



رویکردی نوین جهت چیدمان منابع در شرایط نا مشخص بودن توالی پدیده ها

دکتر محمد تقی تقوی فرد*

حمید رضا دهنار صیدی**

چکیده

در این مقاله رویکردی نوین جهت مرتب کردن زمانی منابع و نیز کاربردهای آن ارائه می شود. اگر توالی پدیده ها معین و قابل کنترل نباشد، مبحث ترتیب گذاری و زمانبندی به تصمیم گیری در شرایط تناقض و حالت عدم اطمینان کامل گره می خورد، که در اینجا برای نخستین بار در مدل های زمانبندی و توالی عملیات طرح گردیده است. مدل هایی که در این شرایط ایجاد می شوند، مدل های محتاطانه نامیده شده و روش کلی حل آنها و نیز برای چیدمان ثابت منابع یک برنامه زمانی کلی بنابر معیار بدینانه برای انواع مسائل ارائه شده است. در این مقاله، الگوریتم پاد ایکرز X برای تعیین چیدمان یکسان پدیده ها در محیط $n \times m$ با هدف بیشینه سازی F_{max} ارائه می گردد. سپس پیچیدگی حل مدل های محتاطانه بررسی و مثالی کاربردی از مدل های محتاطانه مطرح و از طریق برنامه زمانی ارائه شده و به کمک الگوریتم پاد ایکرز X، حل و سپس حل آن توسط روش کلی نیز بررسی می شود. در انتها روایی و پایایی الگوریتم پاد ایکرز X مورد آزمون قرار گرفته و نتیجه گیری می گردد که: مسائل مربوطه از طریق نظریه بازی باید حل شوند و شیوه پیشنهادی قادر است، این مسائل « شدیداً سخت غیر خطی » را بطور صحیح و در مدت زمان مناسب حل نماید.

واژگان کلیدی :

چیدمان منابع، توالی پدیده ها، زمانبندی، ماکسیمین، نظریه بازی، روش ترسیمی ایکرز.

* استادیار، عضو هیات علمی تمام وقت دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب (Dr_taghavifard@yahoo.com)

تهران- میدان امام حسین- خیابان مازندران- جنب پل چوبی- دانشکده صنایع دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران جنوب

** دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران (hamidrezaseydi@yahoo.com)

تهران- بزرگراه اشرفی اصفهانی- به سمت حصارک- دانشکده مدیریت و اقتصاد دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

نویسنده مسئول یا طرف مکاتبه: حمیدرضا دهنار صیدی

مقدمه

در مبحث زمانبندی و توالی عملیات^۱، پدیده‌ها برای پردازش توسط منابع به گونه‌ای مرتب می‌شوند، که یک تابع هدف خاص - که به آن معیار عملکرد یا سنجش^۲ نیز گفته می‌شود - بهینه شده و یا به مقدار بهینه نزدیک گردد. در این دانش هر چیزی (مانند قطعات، مواد، مشتری، ارباب رجوع و ...) که بر روی آن کاری باید انجام شود، پدیده^۳ نامیده شده و منبع^۴ (مثل: ماشین آلات، کارمند خدماتی، بخش، کامپیوتر و ...) نیز عاملی است، که پدیده را مورد پردازش قرار می‌دهد. در اغلب کتابها از واژه ماشین به جای منبع استفاده می‌شود، که در واقع، آن نیز خود زیر مجموعه منبع است و اهمیت و کاربرد توالی عملیات و زمانبندی را در برنامه ریزی تولید در سطح کارگاه مشخص می‌سازد.

از زمان ارائه‌ی نمودار گانت^۵ در سال ۱۹۱۸ میلادی تا به حال مدل‌های زمانبندی فراوانی ایجاد شده‌اند. نمودار گانت یک ابزار تصویری برای نشان دادن زمان‌های شروع و پایان هر فعالیت است. در هر مدل زمانبندی، تعداد منابع و پدیده‌ها، الگوی حرکت پدیده‌ها در سیستم و معیار عملکرد، مهمترین ویژگی‌های آن مدل هستند. علاوه بر این، هر مدل ممکن است، مقید به چندین فرض یا محدودیت باشد. در این حوزه از دانش، رشته‌های مختلف علوم دخیل بوده و در واقع، مبحث توالی و زمانبندی به نوعی این رشته‌ها را به هم مرتبط ساخته است، اما با وجود ارائه‌ی مدل‌های زمانبندی متعدد، بکارگیری این مدلها در عمل نسبتاً محدود بوده است. (MacCarthy & Wilson, 2001, 67) که این امر ناشی از سه دلیل می‌تواند باشد:

۱ - عدم شناخت کافی برنامه‌ریزان از دانش توالی و زمانبندی

۲ - عدم نیاز سازمان‌ها به برنامه‌ریزی زمانی بهتر یا محسوس نبودن نتایج استفاده از مدل‌های زمانبندی

۳ - پیچیدگی شرایط و محدودیت‌های عملی و عدم کارایی و انطباق اکثر مدل‌ها با آن شرایط و یا زمان‌بر بودن بیش از حد حل بسیاری از مسائل توالی و زمانبندی، که با افزایش ابعاد مسأله، زمان حل آنها به صورت فوق چند جمله‌ای رشد می‌کند.

اعضای انجمن ریاضی آمریکا^۶ عنوان می‌کنند که: «مسائل زمانبندی در مقایسه با همه علوم ریاضی، حوزه محدودتری دارد، با این وجود، حتی حل مسائلی که برای یک مسأله زمانبندی تک ماشینی ایجاد می‌گردند، بطور باور نکردنی دشوار می‌باشند. محققان نه تنها بخاطر هزاران کاربردی که از بکارگیری الگوریتم‌های زمانبندی کارا می‌تواند حاصل شود، بلکه همچنین، بخاطر ایده‌ها و ابزارهایی که از تعامل این موضوع و سایر حوزه‌های دیگر علوم در حال ظهورند، به کشف این حوزه شگفت‌انگیز ادامه می‌دهند» (AMS, 2006, 4). این امر نشان می‌دهد که این حوزه به تحقیق و بررسی زیادی نیاز دارد. اما سؤالی که مطرح می‌گردد، این است که: اگر دلیل دومی که برای عدم بکارگیری مناسب مدل‌های زمانبندی در عمل ذکر شد، در تعداد زیادی از مسائل رخ دهد، چه باید کرد؟

جهت حل مسائل زمانبندی همواره چنین رایج بوده، که توالی پدیده‌ها بر روی منابع (الگوی حرکت پدیده‌ها در سیستم) از قبل به طور مستقل تعیین می‌گردد. در بسیاری از موارد توالی پدیده‌ها بر روی منابع از شرایط الزامی سیستم است. برای مثال، یک قطعه ابتدا باید سوراخ شده، سپس قلاویز کاری گردد و در نهایت به قطعه‌ای دیگر پیچ شود و عکس این ترتیب امکان پذیر نیست. اما، توالی پدیده‌ها بر روی منابع همیشه اجباری نیست و طراح، یک ترتیب اختیاری به تصادف و یا بر اساس شرایطی خاص (هزینه، راحتی و ...) انتخاب می‌کند. در چنین حالاتی می‌توان ترتیب عملیات یک پدیده را تغییر داد. به عنوان نمونه، فرض کنید، شخصی باید از چند نفر امضاء بگیرد، که امضای هیچکدام به دیگری وابسته نیست. در این صورت فرد مذکور می‌تواند به هر ترتیبی از آن چند نفر امضا بگیرد. در چنین حالاتی،

1. Sequencing and Scheduling

2. Measure of performance (performance metric)

3. Job

4. Resource

5. Gantt Chart by Henry Laurence Gantt

6. American Mathematical Society (AMS)

مطرح نبوده است (دهنار صیدی، ۱۳۸۵، ۱، ۷، ۱۲-۲۵، ۵۷-۵۸، ۹۱، ۹۳ و ۱۰۷).

ترتیب گذاری محتاطانه (دوراندیشانه)

فرض کنید، در یک سیستم یا سازمان، تعیین توالی منابع به عهده برنامه ریز باشد، اما، وی از ترتیب حضور پدیده‌ها بر سر منابع، اطلاعاتی در دست ندارد. یعنی اینکه پدیده‌ها نیز به ترتیب خاصی چیده و یا متوالی شده؛ اما، این صف یا توالی نامعلوم است. یک مثال از این مورد، مراحل ثبت نام دانشگاهی و یا ثبت نام‌های مشابه است. پدیده‌ها که همانا دانشجویان یا متقاضیان هستند، با یک توالی نامعلوم در محل اولین عملیات ثبت نام حاضر می‌گردند. قبل از شروع مراحل ثبت نام نمی‌توان گفت که: چه کسی در صف اولین نفر خواهد بود و یا به عبارت دیگر، معلوم نیست، که چه کسی زودتر از بقیه به محل ثبت نام برسد. البته، به دلیل آنکه تعداد دانشجویان یا متقاضیان معمولاً خیلی زیاد و حل مسائل زمانبندی نیز خیلی وقت گیر است، اطلاع از ترتیب دانشجویان و زمانبندی در حین کار^۳ نیز مناسب نیست. بعلاوه، اگر ثبت نام چند مرحله‌ای باشد، حتی اگر ترتیب پدیده‌ها در محل اولین عملیات معلوم گردد، آنگاه نمی‌توان مطمئن بود، که پدیده‌ها در صف دوم (عملیات دوم) نیز به همان ترتیب صف اول خواهند بود، تا بتوان از زمانبندی در حین کار سود جست. در نتیجه، برنامه ریزی که با چنین شرایطی (نامعلومی و کنترل ناپذیری توالی پدیده‌ها) مواجه می‌شود، منابع را آنچنان بایست بچیند، که بنابر ترتیب‌های مختلف پدیده‌ها نتیجه مطلوبی حاصل گردد. این نتیجه، ممکن است، یک نتیجه آرمانی و ایده آل نباشد، اما، در شرایط نامساعد پیش آمده و یا در نامساعدترین ترتیب احتمالی پدیده‌ها از نظر معیار سنجش عملکرد مسأله، بهترین نتیجه (یا توالی) باشد. در واقع، برای این نوع مدل‌ها یک چیدمان محتاطانه باید در نظر گرفته شود.

این نوع چیدمان‌ها نیاز به تصمیم‌گیری در شرایط تناقض دارند. در این نوع تصمیم‌گیری، با راهبردهای رقیب یا رقبا مواجه هستیم. مهمترین فنی که تصمیم‌گیر در این

که ترتیب منابع برای پدیده‌ها مهم نیست - بخصوص وقتی که برنامه ریز در مورد ترتیب منابع می‌تواند تصمیم بگیرد و نیز ایجاد سیستم پردازشی تولید کارگاهی (از نظر هزینه جابجایی و برگشت به عقب، برنامه ریزی و نظارت یا کنترل و ...) مشکل‌زاست - رویکرد نوینی از دانش ترتیب‌گذاری حاصل می‌گردد، که اصطلاحاً از آن تحت عنوان «چیدمان یا ترتیب‌گذاری منابع» نام می‌بریم. چیدمان زمانی منابع، یک رویکرد و اصطلاح نوینی است، که برای اولین بار توسط محققین این مقاله مطرح شده و لذا، در این زمینه تا بحال کار تحقیقاتی خاصی انجام نشده است (دهنار صیدی، ۱۳۸۵، ۱۲).

لازم به ذکر است، که مبحث چیدمان در طرح ریزی واحدهای صنعتی و طراحی و ایجاد صنایع، معطوف به جانمایی و جایابی تسهیلات بوده، که این عمل بر اساس معیارهای غیر زمانی انجام و هدف آن تعیین نحوه و محل چیدمان تسهیلات است و با موضوع مطروحه در این مقاله متفاوت می‌باشد. شایان ذکر است، که ترتیب‌گذاری منابع معمولاً امکان‌پذیر و در مواردی نیز ضروری است. حتی مواردی وجود دارند، که در آنها ترتیب‌گذاری پدیده‌ها بی‌تأثیر بوده؛ ولی، ترتیب‌گذاری منابع منجر به بهبود معیار عملکرد می‌گردد.

نکته بسیار مهم دیگر آن است، که در مدل‌های موجود ترتیب‌گذاری (چیدمان) پدیده‌ها چنین فرض می‌شده، که ترتیب چیدمان منابع [برای هر پدیده] کاملاً معین است. تنها استثنا مربوط به محیط پردازشی کارگاه آزاد^۱ است، که در آن نیز «تمرکز» بر روی تعیین توالی «پدیده‌ها و عملیات» است و نه منابع. در این تحقیق سعی می‌گردد، مدلی برای تعیین ترتیب منابع برای پدیده‌ها (چیدمان منابع) ارائه گردد، که یک معیار عملکرد را بهینه سازد، بطوریکه ترتیب پدیده‌ها در صف یا ترتیب حرکت آنها به سمت منابع معلوم نبوده و قابل تعیین نیز نیست؛ یعنی: ترتیب‌گذاری پدیده‌ها بر عهده برنامه ریز منابع نمی‌باشد. این حالت، مربوط به «تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان کامل و تناقض»^۲ بوده، که بنابر بررسی‌های صورت گرفته تا بحال در مباحث مدل‌های زمانبندی

1. Open shop

2. Decision making under uncertainty and conflict

3. Online scheduling

شرایط از آن می‌تواند استفاده کند، نظریه بازی^۱ می‌باشد (اسکونزاد، ۱۳۷۸، ۱۳). در نظریه بازی یک سری روش یا معیار برای تصمیم‌گیری وجود دارند، که تصمیم‌گیر با توجه به آنها می‌تواند جواب مطلوب خود را تعیین نماید. مشخص کردن این روش‌ها یا معیارها، تصمیم‌گیری را وارد حالت عدم اطمینان کامل می‌سازد. در حالت عدم اطمینان کامل علاوه بر متغیرهای قابل کنترل، تعدادی متغیر غیر قابل کنترل هم در مسأله وجود دارند، که اطلاعات گذشته نیز به منظور پیش‌بینی متغیرها در دسترس نیست و از این رو محاسبه احتمال وقوع آنها مشکل و معمولاً ناممکن است. لذا نمی‌توان از روش‌های تصمیم‌گیری در حالت مخاطره^۲ سود جست. یکی از روش‌های رایج حالت عدم اطمینان کامل، استفاده از ماتریس تصمیم‌گیری است (همان منبع، ۱۲)؛ اما، تعیین ماتریس تصمیم در اینجا کارا نیست، زیرا راهبردها (کل توالی‌های ممکنه پدیده‌ها) ممکن است، بسیار زیاد باشد و از طرفی - همانطور که قبلاً ذکر گردید - بدلیل تعداد زیاد پدیده‌ها در نهایت نیز فهمیدن چیدمان آنها بسیار مشکل است. بنابراین، معقول است که از معیارهای خوشبینانه (ماکسیماکس)^۳ یا بدبینانه (ماکسیمین)^۴ - که معادل معیار فرصت از دست رفته (مینیمکس) است - و یا احتمال برابر (اصل دلیل ناکافی)^۵ سود جست. استفاده از معیار ماکسیماکس برای شرایطی است، که منافع پدیده‌ها در تعارض با منافع منابع نیست و به بیان دیگر، اطمینان داریم، که پدیده‌ها در وضعیت مطلوبی از نظر معیار زمانی مورد نظر، چیده شده‌اند. از آنجا که از رخداد چنین شرایطی نمی‌توان مطمئن بود؛ لذا، بهتر است، این معیار را کنار بگذاریم. روش اصل دلیل ناکافی معیار خوبی است، اما، به اندازه سایر معیارها متداول نبوده و ضمناً برای بدترین شرایط کار ساز نیست (اگرچه احتمال رخ دادن بدترین توالی پدیده‌ها از نظر معیار مدل و منابع اندک است). اعداد یا درایه‌های جدول (ماتریس) دریافت^۶ می‌توانند منفی، صفر و یا مثبت باشند. در نتیجه، با یک

بازی دو نفره مجموع - صفر^۷ مواجه هستیم، که دو طرف بازی، پدیده‌ها و منابع هستند و با معیار ماکسیمین می‌توان به یک جواب رضایت بخش رسید^۸. اگر معیار عملکرد بر مبنای زمان تکمیل یا فرایند باشد، در ماتریس دریافت، زمان تکمیل عملیات پدیده‌ها به ازای چیدمان‌های مختلف منابع و پدیده‌ها (راهبردهای آنها)، درایه‌های ماتریس دریافت را تشکیل می‌دهند. بهتر است، سطرها تحت کنترل پدیده‌ها باشند و منابع (یا تصمیم‌گیران) نیز ستون‌ها را انتخاب کنند. بدیهی است، حل چنین برنامه ریزی زمانی بسیار سخت‌تر از مسائل تصمیم‌گیری در شرایط اطمینان و حالت مخاطره - که تا بحال مطرح بوده‌اند - است. چنین مدلی را به صورت $n/m/A/B$ نشان می‌دهیم، که نمایانگر مدل تعیین توالی m منبع با چیدمان نوع A بر روی n پدیده با توالی نامعین و هدف بهینه‌سازی معیار عملکرد B است. شایان ذکر است که، ۲ نوع چیدمان منابع (A) می‌توانند وجود داشته باشند: متغیر (V) و ثابت (Fi). در چیدمان ثابت منابع، جای منابع ثابت و ترتیب پردازش پدیده‌ها برای تمام آنها یکسان است؛ اما، در چیدمان متغیر، ترتیب قرارگیری منابع برای پدیده‌های مختلف، تغییر می‌کند.

روش حل مدل‌های محتاطانه

اگر n پدیده و m منبع در سیستم موجود باشند، آنگاه، $n!$ راهبرد برای توالی پدیده‌ها و $m!$ راهبرد متفاوت برای توالی منابع وجود دارند. اگر چیدمان متغیر منابع امکان پذیر باشد و جواب بهینه مدل (با راهبرد خالص یا مختلط) را بخواهیم بیابیم، باید مقدار معیار عملکرد را به ازای تمام $m!n!$ ترکیب توالی‌های ممکنه منابع و پدیده‌ها یافت و از $n!m!$ مقدار بدست آمده برای معیار سنجش مدل، ماتریس دریافت (پرداخت) را تشکیل داد (شکل ۱).

7. Player zero-sum game theory

۸. روش مینیمکس مربوط به یافتن جواب خالص ماتریس‌های دارای نقطه زین آسیبی است و معیاری به نام پیشیمانی مینیمکس (Minimax regret) وجود دارد - که نتیجه آن از نظر راهبرد با ماکسیمین یکی است - اما، بجای دریافت (سود)، مقدار پیشیمانی (از دست دادن سود) را به عنوان ارزش بازی می‌یابد

1. Game Theory

2. Decision making under risk

3. Maximax

4. Maximin

5. Equal likelihood (Principle of insufficient reason)

6. Pay-off table

الگوریتم پاد ایکرز X

این الگوریتم برای تعیین توالی n پدیده^۲ با هدف بیشینه سازی F_{max} ، که توسط m منبع با توالی ثابت معین در محیط کارگاه جریانی جایگشتی $(Pf)^3$ پردازش می شوند، بکار می آید و بر اساس قاعده زیر عمل می کند:

قاعده بسط مقایسات زوجی - اگر در توالی یابی^۲ تایی پدیده ها با هدف بیشینه سازی F_{max} ، پدیده^۲ a بر پدیده^۲ b و پدیده^۲ b نیز بر پدیده^۲ c مقدم شود، آنگاه توالی سه تایی بیشینه ساز F_{max} این پدیده ها به صورت $\langle a-b-c \rangle$ خواهد بود.

بر اساس قاعده فوق، الگوریتم پاد ایکرز X به صورت زیر ارائه می گردد:

۱ - پدیده ها را بر اساس طولانی ترین زمان پردازش $(LTP)^4$ بر روی اولی ترین (اولین) منبع مرتب کنید (اگر زمان پردازش چند پدیده، بر روی اولین منبع برابر بود، از زمان پردازش آنها بر روی دومین منبع استفاده کنید و در صورت تساوی، این رویه را بر روی منابع بعدی تکرار نمایید).

۲ - فرض کنید، توالی حاصله از مرحله ۱ به صورت $\langle J_1-J_2-J_3-\dots-J_{n-1}-J_n \rangle$ باشد. پدیده های مجاور در این توالی را به روش ترسیمی ایکرز^۵ با هدف بیشینه سازی F_{max} با هم مقایسه کنید (Akers & Friedman, 1955, 429-442). بهتر است، از یک سمت توالی اولیه فوق، مقایسات را شروع کنید. بر اساس قاعده بسط مقایسات زوجی، توالی های دو تایی را به توالی های سه تایی و بیشتر بسط دهید، تا آنجا که تمام n پدیده بر اساس مقایسات زوجی و این قاعده مرتب شوند. بعنوان مثال، اگر پدیده^۲ J_1 را با پدیده^۲ J_2 مقایسه کردید و توالی فوق پا برجا ماند، آنگاه پدیده^۲ J_2 را با پدیده^۲ J_3 مقایسه کنید و این روند را تا به آخر ادامه دهید. اگر در مقایسه پدیده^۲ J_1 با پدیده^۲ J_2 ، پدیده^۲ J_2 بر اساس بیشینه سازی F_{max} مقدم گردید، آنگاه در توالی اولیه ی فوق جای آنها را با هم

برنامه زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدبینانه

(در توالی ثابت پدیده ها)

در اینجا، یک برنامه زمانی کلی ارائه می گردد که برای هر مدل و معیاری قابل استفاده است:

۱ - به ازای هر یک از $m!$ توالی مختلف منابع، توالی ای از پدیده ها را تعیین کنید، که معیار مورد نظر را بدینه (معمولاً بیشینه) می سازد. مقادیر معیار مورد نظر را محاسبه و یادداشت نمایید.

۲ - از میان $m!$ مقدار بدست آمده برای معیار مورد نظر، بهترین (کوچکترین) مقدار را تعیین کنید. توالی منابع مربوط به این مقدار، توالی مطلوب منابع است.

توالی حاصل از برنامه زمانی فوق، مقدار معیار زمانی مورد نظر را حداکثر برابر با کوچکترین مقدار حاصل از مرحله دوم این الگوریتم می سازد. توجه نمایید، که در گام نخست الگوریتم فوق به دنبال بهینه سازی معیار عملکرد نیستیم. این الگوریتم، محاسبه معیار مدت نظر را از شمارش کامل $n!m!$ چیدمان مختلف، به حل $m!$ مسئله ترتیب گذاری پدیده ها - که فقط در چیدمان منابع متفاوتند - کاهش می دهد.

سؤالی که در اینجا ممکن است، مطرح شود، آن است که: توالی ای که یک معیار عملکرد زمانی را بیشینه می سازد، چگونه بدست آید؟ جواب این است که، گرچه احتمالاً تحقیقی بر روی مدل های بیشینه سازی معیارهای سنجش عملکرد منظم (عادی)^۱ نشده و در واقع، هیچ کاربردی برای آنها یافت نگردیده، اما، اگر قاعده یا الگوریتمی، توانایی ارائه ی جواب بهینه برای یک معیار مورد نظر از یک مسئله را دارد، معمولاً و شاید همیشه ترتیب معکوس توالی بهینه حاصل از آن، جواب بدینه (در مورد اکثر مدل ها، مقدار بیشینه معیار مورد نظر) را بدست می دهد. این موضوع با آزمودن چندین مسئله و الگوریتم تجربه شده است. به هر حال، برای هدف بیشینه سازی F_{max} (حداکثر زمان پردازش پدیده ها در سیستم) نیز الگوریتم نوینی با نام «الگوریتم پاد ایکرز X» ارائه می گردد، که در ادامه به آن خواهیم پرداخت.

^۲ توجه دارید، که طبق گام ۱ از برنامه زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدبینانه به دنبال یافتن بدترین توالی پدیده ها هستیم، تا بر اساس آن توالی مطلوب منابع را تعیین نماییم.

3. Permutation flow shop

4. Longest Processing Time

5. Akers' graphical method

1. Regular

لذا، مقدار نهایی F_{max} و توالی پیدا شده، جواب مطلوب یا بهینه الگوریتم است و نه جواب بدینه. اگر مقدار F_{max} بهینه (بیشینه) را به ازای تمام $m!$ ترتیب مختلف منابع از الگوریتم یاد ایکرز X بیابید، آنگاه از آنها به عنوان مقادیر بدینه مورد نیاز مرحله ۱ از برنامه زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدینانه می توانید استفاده کنید.

پیچیدگی حل مدل های محتاطانه

از آنجایی که اکثر مسائل زمانبندی (حتی بسیاری از مسائل کوچک و ظاهراً ساده) غیر چند جمله ای کامل^۱ هستند، با افزایش تعداد منابع (m) و پدیده ها (n) دستیابی به حل بهینه بسیار وقت گیر خواهد بود.

تعیین توالی منابع در شرایطی که توالی پدیده ها نامعین است، در حالت کلی بسیار پیچیده است. مدل‌هایی چون: $n/m/f/F_{max}$ و $n/m/G/F_{max}$ که در آنها G مبین سیستم پردازشی تولید کارگاهی عمومی^۲ و f نیز نماد سیستم پردازشی کارگاه سری کاری^۳ است، به ازای $m \geq 3$ غیر چند جمله ای کامل هستند. همچنین، اگر زمان های آماده سازی پدیده ها (T_i) صفر نباشند، آنگاه: مدل هایی به صورت $n/1//B$ که در آن B یکی از معیارهای سنجش C (زمان تکمیل پدیده ها)، T_{max} (حداکثرنا بهنگامی یا تأخیر)، L_{max} ، E_{max} (حداکثر تعجیل)، E ، T (زمان تعجیل کل) و یا ET (مجموع زودکرد و دیرکرد پدیده ها) می باشد، غیر چند جمله ای کاملند (Laguna, 2004, 23). البته، معیارهای دیگری (از جمله: معیارهای معادل و متضاد شش معیار فوق) نیز می توانند جای B قرار گیرند و مدل اخیر را غیر چند جمله ای کامل سازند. در مورد مدل های زمانبندی در شرایط عدم اطمینان کامل، باید مقادیر بهینه معیار عملکرد مدل های قطعی به ازای حداقل تمام توالیهای فرضی مختلف منابع (یا پدیده ها) حاصل گردند و سپس طبق روش های حل مسائل تئوری بازی های دو نفره مجموع - صفر از میان آنها توالی بهینه یا مناسب منابع را یافت. لذا، اگر یک مدل قطعی در تعیین توالی پدیده ها غیر چند جمله ای

عوض و لذا، در مقایسه بعدی J_1 را با J_3 مقایسه نمایید. همچنین، اگر در مقایسه J_1 با J_2 ، توالی اولیه محفوظ ماند، اما، در مقایسه J_2 با J_3 ، J_2 بر J_3 مقدم شد، آنگاه باید J_1 را با J_3 نیز مقایسه کنید. در نتیجه این مقایسه، اگر J_1 مقدم ماند، توالی ترکیبی این سه پدیده به صورت $\langle J_2-J_3-J_1 \rangle$ می شود و اگر J_3 بر J_1 نیز مقدم گردید، توالی ترکیبی این سه پدیده به صورت $\langle J_3-J_1-J_2 \rangle$ می گردد. در مقایسات دوتایی پدیده ها به روش ترسیمی اگر مقدار F_{max} هر دو مسیر (هر ۲ توالی) برابر گردید، پدیده ای مقدم می گردد، که زمان پردازش طولانی تری بر روی منبع اولی تر دارد. اگر این زمان نیز برای دو پدیده برابر گردید، آن دو پدیده برای انتخاب علی السویه هستند. ۳ - اگر $n = 2$ باشد، F_{max} محاسبه شده از روش ترسیمی ایکرز مقدار مورد نظر F_{max} است و اگر $n > 2$ باشد، بر اساس توالی نهایی پیدا شده بر اساس نمودار گانت (یا هر روش دیگر)، مقدار F_{max} را بیابید.

چند نکته: الف) علّت نامگذاری این الگوریتم به یاد ایکرز X آن است، که بر اساس مقایسات زوجی روش ترسیمی ایکرز طراحی شده است، لکن، چون با هدف بیشینه سازی F_{max} طراحی شده، از عبارت «یاد» در ابتدای نام الگوریتم استفاده شده است. از طرفی چون توسعه ای از الگوریتم مربوطه به هر میزان n است، از نماد X استفاده شده - که در ادبیات رایانه ای به معنای «از یک نسخه به بعد» است. همچنین، اگر $n \geq 4$ باشد، آنگاه در نتیجه حل ترسیمی مطرح شده، شکل یا اشکالی به صورت X ایجاد می شود و اگر $n < 4$ باشد نیز در نتیجه حل، شکلی شبیه بخشی از حرف X ایجاد می گردد. ب) اگر $n = 1$ باشد، نیازی به هیچ مقایسه ای نیست و F_{max} برابر با مجموع زمان پردازش آن تک پدیده بر روی تمام منابع است. ج) مقدار بیشینه F_{max} پیدا شده برای زمانبندی بدون توقف است؛ یعنی: اگر نوبت پردازش پدیده a بر روی منبع R فرا رسیده است و R در حال پردازش کردن پدیده ای نیست، آنگاه نمی توان زمان انتظار تحمیلی ایجاد کرد، تا مقدار F_{max} افزایش یابد. بدیهی است، اگر توقف جایز بود، مقدار F_{max} را با هر توالی به طور نامحدود می توانستیم افزایش دهیم. د) توجه داشته باشید، که در اینجا بیشینه سازی F_{max} مدنظر است و

1. NP-Complete

2. General job shop

3. Flow shop

سخت تر و حتی از نوع آزاد^۲ خواهد شد (Gonzalez & Sahni, 1976, 665-679)

بنابر قضیه فوق حل مدل‌های مورد نظر این تحقیق شدیداً غیر چند جمله‌ای سخت هستند.

آزمون

در این قسمت، روش حل مدل محتاطانه و بخصوص برنامه‌زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدبینانه (در توالی ثابت پدیده‌ها) و الگوریتم پاد ایکرز^X، با یک مثال کاربردی تشریح می‌گردد:

مثال ۱ - شهرداری یک منطقه قرار است به سه تقاطع نزدیک به هم A ، B و C از یک خیابان برای بهبود حمل و نقل عمومی و بر اساس بودجه خود و هزینه‌های مربوطه، یک میدان (R_1)، یک پل هوایی (R_2) و یک چهار راه (R_3) اختصاص دهد ($\overline{AB} = \overline{BC}$). بدیهی است، از این خیابان، هم انسان (J_1) و هم خودرو (J_2) عبور می‌کند. زمان گذر هر پدیده از هر منبع در جدول زیر آمده است. ترتیب بهینه ثابت منابع را برای کمینه‌سازی F_{max} بیابید (اولی‌ترین منبع در تقدم در A و آخرین منبع در C قرار می‌گیرد).

جدول ۱ - ماتریس فرضی زمان‌های پردازش (p_{ij}) مثال ۱

J_i	p_{ij} (دقیقه)		
	R_1	R_2	R_3
1	۳	۴	۱
2	۲	۰	۵

حل: بدیهی است، که این مثال، یک مثال خلاصه و ساده شده با اعداد فرضی است. در هر تقاطع نیز معلوم نیست، در یک لحظه خاص از یک منبع، ابتدا انسان عبور می‌کند یا خودرو و لذا، از روش نظریه بازی بایست سود جست. طبق الگوریتم پاد ایکرز^X، به ازای هر توالی منبعی، توالی بدینه پدیده‌ها و مقدار F_{max} بدست آمده است، که با

کامل باشد، مدل محتاطانه معادل آن نیز غیر چند جمله‌ای کامل و پیچیده تر از مدل قطعی مربوطه است. مثلاً، مدل $n/m/F_i/F_{max}$ یک مدل غیر چند جمله‌ای کامل است. واضح است، که بعضی از مدل‌های زمانبندی قطعی موجود پدیده‌ها - که غیر چند جمله‌ای (NP) یا غیر چند جمله‌ای کامل نبوده اند - در صورت تبدیل به مدل محتاطانه احتمال دارد، که غیر چند جمله‌ای گردند و لذا، فقط درصد بسیار کوچکی از مسائل محتاطانه چند جمله‌ای (P) هستند. توجه دارید، که این مسائل مشابه ولی پیچیده تر از مسائل غالباً فوق العاده سخت محیط کارگاه آزاد هستند. برای تبیین مرتبه پیچیدگی زمانی حل مدل مورد بررسی این تحقیق و روشهای مربوطه به بیان قضیه ذیل می‌پردازیم:

قضیه ۱ - حل مدلهایی به صورت $n/m/A/B$ ، به ازای هر معیار B و هر نوع چیدمان A و $n \geq 2$ شدیداً غیر چند جمله‌ای سخت^۱ است.

اثبات - اگر حل مسائلی به شکل $n/m/\tilde{A}/B$ که در آن \tilde{A} محیط پردازشی مرتبط با چیدمان A است، با سریع‌ترین الگوریتم ممکن، از مرتبه $O(r)$ باشد - که در آن r هر تابعی از m و n می‌تواند باشد - آنگاه، چون باید حداقل به ازای تمام $m!$ ترتیب مختلف منابع، مدل $n/m/\tilde{A}/B$ حل گردد، پیچیدگی زمانی حل مدل $n/m/\tilde{A}/B$ حداقل برابر $O(m!r)$ خواهد بود، که شدیداً غیر چند جمله‌ای سخت است. بدیهی است، برای $n=1$ نیازی به حل مدل $n/m/\tilde{A}/B$ نیست و در مورد مدل $n/m/\tilde{A}/B$ نیز بسته به معیار مدل، شاید نیاز به حل مدل نباشد، چون به ازای بعضی از معیارها و مدل‌ها، مقدار B در صورتی که $n=1$ باشد، ثابت خواهد بود. از طرف دیگر، به عنوان راه حل دوم، می‌دانیم، که مدل مشابه مدلمان در زمانبندی و توالی عملیات برای کمینه‌سازی معیار F_{max} ، $n/2/O/F_{max}$ که در آن O نمایانگر کارگاه آزاد است، شدیداً غیر چند جمله‌ای سخت می‌باشد و بدیهی است، که برای $m \geq 3$ ، مسأله سخت تر خواهد بود. بعلاوه، به ازای بسیاری از معیارهای سنجش عملکرد دیگر مسأله

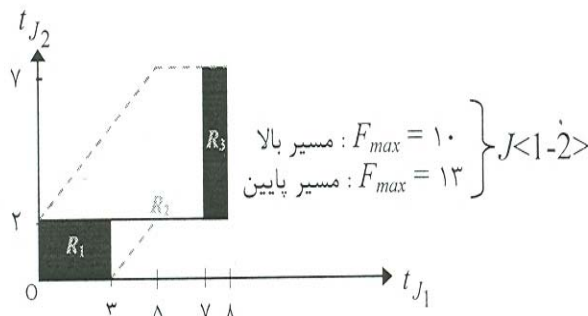
2. Open

1. Strongly NP-hard

حل نشان داده می شود.
 $R<1-2-3> \Rightarrow J_1<1-2>; J_1$: توالی اولیّه

توجه به تعداد حالات نسبتاً زیاد و در نتیجه، حجم زیاد صفحه برای نشان دادن روش ترسیمی و نیز به خاطر ساده سازی محاسبات، فقط در مورد توالی $R<1-2-3>$ روش

شکل ۲ - تصویر الگوریتم پاد ایگزرز x برای حل یک ترتیب از مثال ۱



همانطور که ملاحظه می شود، توالی $J<1-2>$ برای $R<R_1-R_2-R_3>$ تثبیت می شود. نتایج محاسبات به ازای کل توالی ها در جدول ۲ آمده اند.

جدول ۲ - یافتن توالی بدینّه و بهینّه پدیده ها

$R<3-2-1>$	$R<3-1-2>$	$R<2-3-1>$	$R<2-1-3>$	$R<1-3-2>$	$R<1-2-3>$	توالی منبع
$J<2-1>$	$J<2-1>$	$J<1-2>$	$J<1-2>$	$J<2-1>$	$J<1-2>$	توالی بدینّه پدیده ها
۱۳	۱۴	۱۲	۱۴	۱۲	۱۳	F_{max}
۱۲						$\min\{F_{max}\}$

لذا توالی بهینّه خالص منابع به صورت $R<1-3-2>$ و $R<2-3-1>$ خواهد بود. البته، اگر بوسیله شمارش کامل، ماتریس دریافت پدیده ها را از نظر معیار F_{max} تشکیل دهیم، به صورت زیر خواهد بود، که نتیجه الگوریتم پاد ایگزرز x را تأیید می کند.

		R_j					
		$\langle 1-2-3 \rangle$	$\langle 1-3-2 \rangle$	$\langle 2-1-3 \rangle$	$\langle 2-3-1 \rangle$	$\langle 3-1-2 \rangle$	$\langle 3-2-1 \rangle$
J_i :	$\langle 1-2 \rangle$	۱۳	۱۰	۱۴	۱۲	۸	۱۰
	$\langle 2-1 \rangle$	۱۰	۱۲	۸	۱۰	۱۴	۱۳

زمان پردازش پدیده (ها) بر روی منابع (تک منبع) است. این الگوریتم برای مسائل $m \times 2$ نیز جواب بهینه می‌دهد، زیرا آن مسائل، همان مسائل الگوریتم ایکرز هستند، که فقط هدف در اینجا بیشینه سازی ولی منطق یکی است. برای بررسی صحت کار این الگوریتم در محیط های $n \times m$ (برای $n \geq 3$ و $m \geq 2$) آزمایشات جامعی صورت گرفته است. بدین منظور ۶۵ مسأله بزرگ، متوسط و کوچک (با اندازه های $n \times m = 3 \times 2$ ، 3×3 ، 3×5 ، 3×10 ، 3×25 ، 3×10 ، 4×2 ، 4×3 ، 4×4 ، 4×5 ، 4×10 ، 4×25 ، 4×2 ، 4×3 ، 4×4 ، 4×5 ، 4×10 ، 4×25 ، 5×2 ، 5×3 ، 5×5 ، 5×10 ، 5×2 ، 5×3 ، 5×5 ، 5×10 ، 5×2 ، 5×3 ، 5×5 ، 5×10 ، 6×2 ، 6×3 ، 6×4 ، 6×5 ، 6×10 ، 6×2 ، 6×3 ، 6×4 ، 6×5 ، 6×10 ، 15×2 ، 15×3 ، 15×5 ، 15×10 ، 15×2 ، 15×3 ، 15×5 ، 15×10 ، 15×2 ، 15×3 ، 15×5 ، 15×10 ، 25×2 ، 25×3 ، 25×5 ، 25×10 ، 25×2 ، 25×3 ، 25×5 ، 25×10 ، 25×2 ، 25×3 ، 25×5 ، 25×10 ، 25×2 ، 25×3 ، 25×5 ، 25×10) مورد بررسی قرار گرفتند. فرض اولیه آن بود، که الگوریتم پیشنهادی برای تمام مسائل جواب بهینه می‌دهد. اما، فرض اینکه الگوریتم پیشنهادی در مورد تمام مسائل از تمام توالی‌ها جواب بهتری می‌دهد، بر اساس مسائلی که طراحی شده بود، نیازمند محاسبه مقدار F_{max} به ازای $10^{47} \times 1/16$ توالی است، که با صرف میلیاردها قرن، نرم افزار و سخت افزار و نیروی انسانی نیز امکان پذیر نیست و لذا، بررسی تمام توالی‌ها امکان پذیر نمی‌باشد و فرض می‌شود، مقدار معیار حاصل از الگوریتم پیشنهادی از ۹۰٪ توالی‌ها جواب بهتری می‌دهد. پس، آنقدر نمونه برمی‌داریم، که با احتمال بیش از P_a مطمئن باشیم، به اولین چیدمانی که مقدار معیار زمانی مورد نظر را نسبت به مقدار حاصل از چیدمان الگوریتم پیشنهادی کمتر می‌کند، رسیده‌ایم. اگر از هر مسأله، مقدار F_{max} حداقل برای N' چیدمان

بسادگی می‌توان ستون‌های اول و آخر ماتریس فوق را حذف نمود. ۴ ستون باقیمانده در واقع، دو ستون هستند، که معکوس شده‌اند و لذا، می‌توان فهمید، که در این بازی دو نفره مجموع - صفر، راهبرد بهینه پدیده‌ها $(0/5, 0/5)$ است. البته در اصل، این بازی جواب بهینه دگرین^۱ نیز دارد؛ یعنی: بیشمار توالی مختلط بهینه منابع وجود دارند، که [حداکثر] مقدار F_{max} را برابر ۱۱ می‌سازند و چون ۱۱ از ۱۲ کمتر است، توالی‌های خالصی که قبلاً پیدا شده بودند، توالی‌های بهینه یک سیستم چیدمان متغیر نیستند. تمام توالی‌های بهینه متغیر منابع را به صورت راهبرد $0 \leq \lambda \leq 1$ ، $(0, 1 - \lambda, \lambda)$ می‌توان نشان داد، که به ازای آنها F_{max} حداکثر برابر ۱۱ خواهد شد. توجه دارید، همانطور که قبلاً گفته شد، ستون‌های اول و آخر ماتریس پرداخت (معادل چیدمانهای نوع اول و ششم منابع)، هیچ وقت انتخاب نمی‌شوند. راهبرد $(0, 0, 0/5, 0/5)$ بیانگر آن است، که ترتیب منابع باید بین دو چیدمان فرینه $\langle 1-3-2 \rangle$ و $\langle 2-3-1 \rangle$ به طور تصادفی و با فراوانی برابر تغییر کند. بدیهی است، پیاده سازی راهبرد مختلط (چیدمان متغیر) برای مثال مذکور، در عمل غیر ممکن است.

برنامه زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدبینانه همواره جواب درستی ارائه می‌دهد، زیرا بر اساس منطق نظریه بازی و معیار مینیمکس است. بدیهی است، الگوریتم ابتکاری خاص پاد ایکرز X نیز برای مسائل $m \times 1$ و $1 \times n$ همواره جواب بهینه می‌دهد، چون مقدار F_{max} در این حالات ثابت و برابر مجموع

1. Alternative optimal solution

نتیجهٔ بهتری می‌دهد (البته، بنابر نتایج توالی‌های محاسبه شده، تخمین نقطه‌ای برای درصدی از توالی‌ها که نتیجه‌ای بهتر از توالی حاصل از الگوریتم پیشنهادی می‌دهند، برای تمام مسائل صفر است و نتیجتاً، تخمین بازه‌ای این نسبت هم برای تمام مسائل صفر می‌شود و اگر مقدار این نسبت را به کل مسائل بسط دهیم، می‌توان بیش از ۶۵٪ مطمئن شد، که تقریباً به ازای هر مسئلهٔ مفروضی، ترتیبی از پدیده‌ها وجود ندارد، که از توالی‌های حاصل از این الگوریتم مقدار معیار سنجش بهتری بدست بدهد).

نتیجه گیری

« فقط پدیده‌ها نیستند، که می‌توان آنها را مرتب کرد، بلکه، منابع را نیز بنا بر معیارهای عملکرد زمانی می‌توان چیدمان نمود.»

در این مقاله، ترتیب گذاری در حالت عدم اطمینان کامل و شرایط تعارض، برای اولین بار در مدل‌های زمانبندی داخل گردیدند و نیز مدل‌های ترتیب گذاری منابع در شرایطی که ترتیب پدیده‌ها نامعلوم است، بررسی و کاربرد آنها نیز مختصراً مورد اشاره قرار گرفت. اگر در ترتیب گذاری منابع، توالی پدیده‌ها معلوم نباشد، باید ترتیب گذاری منابع طوری باشد، که تحت هر ترتیب ممکنهٔ حضور پدیده‌ها بر سر منابع، نتیجهٔ بدی گرفته نشود. به عبارت دیگر، باید منابع را با احتیاط (هوشیارانه) چید و این چیزی است، که در نظریهٔ بازی‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و لذا، مدل‌های مربوط به این مسائل را مدل‌های محتاطانه نامیدیم. در این گونه ترتیب گذاری‌ها با یک بازی دو نفرهٔ مجموع - صفر بین منابع و پدیده‌ها مواجه ایم، که ماتریس دریافت آن، مقدار معیارهای عملکرد به ازای چیدمان‌های مختلف منابع و پدیده‌هاست. در این تحقیق، روش کلی حل تمام مسائل (مدل‌های) محتاطانه ارائه گردید. از آنجا که این روش کلی، نیازمند شمارش کامل ترکیب تمام چیدمان‌های ممکن منابع و پدیده‌هاست، حل آن بسیار وقت گیر است. از طرفی، ممکن است، نتیجهٔ آن یک راهبرد مختلط (توالی متغیر منابع) باشد، که عملاً امکان پذیر نباشد. برای مواردی که چیدمان منابع باید از نوع ثابت باشد، برنامهٔ

مورد بررسی قرار گیرد - که یکی از آن چیدمان‌ها، توالی حاصل از الگوریتم پاد ایگز X است - آنگاه:

$$\sum_{i=0}^{N'} \binom{D}{i} \binom{n-D-i}{i} / \binom{n-i}{i} > P_a \Rightarrow \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^{N'} (n-i)^{-1} > P_a/D \quad ; \quad N' < n - D$$

در رابطه (۱)، D تعداد چیدمان‌هایی است، که نتیجه‌ای بهتر از چیدمان پیشنهادی می‌دهد و طبق توضیحات فوق می‌توان آن را برابر با $0.1n!$ در نظر گرفت. مقدار P_a برای اطمینان کافی و کاهش حجم نمونه (با توجه به غیر چند جمله‌ای سخت بودن این مسائل) ۶۵٪ فرض شده است. پس، رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{N'} (n-i)^{-1} > 12/(n!) \quad (2)$$

کوچکترین مقدار N' که رابطه (۲) را برقرار سازد - که قطعاً کوچکتر از $0.9n!$ خواهد بود - تعداد چیدمان‌های نمونه‌ای مورد محاسبه را بدست می‌دهد. اگر N' حاصل از رابطه (۲) را برای تمام ۶۵ مسئله تصادفی نام برده شده حساب کنیم، مجموعاً نیاز به محاسبهٔ ۳۱۵ مقدار F_{max} است. البته، برای اطمینان بیشتر برای بیش از ۳۱۵ توالی - که بیش از ۶۵ تا آنها توسط الگوریتم پاد ایگز X پیشنهاد شده بودند - مقدار F_{max} محاسبه گردید^۱. در هیچ یک از مسائل، توالی‌ای یافت نشد، که از توالی‌های حاصل از الگوریتم نتیجه‌ای بهتر بدهد. با توجه به حجم زیاد فضای مورد نیاز برای ثبت مسائل و نتایج و عدم وجود استثناء از ذکر مسائل و مقادیر F_{max} پیدا شده خودداری می‌گردد^۲. بنابراین، می‌توان « بیش از ۶۵٪ مطمئن بود، که توالی حاصل از الگوریتم ابتکاری پاد ایگز X برای هر یک از مسائل مورد آزمون از « بیش از ۹۰٪ توالی‌های مختلف ممکنهٔ پدیده‌ها

^۱ در چند مسئله، الگوریتم، بیش از یک توالی مطلوب با مقدار F_{max} یکسان می‌دهد، از طرفی، در بعضی از مسائل کوچک مقدار F_{max} به ازای تمام توالی‌ها محاسبه شده است.

^۲ توجه دارید، که هدف اصلی این تحقیق بیان روش حل کلی مدل‌های محتاطانه و برنامهٔ زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدینانه بود و برای اینکه راه حل برای استفاده از برنامهٔ زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدینانه ارائه گردد، الگوریتم پاد ایگز X پیشنهاد شد و برای نشان دادن عملکرد خوب آن نتایج بررسی آن به صورت مثال و آزمون بیان شد. همچنین، به کمک روش ترسیمی سه بُعدی می‌توان نشان داد، که قاعدهٔ بسط مقایسات زوجی کاملاً درست و در نتیجه، الگوریتم پاد ایگز X به ازای ۳ = n نیز همواره جواب دقیقی بدست می‌دهد.

اکثر مدل های محتاطانه، مدل هایی پیچیده و از نظر زمان حل غیر چند جمله ای کاملند. نشان داده شد، که حل مدل های به شکل $n?/m/A/B$ به ازای هر معیار عملکرد B و چیدمان A و نیز $n \geq 2$ شدیداً غیر چند جمله ای سخت است و مرتباً پیچیدگی زمانی برنامه زمانی ارائه شده برای حل این مدل (حتی برای چیدمان یا همان A ثابت)، بزرگ تر از $O(m!)$ است و این نشان می دهد، که برای m های نسبتاً بزرگ باید زمان زیادی برای حل مدل های محتاطانه صرف نمود.

نتایج آزمون های دقیق صورت گرفته نشان می دهد، که الگوریتم پاد ایکرز X برای یافتن یک یا چند توالی ثابت منابع که مقدار F_{max} را بیشینه می سازد، معتبر و قابل اطمینان است.

زمانی چیدمان ثابت منابع با معیار بدبینانه ارائه گردید، که بجای یافتن $m!n!$ مقدار برای معیار مسأله، فقط نیاز به $m!$ مقدار برای حل آن دارد! این برنامه زمانی نیز برای یافتن جواب بهینه تمام مدل ها قابل استفاده است؛ اما، نیاز به بدینه سازی معیار عملکرد مدل دارد، که تا بحال مورد بررسی محققان نبوده است. در نتیجه، پیشنهاد می گردد، که محققان بر روی مدل هایی که با هدف بدینه سازی (معمولاً بیشینه سازی) معیارهای سنجش طراحی می شوند، کار کرده تا الگوریتم های سریعی در این زمینه طراحی کنند. البته، الگوریتم پاد ایکرز X، نیز برای بیشینه سازی F_{max} پیشنهاد شد، تا در برنامه زمانی فوق استفاده گردد. از جمله مزایای این برنامه زمانی آن است، که نشان داد: « اگر بدنبال یافتن یک راهبرد خالص برای حل مسائل بازی های چند نفره هستیم، نیاز به داشتن اطلاعات تمام درایه های ماتریس دریافت نیست، که این نتیجه در نظریه بازی قابل استفاده است». این یکی از همان ایده هایی است، که از تعامل زمانبندی و حوزه های دیگر ریاضیات ظهور کرد.

منابع و مآخذ:

۱. اسکونژاد، محمد مهدی « اقتصاد مهندسی یا ارزیابی اقتصادی پروژه های صنعتی »، مرکز نشر دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران) و مرکز نشر دانشگاه تفرش، تهران، زمستان ۱۳۷۸، چاپ یازدهم، ۱۲-۱۳.
۲. دهنار صیدی، حمید رضا، راهنما: محمد تقی تقوی فرد « چیدمان منابع کاری بر اساس معیارهای زمانی»، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی صنایع (مهندسی سیستم های اقتصادی و اجتماعی)، دانشگاه آزاد اسلامی (واحد علوم و تحقیقات تهران، دانشکده فنی و مهندسی)، ۱۳۸۵، ۱، ۷، ۱۲-۲۵، ۵۷-۵۸، ۹۱، ۹۳ و ۱۰۷.
۳. دهنار صیدی، حمید رضا « Resource sequencing games » (۱۳۸۵) « مهندسی سیستم های تولیدی - اقتصادی (مُستتا)، پیش شماره، معاونت فرهنگی واحد علوم و تحقیقات تهران، (آذر)، ۱۱-۱۵.
4. Akers, S. B. & J. Friedman (1955) "A non-numerical approach to production scheduling problems" Operations Research, 3, INFORMS, 429-442.
5. American Mathematical Society (AMS) "Machine Scheduling/ 4. Performance Measures", <<http://www.ams.org>>, [2006/11/25].
6. Gonzalez, T. & S. Sahni (1976), "Open shop scheduling to minimize finish time" Journal of the ACM, 23:4, 665-679.
7. Laguna, Manuel; "Sequencing and Scheduling", Fall 2004, SYST 7330, University of Colorado at Boulder, Leeds School of Business, Slide 23.
8. MacCarthy, Bart L. & John R. Wilson (2001) "HUMAN PERFORMANCE IN PLANNING AND SCHEDULING" Taylor & Francis, St Edmundsbury Press, 67.