کریستو فرسن باعث ارائه نتایجی مخالف با آزمون کوپیک شد. نتایج میانگین قدر مطلق خطاها (MAE) و مجذور میانگین مربعات انحراف ها (RMSE) نشان از برتری توزیع فریشه برای برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی (CoVaR) نسبت توزیع پارتو تعمیم‌یافته دارد. در بررسی مطالعات انجام‌شده، اکثر مطالعات به مقایسه برآورد ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از توزیع مقادیر حدی و سایر روش‌های سنتی پرداخته‌اند. در این مطالعه به مقایسه دو نوع از توزیع مقادیر حدی در محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی پرداخته‌ایم. با مقایسه نتایج این تحقیق با نتایج مطالعات انجام‌شده توسط مظفری و نیکو مرام (۱۳۹۹) که به بررسی کارایی شاخص ارزش در معرض ریسک (VAR) با استفاده از نظریه ارزش فرین در مقایسه با روش‌های سنتی ارزیابی ریسک پرداختند، مشخص گردید نتایج با مطالعات آن‌ها مطابقت دارد. همچنین با نتایج به‌دست‌آمده در این مطالعه با نتایج مطالعات کاشی و همکاران (۱۳۹۶) که ارزش در معرض ریسک (VAR) و ریزش مورد انتظار (ES) در بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه مقدار حدی با رویکرد ماکسیمم بلاک ها و توزیع پارتو تعمیم‌یافته (GPD)برآورد کردند، مطابقت داشت. همچنین در مقایسه با نتایج مطالعه فلاح شمس و

سینا (۱۳۹۸) باید اشاره کرد رویکرد مطالعه آن‌ها بیشتر بر بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از توزیع مقادیر حدی بوده و مطالعه حاضر با رویکرد استفاده از توزیع مقادیر حدی و توزیع پارتو تعمیم‌یافته در رتبه‌بندی توزیع‌های مورداستفاده در برآورد ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی هست. در راستای خروجی حاصل از این مطالعه پیشنهاد می‌شود:

- پرتفوی های مختلفی از سهام موجود در بورس تهران تشکیل شود و عملکرد مدل‌های ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض خطر شرطی در پیش‌بینی ریسک این پرتفوی‌ها بررسی گردد.
- پیشنهاد می شود که عملکرد سایر رویکردهای ارزش در معرض خطر و ارزش در معرض ریسک شرطی مانند رویکردهای نا پارامتریک و نیمه پارامتریک در جهت پیش‌بینی ریسک سهام موجود در سایر شاخص‌های بورس تهران بررسی گردد.
- ازآنجایی‌که داده‌های فرین تعیین‌شده دارای وزن یکسانی بودند، پیشنهاد می شود که به داده های فرین با استفاده از روش های متداول وزن دهی، وزن داده شود و سپس نتایج محاسبه ارزش در معرض ریسک با استفاده از داده‌های وزن داده‌شده با سایر روش‌ها مقایسه شود.

فهرست منابع

* پویان‌فر، احمد؛ و موسوی، سید حمید. (۱۳۹۵). "تخمین ارزش در معرض ریسک داده‌های درون‌روزی به وسیله ترکیب نظریه ارزش فرین و کاپیولا". *فصلنامه مدلسازی ریسک و مهندسی مالی*، ۱(۲)، ۱۲۹-۱۴۴.
* رهنمای رود پشتی؛ فریدون، قندهاری ؛ شراره. (۱۳۹۴) . "برآورد ارزش در معرض خطر مبتنی بر محدودیت بر ارزیابی عملکرد مدیریت پرتفوی فعال در بورس اوراق بهادار تهران "، *فصلنامه علمی پژوهش مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۶(۲۴). ۹۱-۱۱۴.
* زمانی؛ شیوا، اسلامی بیدگلی؛ سعید، کاظمی؛ معین. (۱۳۹۲). " محاسبه ارزش در معرض ریسک شاخص بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از نظریه ارزش فرین" .*بورس اوراق بهادار*، ۶(۲۱). ۱۱۵- ۱۳۶.
* سارنج؛ علیرضا، نوراحمدی؛ مرضیه. (۱۳۹۶). رتبه بندی آماری مدل های مختلف ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار با استفاده از رویکرد مجموعه اطمینان مدل (MCS) برای صنعت بانکداری: با تأکید بر رویکرد ارزش فرین شرطی .*مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۰). ۱۳۱- ۱۴۶.
* سینا؛ افسانه، فلاح شمس؛ میرفیض. (۱۳۹۸). "بهینه سازی سبد سرمایه گذاری با رویکرد نظریه ارزش فرین در بورس اوراق بهادار تهران". *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۱۰(۴۰). ۱۸۴-۲۰۰.
* فلاح پور؛ سعید، راعی؛ رضا، میرزامحمدی؛ سعید, هاشمی نژاد؛ سیدمحمد. (۱۳۹۶). "سنجش ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از ترکیب مدل FIGARCHو نظریه ارزش فرین" .*دانش سرمایه‌گذاری*، ۶(۲۳). ۲۵۹-۲۸۲.
* فلاح پور؛ سعید، رضوانی؛ فاطمه، رحیمی؛ محمدرضا. (۱۳۹۴). "برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی (CVaR) با استفاده از مدلهای ناهمسانی واریانس شرطی متقارن و نامتقارن در بازار طلا و نفت". *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*، ۸(۲۶). ۱-۱۸.
* کاشی، منصور، حسینی، سیدحسن، قلیلو، محمدموسی، گلکاریان آرانی، سعید. (۱۳۹۶). " محاسبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار بر اساس نظریه مقدار حدی: شواهدی از

بورس اوراق بهادار تهران". *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۲)، ۲۶۹-۲۹۴.

* لطفعلی پور؛ محمدرضا، نصرتی؛ مهدیه، قدیری مقدم؛ ابوالفضل، فیلسرایی, مهدی. (۱۳۹۶). "اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک شرطی پرتفوی با روش FIGARCH-EVT در بورس اوراق بهادار تهران". *مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار*، ۸(۳۱). ۲۸۱-۲۹۵.
* مظفری؛ مهردخت، نیکومرام؛ هاشم. (۱۳۹۹)." بررسی کارایی شاخص ارزش در معرض ریسک (VAR)با استفاده از نظریه ارزش فرین در مقایسه با روش های سنتی ارزیابی ریسک" .*دانش مالی تحلیل اوراق بهادار*،۱۳(۴۶). ۱۷۹-۱۹۱.
* محمدی؛ شاپور، راعی؛ رضا و فیض آباد؛ رضا. (۱۳۸۷). "محاسبه ارزش در معر طرر پارامتریک با استفاده از مدلهای ناهمسانی واریانس شرطی در بورر اورا بهادار تهران". *فصلنامه علمی پژوهشی تحقیقات مالی*، ۱۰(۲۵).
* Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. *Economic notes, 31*(2), 379-388.
* Bali, T. G., & Weinbaum, D. (2007). A conditional extreme value volatility estimator based on high-frequency returns. *Journal of Economic Dynamics and Control, 31*(2), 361-397.
* Balkema, A. A., & De Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of probability*, 792-804.
* Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics, 31*(3), 307-327.
* Bücher, A., & Segers, J. (2018). Maximum likelihood estimation for the Fréchet distribution based on block maxima extracted from a time series. *Bernoulli, 24*(2), 1427-1462.
* Chavez-Demoulin, V., Embrechts, P., & Sardy, S. (2014). Extreme-quantile tracking for financial time series. *Journal of Econometrics, 181*(1), 44-52.
* Diebold, F. X., Schuermann, T., & Stroughair, J. D. (1998). Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management. In *Decision technologies for computational finance* (pp. 3-12): Springer.
* Diebold, F. X., Schuermann, T., & Stroughair, J. D. (2000). Pitfalls and opportunities in the use of extreme value theory in risk management. *The Journal of Risk Finance, 1*(2), 30-35.
* Echaust, K., & Just, M. (2020). Value at Risk Estimation Using the GARCH-EVT Approach with Optimal Tail Selection. *Mathematics, 8*(1), 114.
* Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928). *Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample.* Paper presented at the Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
* Gilli, M. (2006). An application of extreme value theory for measuring financial risk. *Computational Economics, 27*(2-3), 207-228.
* Jacob, M., Neves, C., & Greetham, D. V. (2020). Extreme Value Theory. In *Forecasting and Assessing Risk of Individual Electricity Peaks* (pp. 39-60): Springer.
* Kratz, M., Lok, Y. H., & McNeil, A. J. (2018). Multinomial VaR backtests: A simple implicit approach to backtesting expected shortfall. *Journal of Banking & Finance, 88*, 393-407.
* Lin, E. M., Sun, E. W., & Yu, M.-T. (2018). Systemic risk, financial markets, and performance of financial institutions. *Annals of Operations Research, 262*(2), 579-603.
* Longin, F. M. (2000). From value at risk to stress testing: The extreme value approach. *Journal of Banking & Finance, 24*(7), 1097-1130.
* Lotfi, S., & Zenios, S. A. (2018). Robust VaR and CVaR optimization under joint ambiguity in distributions, means, and covariances. *European Journal of Operational Research, 269*(2), 556-576.
* Massacci, D. (2017). Tail risk dynamics in stock returns: Links to the macroeconomy and global markets connectedness. *Management Science, 63*(9), 3072-3089.
* McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of empirical finance, 7*(3-4), 271-300.

* McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). *Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition*: Princeton university press.
* Muteba Mwamba, J., & Mhlanga, I. (2013). Extreme conditional value at risk: a coherent scenario for risk management.
* Sedunov, J. (2016). What is the systemic risk exposure of financial institutions? *Journal of Financial Stability, 24*, 71-87.
* Shahiki Tash, M. N., Esmail Ezazi, M., & Bimorgh, L. (2013). Computation Value at Risk in Tehran Stock Market. *Journal of Economic Development Research, 3*(10), 51-70.
* Shahzad, S. J. H., Arreola-Hernandez, J., Bekiros, S., Shahbaz, M., & Kayani, G. M. (2018). A systemic risk analysis of Islamic equity markets using vine copula and delta CoVaR modeling. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money, 56*, 104-127.
* Sivnarain, R. (2018). *The use of risk measures and its applications in portfolio optimization*. University of Pretoria,
* Smith, R., & Goodman, D. (2000). Bayesian risk analysis. Chapter 17 of Extremes and Integrated Risk Management, edited by P. Embrechts. In: Risk Books, London.
* Sun, X., Liu, C., Wang, J., & Li, J. (2020). Assessing the extreme risk spillovers of international commodities on maritime markets: A GARCH-Copula-CoVaR approach. *International Review of Financial Analysis*, 101453.
* Tobias, A., & Brunnermeier, M. K. (2016). CoVaR. *The American Economic Review, 106*(7), 1705.
* Usman, M., Jibran, M. A. Q., Amir-ud-Din, R., & Akhter, W. (2019). Decoupling hypothesis of Islamic stocks: Evidence from copula CoVaR approach. *Borsa Istanbul Review, 19*, S56-S63.
* Zhang, Y., & Nadarajah, S. (2018). A review of backtesting for value at risk. *Communications in Statistics-Theory and methods, 47*(15), 3616-3639.
* Zhao, X., Cheng, W., & Zhang, P. (2020). Extreme tail risk estimation with the generalized Pareto distribution under the peaks-over-threshold framework. *Communications in Statistics-Theory and methods, 49*(4), 827-844.

یادداشت‌ها

1 Value at risk
2 Conditional value at risk
3 Generalized Extreme Value Distribution
4 Frechet Distribution
5 generalized Pareto distribution (GPD)
6 Fisher–Tippett–Gnedenko
7 generalized extreme value distribution
8 extreme value theory
9 generalized Pareto distribution
10 Pickands–Balkema–de Haan
11 Till Guldimann
12 Uryaesev
13 Rokafella
14 generalized autoregressive score model
15- independent
16- Cumulative Distribution Function (CDF)
17- Range
18- Degenerated
۱۹- تابعی تباهیده است که حد تابع توزیع آن در بی نهایت توزیع نباشد
20- Non Degenerated
21- Location Parameter
22- Scale Parameter
۲۳- فرض کنید $X_1 , X_2 ,..., X_m$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان و نامشخص F باشند، که m نشان دهنده تعداد اعضای نمونه است. اگر ماکسیمم $n(n<m)$ مشاهده اول را M_n نشان دهیم و ضرایب ثابت $C_n > 0$ و $d_n \in R$ باشند و یک تابع توزیع ناتباهیده وجود داشته باشد به طوری که:

$$\frac{M_n - d_n}{C_n} \xrightarrow{d} H$$

آن‌گاه H از توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) , \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) , \xi = 0 \end{cases}$$

$$H_{\xi}(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\xi x)^{-\frac{1}{\xi}}) , \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) , \xi = 0 \end{cases}$$

24- Fisher, Tippett, Gnedenko
25- Shape Parameter
26- Generalized Extreme Value Distribution
27- Gumbel
28- Frechet
29- Weibull
30- Subsamples
31- Peak Over Threshold Approach
32- Generalized Pareto Distribution (GPD)
33- Balkema
34- de Hann
35- Pickands
36- Likelihood Function
37- Log-likelihood Function
38- Christoffersen
39- Conditional Accuracy
40- Conditional Coverage Likelihood Ratio
41- Conditional Coverage Level
42- Unconditional Coverage
43- Serial Independence
44 Augmented Dickey-Fuller test statistic