فلسفه تحلیلی، شماره سی و یک، بهار و تابستان ۱۳۹۶، ص۱۴۳-۱۷۳

بررسی و مقایسه خودارجاعی و گسترش‌پذیری نامتعین، در نسبت با پارادوکس‌ها[1]

سعیده معصومی
دانش‌آموخته کارشناسی ارشد فلسفه، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
حسین بیات[2]
دکتری فلسفه‌ی علم، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده

این نوشتار درباره‌ی تشخیص پارادوکس‌های منطقی است. یعنی قرار است پارادوکس‌ها از جنبه‌ی تشخیصی یا عیب‌یابانه مورد مطالعه قرار گیرند. در این نوع مطالعات پرسش اصلی این است که پارادوکس‌ها چگونه وارد استدلال می‌شوند و چگونه می‌توان آنها را به درستی تشخیص داد؟ تمرکز مقاله روی پیشنهادهای عیب‌یابانه ساختار محور بوده و دو دسته اصلی از این پیشنهادها بررسی شده‌اند. دسته اول پیشنهادهایی است که حول محور مفاهیمی چون دور و غیر حملی بودن شکل گرفته‌اند و تحت عنوان «خود ارجاعی» به آن پرداخته‌ایم و دسته دوم پیشنهادهایی است که حول محور فرض بی‌نهایت واقعی و یا نوعی نامحدود بودن و گسترش‌پذیری ذاتی شکل گرفته‌اند و تحت عنوان گسترش‌پذیری نامتعین به آنها پرداخته‌ایم. البته دسته اخیر با خوانش‌های متفاوتی مطرح شده است که مراد ما در اینجا خوانشی متعلق به رایت و شاپیرو است. در هر دو مورد ابتدا پیشنهاد و بستر مفهومی آن بررسی شده و سپس ارتباط آن با پارادوکس‌ها و نحوه استنتاج پارادوکس از آن تبیین شده است. در نهایت هم با این انگیزه که هر دو پیشنهاد قابلیت تبیین پارادوکس‌های مشترکی را دارند، استدلالی طراحی شده که نشان می‌دهد هر دو پیشنهاد در واقع به نوعی همسان هستند، و با یک نگاشت صوری-معنایی می‌توان هر یک را بر دیگری تطبیق داد.

واژگان کلیدی: پارادوکس، عیب‌یابی ساختارمحور، دور، دور باطل، خودارجاعی، خودبازتولیدگری، گسترش‌پذیری نامتعین، اصل گسترش.

---

۱. تاریخ وصول: ۱۳۹۶/۱/۲۰، تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۲/۲۷

۲. پست الکترونیک(مسؤول مکاتبات): logicbay@yahoo.com

مقدمه

پارادوکس‌ها از دیرباز به حوزه تفکر منطقی راه یافته بودند، ولی تا اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم نیازی به پژوهش نظام‌مند حول آنها شکل نگرفته بود. بلکه رشته‌ای از تحولات اساسی در منطق و به تبع آن در ریاضیات و فلسفه ریاضی در آن زمان منجر به رویدادهایی در جهان تفکر منطقی فلسفی شد داشت که می‌توان به نوعی بحران نامیدشان. این بحران ناشی از پارادوکس‌های منتج از همان نظریه‌های جدید بود و اساس آن نظریه‌ها را به پرسش می‌گرفت. انگیزه نجات دستاوردهای منطقی ریاضی جدید از پارادوکس‌ها بود که آنها را به متن پژوهش منطقی آورد.

طبیعتاً یک راه مواجهه با پارادوکس‌ها گردآوری آنها ذیل چتر مفهومی واحد و یافتن محل نفوذ تناقض در استدلال است. یعنی عیب‌شناسی[1] آنها. در نوشتار حاضر هم پژوهش در مورد پارادوکس‌ها به عیب‌شناسی محدود شده. کوشیده‌ایم در میان پیشنهادهای عیب‌یابانه مختلف به دو نمونه از مهم‌ترین آنها بپردازیم و مقایسه‌ای بین آنها صورت دهیم.

نگاهی به مفهوم پارادوکس و انحاء مواجهه با آن

«یک پارادوکس یک استدلال به نظر صحیح و مبتنی بر فرض‌های به ظاهر صادق است که به تناقض می‌انجامد».[2] پارادوکس‌ها نوعی تنش منطقی-معنایی در جهان موضوع[3] هستند و معمولاً نشانگر ایراد یا بدفهمی‌ای در مفاهیم اساسی ما هستند، مفاهیمی مانند مجموعه، حمل و ارجاع، صدق، معرفت و امثالهم. ایجاد یک پارادوکس می‌تواند نشانگر این باشد که آن‌چه ما به صورت طبیعی و شهودی درست و بدیهی فرض می-

1. diagnosis
2. Bolander, Th., "Self-Reference", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), 2015, p.1.
3. Universe of discourse

کرده‌ایم، احتمالاً درست نبوده یا به آن شکلی که آن را می‌فهمیده‌ایم درست نبوده. از همین رو می‌توان پارادوکس‌ها را ابزارهایی برای آزمون منطقی معنایی به شمار آورد. بررسی پارادوکس‌ها معمولاً نتایجی سلبی در قلمروهای مربوطه به بار می‌آورد و منجر به بازنگری و اصلاحاتی اساسی در آنها می‌شود. به علاوه چنان‌که می‌دانیم پارادوکس‌ها از این حیث پیشران ایجاد محصولات مهمی در حوزه‌هایی چون نظریه مجموعه‌ها و نظریه‌های معنا طی قرن بیستم بوده‌اند.[۱]

اگر هدف خلاصی از پارادوکس‌ها باشد، گام اول یافتن نحوه نفوذ پارادوکس‌ها به حوزه مربوطه است. با دو رویکرد متفاوت می‌توان به این جست‌وجو پرداخت: رویکرد موردی یا موضوع محور و رویکرد جامع و ساختار محور. رویکرد اول هر پارادوکس را در بستر موضوعی خودش می‌بیند و رخنه را نیز در تعاریف و مفاهیم همان بستر موضوعی می‌یابد. می‌توان با مسامحه مدعی شد اکثر پارادوکس‌های اساسی یا نظریه مجموعه‌ای هستند، یا معناشناختی و یا معرفتی. و هر کدام هم در همان بستر موضوعی قابل بررسی است.[۲]

مثلاً پارادوکس معروف راسل را در نظر بگیرید که به بیانی ساده چنین است: مجموعه R را در نظر بگیرید که اعضایش همه مجموعه‌هایی غیر خود عضوند، یعنی $R=\{x| x\notin x\}$. حال می‌پرسیم: آیا $R\in R$ است؟ می‌توان دید که هر پاسخی معکوسش را ایجاب می‌کند: اگر $R\in R$ باشد، پس R عضو خودش است، پس در شرط تعریف R صدق نمی‌کند و در R نیست، پس $R \notin R$. از طرفی اگر داشته باشیم $R \notin R$ پس R در شرط تعریف خودش صدق می‌کند و در واقع داریم $R\in R$.[۳]

1. Cantini, A., "Paradoxes and Contemporary Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), 2014, p.1.
2. Bolander, "Self-Reference", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, pp.2-5.
3. Cantini, "Paradoxes and Contemporary Logic", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, p.5.

رویکرد موضوع محور با حمله به مفاهیم اساسی دخیل در پارادوکس، یعنی مجموعه و عضویت با آن روبه‌رو می‌شود و نتیجه می‌گیرد خاصه عضو خود نبودن خاصه مجموعه‌ساز مجازی نیست. یعنی عیب‌یابی معطوف به مفاهیم درون نظریه است و راه حل را هم اعمال اصلاحاتی در همان مفاهیم می‌داند.

در رویکرد ساختار محور اما با ساختار زیربنایی پارادوکس روبه‌روییم. مثلاً می‌توان گفت پارادوکس به دلیل وجود نوعی دور به این استدلال راه یافته. در این رویکرد اخیر موضوع پارادوکس و بافتار معنایی آن اهمیت ثانوی دارد. مهم یافتن ساختاری زیربنایی[1] یا وجود المانی مفهومی منطقی است که پارادوکس در دل آن شکل گرفته. این نگاه شمول بیشتری دارد و می‌تواند پارادوکس‌های بیشتری را زیر چتر واحدی گرد آورد، یا به بیان بهتر مدعی یا امیدوار به حصول چنین هدفی است. نوشتار فعلی هم روی این رویکرد تحت عنوان رویکرد «تشخیصی ساختار محور» متمرکز خواهد شد.

پیشنهادهای تشخیصی ساختار محور معمولاً مدعی جامعیت هستند، یعنی همه کمابیش مدعی هستند که همه پارادوکس‌ها به نوعی متضمن آن‌چه به عنوان عیب‌یابی مطرح شده هستند و همین دلیل پارادوکسیکال بودن آنها است. این رویکرد پیشینه‌ای غنی در پژوهش‌های پارادوکس محور دارد و گزینه‌های متعددی برای آن پیشنهاد شده است. گزینه‌هایی که مفاهیمی چون دور معیوب، تعاریف غیر حملی، خوش بنیاد نبودن، تسویر نامحدود، مفروض گرفتن بی‌نهایت واقعی، خود بازتولیدگری و گسترش نامتعین را در بر می‌گیرد.

دو دسته مهم از این گزینه‌ها عبارتند از یکی پیشنهادهایی که حول محور مفهوم دور یا خود ارجاعی شکل گرفته‌اند و دسته دوم پیشنهادهایی که مبتنی بر مفهومی هستند که به اعتبار مایکل دامت با عنوان «گسترش‌پذیری نامتعین»[2] از آنها یاد خواهیم کرد. نوشتار

1. Underlying Structure
2. Indefinite Extensibility

حاضر در جهت تحلیل و بررسی این دو پیشنهاد و در انتها مقایسه و یافتن ربط و نسبت احتمالی بین آنها پیش خواهد رفت.

پیشنهادهای عیب‌یابانه موازی

قبل از پرداختن به دو پیشنهاد مذکور، لازم است با طرح موضوعی جهت بحث را مشخص‌تر کنیم. بررسی مختصر نشان می‌دهد که این دو دسته پیشنهاد به انحاء گوناگون برای توضیح پارادوکس‌هایی مشترک ارائه شده‌اند. پارادوکس‌های متعددی هم بر مبنای خود ارجاعی تبیین شده‌اند و هم بر مبنای دخیل بودن مفهومی از نامحدود بودن.

دو نمونه بارز آن هم پوانکاره و راسل‌اند. پوانکاره در جست‌وجوی منشاء پارادوکس‌ها به دو نتیجه متمایز رسید. یکی این که هر استدلال حاوی دور معیوب منجر به تناقض می‌شود. دیگر این که پذیرفتن بی‌نهایت واقعی ما را دچار پارادوکس می‌کند. همین امر در مورد راسل هم صادق است. او در برنامه پارادوکس پژوهشی مفصلش در سه مسیر متفاوت حرکت کرد که دو تا از آنها تقریباً نزدیک به پیشنهادهای پوانکاره هستند. او هم پیشنهاد دور معیوب پوانکاره را پذیرفت و آن را با بیانی مدون تحت عنوان «اصل دور معیوب»[1] ارائه کرد و هم در مسیری متفاوت، پارادوکس‌ها را متضمن نوعی نامحدود بودن ساختاری دانست و این نتیجه رسید که پارادوکس‌ها ناشی از نوعی «خود بازتولیدگری»[2] می‌باشند.[3]

در هر حال همین همگرایی دو پیشنهاد حاکی از ارتباط ساختاری احتمالی بین آنهاست. بحث آتی هم در جهت تحلیل تفصیلی دو پیشنهاد مذکور و سپس یافتن ارتباط

1. Principle of Vicious Circle
2. Self Productivity
3. Shapiro, S. (Ed.),. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005; Feferman, Predicativity, pp.592-594.

میان آنها دنبال خواهد شد. ما نشان خواهیم داد که این دو پیشنهاد در واقع به نوعی معادل هستند و می‌توان هر یک را از دیگری استخراج کرد.

خودارجاعی[۱]

توصیف غیر صوری

مراد ما از خودارجاعی در این نوشتار محدود به حوزه زبانی است «از منظر زبانی خود ارجاعی برای دلالت بر جمله‌ای استفاده می‌شود که به خودش یا مرجع خودش ارجاع دهد».[۲] جمله‌ای که یکی از عناصر سازنده خودش است یک جمله خود ارجاع‌گر است. البته در این جملات ارجاع نه به خود جمله بلکه به نام یا مرجعی از جمله انجام روی می‌دهد. برای ایضاح بهتر مثالی می‌آوریم. یکی از معروف‌ترین جملات خود ارجاع‌گر جمله "دروغگو"[۳] به این مضمون است «این جمله دروغ است». در این جمله مرجع عبارت "این جمله" خود جمله است و خود جمله یکی از عناصر سازنده‌اش است. با بسط جمله مذکور به صورت: «"این جمله دروغ است" دروغ است» ماهیت خود ارجاع دهنده آن مشهودتر می‌شود.

«توجه فلسفی به خود ارجاعی تا حد زیادی حول محور پارادوکس‌ها است».[٤]

پیشتر هم گفتیم که یکی از پیشنهادهای اصلی عیب‌یابانه در مورد پارادوکس‌ها مربوط به خود ارجاعی است. مدعای این دسته پیشنهادها در بیانی ابتدایی این است: استدلال A پارادوکسیکال است چون متضمن خود ارجاعی است. در این قسمت ابتدا این مدعا را خواهیم کاوید.

1. Self Reference
2. Bolander, “Self-Reference”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, p.1.
3. Liar Sentence
4. Bolander, Th., “Self-Reference”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, p.1.

می‌توان دید که در جمله دروغگو با پرسش از صدق آن به تناقض خواهیم رسید. چه هر پاسخی به این سؤال معکوسش را در پی دارد. رأی به کذب آن به معنی تصدیق محتوای اظهاری آن و در نتیجه به منزله رأی به صدق آن است و برعکس. از این تناقض چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ این استدلال هم متضمن دور است و هم پارادوکسیکال است. اما آیا می‌توان نتیجه گرفت که «استدلال پارادوکسیکال است چون متضمن دور است»؟

اولین پاسخ ایجابی متعلق به پوانکاره است، او چندین پارادوکس را بررسی کرد تا فصل مشترکشان را استخراج کند، اولین نتیجه حاصل این بود که در هر پاردوکس یک دور معیوب در تعریف مورد نظر به چشم می‌خورد و دور معیوب ناشی از تلاش برای تولید یا تعریف شیء در یک کلیت با ارجاع به همان کلیت اولیه و مفروض گرفتن آن است.[1] به عبارتی پوانکاره دور معیوب را در تعریف غیر حملی[2] به کار رفته می‌دید. راسل هم در مقاله "پارادوکس‌های منطق"(۱۹۰۶) تحت تأثیر پوانکاره دوری بودن معیوب[3] را به عنوان منشاء پارادوکس‌ها پذیرفته و آن را چنین بیان می‌کند: «من تشخیص می‌دهم که کلید پارادوکس‌ها را باید در پیشنهاد دور معیوب یافت، هم‌چنین این حقیقت را در اعتراض آقای پوانکاره به کلیت درست می‌بینم، یعنی هر آن‌چه که به نحوی با همه یا هر یا بعضی از اعضای یک کلاس مربوط است نباید خودش یکی از اعضای آن کلاس باشد».[4] البته راسل تلاش کرد صورت بندی منطقی مناسبی به بیان غیر صوری پوانکاره بدهد و در نهایت "اصل دور معیوب"[5] به اختصار VCP را با این صورت بندی ارائه داد:

1. Shapiro, S. (Ed.),. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, p.591.
2. Impredicative
3. Viciously Circular
4. Shapiro, (Ed.),. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, p.592.
5. Vicious Circle Principle

«هر چیزی که شامل متغیرهای مقید باشد، نباید خودش جزء مقادیر ممکن آن متغیرها باشد (یک متغیر مقید نمی‌تواند خودش مقدار یک تابع باشد)»[1] به بیان منطقی وقتی می‌خواهیم یک عنصر از کلاس X را تعریف کنیم برای تعریف آن نمی‌توانیم از سور روی خود کلاس X استفاده کنیم.[2] می‌بینیم که تعبیر غیر حملی از دور یا خود ارجاعی در صورت‌بندی راسل هم به چشم می‌خورد.

در هر حال این‌که راسل و پوانکاره در بررسی پارادوکس‌ها همه آنها را متضمن دور یا نوعی غیر حملی بودن تشخیص دادند چندان مورد بحث نیست. اما آن‌چه قابل بررسی است نتیجه‌گیری آنها است مبنی بر اینکه منشاء پارادوکس‌ها همین دوری بودن یا غیر حملی بودن است. این نتیجه را در قسمت بعد بررسی خواهیم کرد.

مکانیزم تولید پارادوکس، مبتنی بر خود ارجاعی

یک پیشنهاد عیب‌یابانه ساختار محور وقتی عملیاتی می‌شود که بتواند زیر ساختاری صوری برای تولید پارادوکس‌ها در بستر پیشنهادی‌اش ارائه دهد. یکی از قدیمی‌ترین ایده‌های استخراج پارادوکس به صورت مکانیکی به راسل بر می‌گردد. او با الهام از روش اثبات قطری‌سازی کانتور در اثبات قضیه معروفش در مورد مجموعه توانی تعدادی پارادوکس را استخراج کرد و نتیجه گرفت که پارادوکس‌ها ساختار زیر بنایی مشترکی دارند. حال یکی از ساختارهایی را که مدعی است بیشتر پارادوکس‌های خود ارجاعی را پوشش می‌دهد بررسی می‌کنیم.

1. Russell, B., “On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types”, *Proceedings of the London Mathematical Society 4*, 1906, p.634.
2. Cantini, “Paradoxes and Contemporary Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, p.10.

این ساختار را که در سال ۱۹۹۴ پریست پیشنهاد داد شمای بستار[۱] نام دارد، البته پریست خود آن را در ابتدا با الهام از راسل شمای برآورنده شرایط راسل[۲] نامید. ساختار شمای بستار به این شرح است: اگر سه گانه‌ای شامل دو محمول P و Q و یک تابع جزئی مانند δ داشته باشیم که شرایط زیر را بر قرار سازند می‌توانیم یک پارادوکس داشته باشیم:

۱- P یک محمول باشد و $W=\{x| P(x)\}$ باشد.

۲- Q یک محمول باشد به نحوی که $Q(W)$ برقرار باشد.

۳- δ یک تابع جزئی روی زیر مجموعه‌های W مانند y باشد که Q برای آنها هم بر قرار است؛ یعنی $Q(y)$ درست است؛ و داریم:

الف. $\delta(y) \notin y$

ب. $\delta(y) \in W$

می‌توان دید اگر y را برابر W قرار دهیم، این کار مجاز است چون y یک زیر مجموعه از W است و در شرایط بالا صدق می‌کند، تناقضی به این نحو خواهیم داشت: $Q(W)$ طبق شرط ۲ برقرار است. و لذا طبق ۳- الف داریم $\delta(W) \notin W$ و طبق ۳- ب داریم $\delta(W) \in W$ که تناقض در آن مشهود است. یعنی می‌بینیم که سه تایی (P,Q,δ) تحت شرایط بیان شده تولید تناقض می‌کنند.[۳]

با نگاهی دقیق‌تر به ساختار شمای بستار می‌بینیم که محمول‌های P و Q و نیز تابع δ ظاهراً دلخواه هستند، ولی برای ایجاد پارادوکس باید به نحو مناسبی انتخاب شده باشند. ولی خود ارجاعی در ساختار بارز است و از طریق مفروض گرفتن مجموعه یا کلیتی به نام W که مجموعه مصادیق محمول P است و سپس زیر مجموعه‌های آن یعنی y ها ایجاد می‌شود. زیرمجموعه‌هایی که تفاوتشان با مجموعه اصلی W در این است که

1. Inclusure schema
2. Russell Qualified Schema
3. Bolander, Th., “Self-Reference”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, p.6.

نگاشتشان تحت تابع δ ذیل مجموعه اصلی اولیه یعنی W قرار می‌گیرد ولی ذیل خودشان قرار نمی‌گیرد. همین تفاوت بین مجموعه مادر و زیر مجموعه‌هایش کلید خود ارجاعی و تولید پارادوکس است.

ذکر یک نمونه

می‌توان نشان داد که تقریباً همه پارادوکس‌هایی که راسل و پوانکاره منشاء آنها را دور معیوب می‌دانستند در این شما قابل استخراج است. به ذکر یک نمونه در این‌جا اکتفا می‌کنیم.

یکی از قدیمی‌ترین پارادوکس‌های نظریه مجموعه‌ای پارادوکس بورالی– فورتی است که در مورد مجموعه‌های مرتب مانند مجموعه اعداد ترتیبی است. بیان کلاسیک این پارادوکس به شرح زیر است:

۱. به هر مجموعه خوش ترتیب، یک عدد ترتیبی یکتا نسبت داده می‌شود.

۲. از طرفی طبق قضیه‌ای مشهور در نظریه مجموعه‌ها هر مجموعه‌ای از اعداد ترتیبی خوش ترتیب است و مجموعه همه اعداد ترتیبی مانند β که $\beta < \alpha$ است دارای عدد ترتیبی α است.

۳. حال اگر مجموعه همه اعداد ترتیبی را در نظر بگیریم، طبق ۲ این مجموعه مرتب است و طبق ۱ دارای یک عدد ترتیبی است که آن را ω می‌نامیم. ω طبق ۲ از همه اعضای این مجموعه یعنی همه اعداد ترتیبی بزرگ‌تر است.

۴. از طرفی ω خودش یک عدد ترتیبی است پس باید عضوی از مجموعه همه اعداد ترتیبی باشد. پس ω که عدد ترتیبی مجموعه همه اعداد ترتیبی است با یکی از اعضای آن برابر است که این متناقض با ۳ است.

حال ببینیم این پارادوکس یک پارادوکس خود ارجاعی است یا خیر. و اگر بله ساختار شمای بستار آن را بیابیم.

با تأمل در استدلال بالا می‌توان دید که تعریف ω یک تعریف خود ارجاع‌گرانه یا غیرحملی است: ω عدد ترتیبی مجموعه همه اعداد ترتیبی است. در تعریف ω به کلیتی اشاره شده و روی آن سور به کار رفته که خود از قبل ω را هم در بردارد و این به وضوح مصداقی از یک تعریف غیرحملی است. حال ببینیم سه‌گانه (P,Q,δ) برای تشکیل پارادوکس بورالی_فورتی تحت شمای بستار چیست؟

اگر محمول P را عدد ترتیبی بون و محمول Q را مجموعه خوش ترتیب بودن بگیریم داریم:

۱. مجموعه $W=\{x| \text{ x is Ordinal}\}$ ؛ یعنی مجموعه همه اعداد ترتیبی وجود دارد. و $Q(W)$ برقرار است. یعنی W خوش ترتیب است.

۲. از طرفی هر زیر مجموعه مانند y از W هم یک مجموعه خوش ترتیب است یعنی $Q(y)$ برقرار است.

۳. حال اگر δ را تابعی به نام ord تعریف کنیم که هر مجموعه مرتب را به رتبه[1] آن می‌برد داریم:

$\delta(y) \Rightarrow \text{ord}(y) \in W$. یعنی رتبه هر مجموعه مرتب خودش یک عدد ترتیبی است.

ولی $\text{ord}(y) \notin y$ یعنی عدد ترتیبی یک مجموعه مرتب عضو خود آن مجموعه مرتب نیست.

حال قرار دادن $y=W$ به معنی طرح این پرسش است: رتبه مجموعه همه اعداد ترتیبی عضو این مجموعه هست یانه؟ جواب مثبت یعنی رتبه این مجموعه خودش یک عدد ترتیبی است و باید عضو مجموعه همه اعداد ترتیبی باشد ولی از طرفی رتبه یک مجموعه طبق تعریف عضو خود آن مجموعه نیست پس رتبه این مجموعه هم، نمی‌تواند عضو خود آن باشد. و پارادوکس به این ترتیب نتیجه می‌شود.

---

1. Order Type

ارتباط خود ارجاعی با پارادوکس- نگاهی دقیق‌تر

اکنون می‌توان به این پرسش پرداخت: چه چیزی باعث پارادوکسیکال بودن این ساختار شده؟ صرف دوری بودن؟ تأمل در ساختار شمای بستار نشان می‌دهد که پارادوکس در واقع معلول محمول P است که مجموعه مصادیقش مجموعه W را مفروض می‌دارد. W تنها مصداقی از محمول Q است که تحت نگاشت δ باز به مصداقی از P (همان محمول اول) تبدیل می‌شود، بقیه مصداق‌های Q این‌گونه نیستند. به عبارتی P محمولی است که مجموعه همه مصداق‌هایش، در صورت وجود، کلیتی ویژه و تحت شرایطی بسته می‌سازد ولی مجموعه‌های جزئی از مصداق‌هایش کلیتی به آن نحو بسته ایجاد نمی‌کنند و همین بسته بودن همه مصادیق محمول P تحت شرایط مزبور منشاء پارادوکس است. یا شاید مفروض گرفتن وجود چنین کلیتی به پارادوکس انجامیده.

دیدیم که صرف دوری بودن پارادوکس را به همراه نداشته است بلکه دوری بودن در ساختار مذکور پارادوکس‌زا شده است. می‌توان تعاریف دوری تصور کرد که در ساختار شمای بستار قرار نگیرند و پارادوکسی هم ایجاد نکنند، لذا تقلیل ساختار شمای بستار به عنوان یک ساختار پارادوکس‌زا به یک ساختار غیر حملی و بعد غیر حملی بودن یا خود ارجاعی را منشاء پارادوکس دانستن می‌تواند مصداق راه حلی زیادی سخت‌گیرانه تلقی شود، به خصوص اگر تبدیل به اصل یا توصیه‌ای برای اجتناب از پارادوکس‌ها شود. چه می‌تواند نمونه‌های بی خطر و غیر پارادوکس‌زایی را هم از حوزه محمول‌ها یا مجموعه‌های مورد پذیرش ما خارج کند.

اما در هر حال این درست است که بیشتر پارادوکس‌های منطقی[1] به نحوی غیر حملی یا خود ارجاعی هستند و مکانیزم پیشنهادی در شمای بستار قادر به تولید دسته وسیعی از پارادوکس‌های شناخته شده می‌باشد. این قسمت را فعلاً با همین نتیجه به پایان می‌بریم.

1. logical paradoxes

گسترش‌پذیری نامتعین

توصیف و پیشینه

دومین گزینه‌ای که در تشخیص منشاء پارادوکس‌ها به آن می‌پردازیم مفهومی است با نام گسترش‌پذیری نامتعین.

گسترش‌پذیری نامتعین صفت یا خاصه‌ای است که به یک مفهوم اطلاق می‌شود. برای به دست دادن شهودی ابتدایی و درکی اولیه از این مفهوم می‌توان گفت یک مفهوم را نامتعیناً گسترش‌پذیر می‌خوانیم اگر نتوان همه مصادیق آن را زیر چتری واحد گرد آورد و کلیتی معین از آن حاصل کرد. یا هرگاه فرض کنیم همه مصادیق را در یک کل گرد آورده‌ایم همیشه بتوان به نحوی به کمک همان کلیت مصداق جدیدی از مفهوم مزبور تولید کرد که در کلیت اولیه حضور نداشته است.

این مفهوم بیشتر به مایکل دامت منسوب است ولی نمی‌توان او را کاملاً مبدع آن دانست. برای تحصیل توصیفی روشن‌تر سعی خواهیم کرد ابتدا در خلال بستری کمابیش تاریخی شرحی غیرصوری از آن به دست دهیم. علاوه بر دامت پیشینه تکوینی و سر چشمه‌های شکل‌گیری این مفهوم به خصوص در ارتباط با پارادوکس‌ها را می‌توان بیشتر از همه در کارهای سه نفر یافت: کانتور، پوانکاره و راسل.

کانتور میان دو نوع تکثر[1] تمایز می‌گذارد: آنهایی که کنار هم قرار گرفتن اعضایشان منجر به تناقض می‌شود و آن را تکثر مطلقاً نامتناهی یا ناسازگار می‌نامد و آنهایی که گرد آمدن اعضا تناقضی ایجاد نمی‌کند. و آن را تکثر سازگار یا مجموعه می‌نامد.[2]

به احتمال زیاد کانتور در آن زمان دو پارادوکس مهم یعنی پارادوکس بورالی‌فورتی و نیز پارادوکس یافته خودش[1] را در نظر داشته و مجموعه‌های نامتناهی اعداد ترتیبی و

1. Multiplicity
2. Shapiro, S., Wright, C., *All Things Indefinitely Extensible-Absolute Generality*, Oxford University Press on Demand, 2006, p.2.

اصلی الهام بخش شکل‌گیری این تمایز نزد او بوده است. شاید بتوان این حدس اولیه را مطرح کرد که مفهوم بی‌نهایت در این تمایز کانتور به نوعی نطفه پارادوکس‌ها قلمداد شده، هر چند نمی‌توان این ایده را خیلی پیش برد چون کانتور یکی از چهره‌های اصلی موافق با بی‌نهایت واقعی شناخته می‌شود. در هر حال می‌توان به طور خلاصه یکی از ریشه‌های شکل‌گیری مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین را نوعی خاص از کلیت‌ها یا تکثرهای نامتناهی دانست.

پوانکاره در مواجهه با پارادوکس‌ها علاوه بر دور معیوب، یک منشاء متمایز دیگر را هم مطرح کرد: او می‌گوید منشاء هر پارادوکس پذیرفتن بی نهایت واقعی است و روشن است که پوانکاره در مقایسه با کانتور و کانتوری‌ها مخالف سرسخت‌تری نسبت به بینهایت بالفعل به حساب می‌آید، حملات گزنده کلامی او به کانتوری‌ها خود گواه این مطلب است. او در جایی می‌گوید: «بی‌نهایت واقعی وجود ندارد، ولی کانتوری‌ها آن را پذیرفتند و دچار تناقض شدند».[2]

همین دو مورد برای تأیید این ادعا که از منظر یا مناظری خاص مفهومی از بینهایت می‌تواند موجد پارادوکس باشد کافی است، خود عبارت "گسترش‌پذیری نامتعین" هم به طور ضمنی طنینی از میل کردن به سوی بی‌نهایت را به همراه دارد. و همین می‌تواند مجوز جای دادن این ایده در زمره تشخیص‌های مبتنی بر بی‌نهایت باشد.

دیگر ریشه مهم این مفهوم را باید در کارهای راسل جست. او در یکی از سه پیشنهاد تشخیصی‌اش برای منشاء پارادوکس‌ها مفاهیم "خود بازتولیدگر" را معرفی کرد، او می‌نویسد: «پارادوکس‌ها نتیجه این واقعیت هستند که چیزی وجود دارد که ما فرآیندها و رده‌های خودباز تولیدگر می‌نامیم. یعنی خاصه‌هایی هستند که با فرض هر رده‌ای از اشیا که همه‌شان واجد آن خاصیتند، همیشه بتوان شیء جدیدی تعریف کرد که واجد

۱. پارادوکس کانتور در مورد اعداد اصلی

2. Shapiro, *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, p.598.

خاصه مورد بحث باشد. پس هرگز نمی‌توان همه اشیا واجد آن خاصه را در یک کل گردآورد، چرا که هرگاه فکر کنیم همه را گرد آورده‌ایم، کلکسیون ما اقدام به تولید شیء جدیدی واجد همان خاصه می‌کند».[1]

ولی کسی که اصطلاح "گسترش‌پذیری نامتعین" را با تعبیری شبیه به تعبیر راسل برای اولین بار به کار برد مایکل دامت است. او ضمن ارجاع به متن فوق از راسل می‌نویسد: «مفهوم نامتعینا گسترش‌پذیر مفهومی است که اگر بتوان از کلیتی که همه اعضایش ذیل آن واقع می‌شوند، مفهومی معین تشکیل داد، بتوان با ارجاع به آن کلیت، کلیت بزرگ‌تری تعریف کرد که همه اعضای آن هم ذیل مفهوم مزبور واقع شوند».[2]

تأمل در دو تعبیر راسل و دامت به ترتیب نکاتی را روشن می‌سازد. در تعبیر "خودبازتولیدگری" راسل به امکان تولید شیء یا مصداق جدید اشاره شده، دامت هم مفهوم نامتعینا گسترش‌پذیر را واجد خاصه‌ای به نام اصل گسترش[3] می‌داند که فرایندیست که از کلیتی مفروض از مصادیق مفهوم مربوطه آغاز می‌کند و شیء جدیدی به دست می‌دهد که هم‌چنان ذیل آن مفهوم واقع می‌شود ولی در کلیت اولیه حضور ندارد. در ادامه این بخش خواهیم کوشید ابتدا مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین را تا جای ممکن تحلیل و ایضاح کنیم و سپس ربط ونسبت احتمالی آن با پارادوکس‌ها را بیابیم.

ابتدا برای به دست دادن درکی ملموس‌تر با دو مثال آغاز خواهیم کرد:

مفهوم "مجموعه‌ای که عضو خودش نیست" را در نظر بگیرید و فرض کنید تعدادی از چنین مجموعه‌هایی را نزد هم گرد آوریم. به وضوح می‌توان دید که گرد آمده‌ای از این مجموعه‌ها خود یک مجموعه جدید است که عضو خودش نیست، پس در مفهوم مذکور

1. Russell,"On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types", *Proceedings of the London Mathematical Society 4*, p.1.
2. Dummett, M., *The Seas of language*, Oxford, Oxford University Press, 1993, p.441.
3. Principle of Extension

می‌گنجد و مصداق جدیدی از آن است بدون آن‌که در کلیت اولیه واقع شده باشد. پس این مفهوم یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر یا خود باز تولیدگر است.

حال به مفهوم "عدد ترتیبی" توجه کنید. برای منظور فعلی این مفهوم را به صورت رتبه یک مجموعه خوش‌ترتیب در نظر می‌گیریم. طبق این تعبیر هر عدد ترتیبی رتبه ترتیبی[1] یک مجموعه خوش‌ترتیب[2] است. از طرفی می‌دانیم که هر مجموعه‌ای مفروض از اعداد ترتیبی خودش یک مجموعه خوش ترتیب است و بنابراین دارای یک رتبه ترتیبی است که طبق فرض اولیه ما یک عدد ترتیبی است که از اعضای مجموعه اولیه نیست. پس مفهوم "عدد ترتیبی بودن" هم یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر است.[3]

هرچند این شرح غیر صوری به همراه مثال‌های بیان شده مفهوم را تا حدودی روشن کرده، ولی برای این‌که بتوانیم به هدف اصلی این بخش یعنی بررسی مدعای راسل و دامت دال بر پارادوکس‌زا بودن مفاهیم خود بازتولیدگر یا نامتعیناً گسترش‌پذیر برسیم لازم است بتوانیم بیانی تا حد امکان صریح‌تر و مدون‌تر برای این مفهوم ارائه کنیم.

توصیف صریح

در این قسمت خواهیم کوشید بیانی صریح از مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین به دست دهیم و مسیری مشابه با مسیر رایت و شاپیرو در مقاله مشترک "همه چیزهای نامتعیناً گسترش‌پذیر"[4] را دنبال خواهیم کرد.

برای شروع از بیان دامت و اصل گسترش آغاز می‌کنیم. اصل گسترش می‌گوید باید بتوان به نحوی از کلیتی مفروض حاصل از تعدادی از مصادیق یک مفهوم به

1. Order Type
2. Well Ordered
3. Shapiro & Wright, *All Things Indefinitely Extensible- Absolute Generality*, pp.5-6.
4. Ibid.

مصداق جدیدی از آن رسید و سپس کلیتی از مصادیق، بزرگ‌تر از کلیت اولیه تشکیل داد. یک مفهوم نامتعیناً گسترش پذیر متضمن اصل گسترش است. حال ببینیم چگونه می‌توان به بیانی صوری یا ریاضی از این اصل رسید.

اگر P مفهوم مورد نظر باشد، شرط گسترش‌پذیری نامتعین آن این است که فرایندی حافظ _P[1] وجود داشته باشد که از جمعی از مصادیق P، مصداق جدیدی از آن تولید کند. این فرایند را به بیان ریاضی با تابعی مانند F می‌توان محقق کرد. پس ادعای گسترش‌پذیری مفهوم P معطوف خواهد بود به زیر کلیت‌هایی[2] از آن و توابعی مانند F از آن زیرکلیت‌ها به مصادیق جدیدی از P. یعنی آن‌چه نیاز داریم یافتن تابع F است و زیرکلیت‌های لازم برای شروع.

رایت و شاپیرو پیشنهاد می‌دهند که در ابتدا به طور موقت به تعریفی نسبی شده[3] برسیم. یعنی P را در نسبت با مفهومی دیگر مانند Π نامتعیناً گسترش‌پذیر تعریف کنیم. با این وصف چنین خواهیم داشت: فرض کنید P یک مفهوم قابل اطلاق بر آیتم‌هایی از نوع τ باشد و Π هم یک مفهوم قابل اطلاق بر مفهوم‌های τ ها باشد. یعنی Π یک مفهوم مرتبه دوم باشد. می‌گوییم P در ارتباط با Π نامتعیناً گسترش‌پذیر است اگر و تنها اگر تابعی مانند F از مجموعه آیتم‌هایی از نوع P به آیتم‌هایی از نوع τ وجود داشته باشد به نحوی که اگر Q هر زیر مفهوم یا زیر کلیتی از P باشد که ذیل Π واقع شود، یعنی ΠQ برقرار باشد، داشته باشیم:

۱. FP هم ذیل مفهوم P واقع شود. یعنی P تحت نگاشت F بسته باشد.

۲. ولی FQ ذیل Q واقع نشود. یعنی مفهوم Q تحت نگاشت F بسته نباشد.

۳. ‘Q ذیل Π واقع شود، که ‘Q مفهومی است که مصادیقش صرفاً شامل مصادیق Q و نیز FQ ها باشد. به بیان نظریه مجموعه‌ای $Q' = Q \cup \{FQ\}$ خواهد بود.

1. P_Conservative
2. Sub_Totality
3. Reletivized

به طور شهودی از این شرایط برمی‌آید که آن زیر مفهوم‌هایی از P که ذیل Π واقع می‌شوند، عضو بیشینه‌ای[1] ندارند. چرا که چنین زیر مفهوم‌هایی، همیشه گسترشی مانند Q' خواهند داشت که آن هم Π است. پس به این طریق توانستیم اصل گسترش را به شکلی صوری بیان کنیم. در قسمت قبل به صورت شهودی نشان دادیم که مفاهیم عدد ترتیبی و نیز مجموعه غیر خود عضو مفاهیمی نامتعیناً گسترش‌پذیر هستند. حال برای ملموس‌تر شدن ساختار بالا، می‌کوشیم آن را بر این دو مفهوم تطبیق دهیم:

اگر P مفهوم عدد ترتیبی باشد، باید Π مرتبط و نیز تابعF لازم را بیابیم. می‌گوییم کلیتی مفروض از اعداد ترتیبی مانند X، Π است اگر و تنها اگر X هم‌ریخت با یک عدد ترتیبی باشد یا به عبارتی آن عدد رتبه ترتیبی آن باشد. حال اگر FX تالی رتبه X باشد، نشان خواهیم داد که مفهوم عدد ترتیبی در نسبت با خاصه هم‌ریخت با یک عدد ترتیبی بودن، نامتعینا گسترش‌پذیر است،[2] زیرا:

۱. شرط یک ملزم می‌دارد که FX ذیل P واقع شود، یعنی تالی[3] رتبه[4] X ، یک عدد ترتیبی باشد، که طبق بسته بودن اعداد ترتیبی تحت عمل تالی برقرار است.

۲. FX نباید X باشد، یعنی تالی رتبه مجموعه‌ای معین از اعداد ترتیبی نباید عضوی از مجموعه اولیه باشد، که این هم شرطی صادق است.

۳. حال گسترش یافته X تحت F یعنی X' را تشکیل می‌دهیم. به راحتی می‌توان دید که X' مجموعه‌ای خواهد بود از اعداد ترتیبی متشکل از اعضای X به همراه تالی رتبه X ، یعنی X' متشکل از اعداد ترتیبی بوده و خودش نیز هم ریخت با یک عدد ترتیبی است، یعنی X'، Π است.

1. Maximal member
2. Shapiro & Wright, *All Things Indefinitely Extensible- Absolute Generality*, p.17.
3. Successor
4. Order type

دیدیم که عدد ترتیبی بودن در نسبت با خاصه هم ریخت با یک عدد ترتیبی بودن، یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیراست، در ادامه از این مطلب برای استنتاج پارادوکس بورالی_فورتی استفاده خواهیم کرد.

و اما مجموعه غیر خود عضو: اگر P را چنین مجموعه‌ای بودن بگیریم، و گرد آمده‌ای از مصادیق P را X بنامیم و بگوییم X، Π است اگر و تنها اگر بتوان Xها را در یک مجموعه جای داد، و حال اگر FX را دقیقاً همین مجموعه متشکل از Xها بگیریم، یعنی {FX={xl Xx. در این صورت مفهوم مجموعه غیر خود عضو بودن در نسبت با خاصه قابل مجموعه شدن، نامتعینا گسترش‌پذیر خواهد بود.[1] باز برای روشن‌تر شدن مطلب شرایط ساختار بالا را بر این مفهوم تطبیق خواهیم داد.

۱. طبق شرط یک FX باید ذیل P واقع شود یعنی مجموعه متشکل از گرد آمدن اشیائی که قابل گردآمدن به صورت یک مجموعه هستند، نباید عضو خودش باشد. روشن است که این شرط بر قرار است.

۲. طبق شرط دو FX نباید X باشد، یعنی مجموعه متشکل از Xها، خودش یکی از X ها نخواهد بود.

۳. و اما در مورد شرط سه، X' یعنی گسترش یافته X عبارت خواهد بود از X U {FX} یعنی {{xl Xx}} X U که بنا به تعریف عمل اجتماع در نظریه مجموعه-ها و بسته بودن آن، یک مجموعه یا مقوم یک مجموعه است، یعنی ذیل Π واقع می‌شود.

نشان دادیم که مفهوم مجموعه غیر خود عضو بودن هم درنسبت با خاصه قابل مجموعه شدن یا مقوم یک مجموعه بودن، نامتعیناً گسترش‌پذیر می‌باشد. از این مطلب هم برای استخراج پارادوکس راسل استفاده خواهیم کرد.

---

1. Shapiro & Wright, *All Things Indefinitely Extensible- Absolute Generality*, p.19.

تا اینجا توانستیم تعریفی صریح هرچند نسبی شده برای گسترش‌پذیری نامتعین یک مفهوم به دست آوریم. حال باید بتوانیم از قید نسبی بودن موجود در تعریف خلاص شویم یعنی بتوانیم تعریفی از گسترش‌پذیری مفهوم P بدون ارتباط با Π به دست آوریم. لذا تعریف می‌کنیم: مفهوم P مطلقاً گسترش‌پذیر نامتعین است، اگر مفهوم درجه دومی مانند Π وجود داشته باشد که P در نسبت با آن گسترش‌پذیر نامتعین باشد.

در ادامه خواهیم کوشید در صورت امکان از مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین راهی به سوی پارادوکس‌ها بیابیم.

استنتاج پارادوکس از یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر

آن‌چه تاکنون در مورد گسترش‌پذیری نامتعین یک مفهوم گفتیم هیچ ملازمه‌ای با پارادوکسیکال بودن آن مفهوم نداشت، در حالی‌که این بحث در اصل برای بررسی یک مدعای عیب‌یابانه در مورد پارادوکس‌ها مطرح شد. یعنی مدعای راسل که پارادوکس‌ها را نتیجه فرایندها یا رده‌های خود بازتولیدگر می‌دانست یا مدعای دامت که پارادوکس‌ها را نتیجه مفاهیم نامتعیناً گسترش‌پذیر می‌دانست. لازمه صدق این مدعا برقراری دو شرط زیر است:

۱. از هر مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر بتوان یک پارادوکس استخراج کرد.

۲. هر پارادوکس را بتوان در قالب یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر بیان کرد.

شاید بتوان با کمی تأمل در ساختار صوری قسمت قبل شرط یک را آزمود. به عبارتی شاید بتوان با افزودن قید یا قیدهایی مناسب به آن ساختار، آن را به یک مکانیزم صوری تولید پارادوکس تبدیل کرد. دیدیم که مفهوم P نامتعیناً گسترش پذیر بود اگر می-توانستیم مفهوم مرتبه دومی مانند Π را در ارتباط با آن بیابیم که به همراه تابعی مناسب اصل گسترش را به نحو وصف شده محقق کند. در این ساختار از وجود زیر کلیت‌هایی مانند Q بهره بردیم که واجد خاصه Π بودند، منظور از زیر کلیت‌ها هم هر کلیت

مفروضی شامل گردآمده‌ای از مصادیق P است. حال اگر خاصه Π به نحوی باشد که هر زیر کلیت مفروضی از P مانند Q واجد آن باشد و نیز بتوانیم عملیات یا تابعی مانندF روی Qها تعریف کنیم که P بودن را حفظ کند، کافی است فرض کنیم همه مصادیق P را هم می‌توان در یک کلیت نهایی گرد آورد. این کلیت نهایی را با <P> نشان می‌دهیم. چون <P> هم به هرحال یک زیر کلیت است طبق فرض ما ذیل Π واقع می‌شود، پس می‌توانیم آن را در ساختار صوری فوق جایگزین Q کنیم و شرط‌های یک تا سه را بیازماییم، نتیجه چنین خواهد شد:

۱. F<P> باید ذیل P واقع شود، که طبق تعریف F صادق است. چون فرض کرده بودیم که همه مصادیق P در <P> گرد آمده‌اند پس F<P> هم در <P> جای دارد. این نتیجه با شرط ۳ در مورد گسترش هم سازگار است چرا که می‌گوید گسترش جدید یعنی {F<P>} ∪<P> هم ذیل Π قرار می‌گیرد.

۲. از طرفی قرار دادن <P> در شرط ۲ نتیجه می‌دهد که F<P> نباید ذیل <P> واقع شود. یعنی F<P> در <P> جای ندارد، که به وضوح با ۱ در تناقض است.

از استدلال صوری فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر در مفهوم مطلقاً گسترش‌پذیر نامتعین P ، خاصه Π مربوطه ویژگی ذاتی آن باشد، یعنی هر زیر کلیتی از P، Π باشد و از طرفی بتوانیم یک عمل حافظ P مناسب داشته باشیم که هر زیر کلیت Πیی از P را به مصداقی از P ببرد به نحوی که افزودن مصداق جدید به کلیت مربوطه کلیت جدیدی ایجاد کند که آن هم باز Π باشد، می‌توانیم وجود یک پارادوکس را از آن مفهوم نتیجه بگیریم. ولی اولین شرط اعتبار مدعای بیان شده این بود که از هر مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر بتوان یک پارادوکس استخراج کرد. این امر بدین معنا است که خاصه‌ای که مفهومی را نامتعینا گسترش‌پذیر می‌کند باید ذاتی آن مفهوم باشد، یعنی بر هر زیر کلیتی از آن قابل اطلاق باشد. به عبارت دیگر این گزاره صادق باشد: مفهوم P به طور مطلق نامتعیناً گسترش‌پذیر است اگر و تنها اگر مفهوم مرتبه دوم Π وجود داشته باشد که P در

نسبت با آن گسترش‌پذیر نامتعین باشد و Π ذاتی P باشد. تعیین صدق این گزاره خود پژوهشی دیگر را می‌طلبد، لذا این بحث را در همین جا متوقف می‌کنیم.

اما آزمودن شرط دوم مدعا، یعنی قابلیت بیان هر پارادوکس در قالب یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر، ساده‌تر است. اولاً اگر بتوان مثال نقضی یعنی پارادوکسی یافت که قابل وصف در این قالب نباشد، شرط رد شده است. اما حتی اگر هم مثال نقضی نداشته باشیم، یعنی همه پارادوکس‌های تاکنون شناخته شده در این قالب جای بگیرند، باز استنتاج گزاره «هر پارادوکسی در قالب یک مفهوم نامتعیناً گسترش پذیر قابل بیان است» یک استنتاج استقرایی خواهد بود، چرا که مبتنی بر تعمیم نتیجه حاصل از پارادوکس‌های تا کنون شناخته شده است و هیچ الزام منطقی وجود ندارد که در مورد پارادوکس‌هایی که احتمالاً در آینده کشف شوند هم صادق باشد.[1]

البته آن‌چه در مورد اعتبار مطلق این پیشنهاد گفته شد، اساساً شروط بررسی هر پیشنهاد عیب‌یابانه‌ای در مورد پارادوکس‌ها و از جمله پیشنهاد خود ارجاعی است که در بخش اول مطرح شد. در هر حال این که راسل بعد از بررسی تعدادی پارادوکس این پیشنهاد را مطرح کرد، نشان می‌دهد که حداقل بخش مهمی از پارادوکس‌های اساسی در منطق و به خصوص نظریه مجموعه‌ها در این قالب جای می‌گیرند و اگر به این پیشنهاد نه به صورت یک عیب‌یابی مطلق بلکه به صورت یک راه حل جزئی نگاه کنیم می‌تواند تا حدود زیادی کمک کننده و مفید باشد.

در قسمت‌های قبل نشان دادیم که هر دو مفهوم عدد ترتیبی و مجموعه نامتعیناً گسترش‌پذیر هستند. حال باید ببینیم که آیا گسترش‌پذیری نامتعین این مفاهیم به پارادوکس خواهد انجامید؟

1. Potter, M., *Set Theory and its Philospphy*, a Critical Introduction, Oxford University Press, 2004, p.40.

در مورد مفهوم عدد ترتیبی دیدیم که این مفهوم در نسبت با خاصه هم‌ریخت با یک مجموعه خوش ترتیب بودن، نامتعینا گسترش‌پذیر است. حال اگر این خاصه هم‌ریختی ذاتی مفهوم عدد ترتیبی بودن باشد، می‌توان با قرار دادن کلیتی مفروض از همه اعداد ترتیبی در شروط ساختار صوری پارادوکس مربوطه را استخراج کرد:

بنا به تعریف عدد ترتیبی می‌توان فرض کرد که کلیت اعداد ترتیبی هم‌ریخت با یک مجموعه مرتب باشد، اگر مجموعه فرضی کلیه اعداد ترتیبی را $\mathbb{W}$ بنامیم، $\mathbb{W}$ هم-ریخت با یک مجموعه مرتب و در نتیجه دارای یک رتبه است که خود طبق تعریف یک عدد ترتیبی است. از آنجا که عمل یا تابع حافظ_ P (یعنی حافظ عدد ترتیبی بودن) را تالی رتبه مجموعه مرتب قرار دادیم، پس $F\mathbb{W}$ یک عدد ترتیبی بوده و در $\mathbb{W}$ جای میگیرد. (شرط ۱).

از طرفی تالی رتبه یک مجموعه مرتب از اعداد ترتیبی، خودش در آن مجموعه جای نمی‌گیرد پس $F\mathbb{W}$ در کلیت اعداد ترتیبی یعنی $\mathbb{W}$ جای نمی‌گیرد (شرط ۲) و به تناقض می‌رسیم. این تناقض همان پارادوکس بورالی_فورتی است. پارادوکس بورالی فورتی پارادوکسیکال بودن ذاتی مفهوم عدد ترتیبی به‌مثابه رتبه ترتیبی یک مجموعه مرتب بودن را نشان می‌دهد که ناشی از گسترش‌پذیری نامتعین مفهوم عدد ترتیبی است.

مورد مفهوم مجموعه غیر خود عضو هم با توجه به گسترش‌پذیری نامتعین این مفهوم در نسبت با خاصه قابل مجموعه شدن، و در نتیجه گسترش‌پذیری نامتعین مطلق آن از آنجا که خاصه قابل مجموعه شدن، ذاتی هر گرد آمده‌ای از چنین مجموعه‌هایی است به سادگی می‌توان با استدلالی مشابه با استدلال بالا پارادوکس راسل را استنتاج کرد:

فرض کنید بتوان هر گروهی از مجموعه‌های غیر خود عضو را در یک مجموعه گرد آورد. برای کلیت مفروض همه مجموعه‌های غیر خود عضو هم می‌توان چنین کرد. اگر

کلیت همه مجموعه‌های غیر خود عضو را <S> بنامیم و تابع حافظ P را مجموعه حاصل از چنین گرد آمده‌ای تعریف کنیم، داریم:

۱. <S> قابل مجموعه شدن و F<S> طبق تعریف برابر {<S>} خواهد بود ولی {<S>} باید ذیل مفهوم اولیه ما یعنی عضو خود نبودن قرار بگیرد یعنی{ {<S>} <S> }∉ .

۲. از طرفی F<S> یعنی {<S>} نباید ذیل <S> قرار بگیرد یعنی نباید جزء مجموعه‌های غیر خود عضو باشد، پس باید {<S>} ∈ {<S> } باشد. این نتیجه در کنار (۱) پارادوکس راسل را حاصل می‌کند.

این‌که توانستیم پارادوکس‌های بورالی_فورتی و راسل را به ترتیب از گسترش‌پذیری نامتعین مفاهیم عدد ترتیبی و مجموعه غیر خود عضو نتیجه بگیریم دقیقاً مؤید همان قید صوری است که در ابتدای این قسمت برای پارادوکسیکال بودن یک مفهوم به ساختار صوری تصریح یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر اضافه کردیم. یعنی این قید که هر زیر کلیتی از مفهوم مربوطه باید ذیل مفهوم مرتبه دوم Π مرتبط قرار بگیرد. در مورد مفهوم عدد ترتیبی این خاصه مرتبه دوم عبارت بود از هم ریخت با یک عدد ترتیبی بودن و پارادوکس بورالی_فورتی از این واقعیت حاصل شد که هر گردآمده‌ای از اعداد ترتیبی خوش ترتیب بوده و همریخت با یک عدد ترتیبی است. در مورد مفهوم مجموعه غیر خود عضو هم، Π یا خاصه مرتبه دوم مرتبط قابل مجموعه شدن بود و پارادوکس راسل حاصل این واقعیت بود که هر گردآمده‌ای از چنین مجموعه‌هایی خود یک چنین مجموعه‌ای است.

در انتها اگر بخواهیم بصیرت حاصل را به همه پارادوکس‌هایی که به نوعی مرتبط با گسترش‌پذیری نامتعین هستند تعمیم ببخشیم باید بگوییم: پارادوکسیکال بودن یک مفهوم نامتعیناً گسترش‌پذیر نه نتیجه صرف گسترش‌پذیری نامتعین آن، بلکه نتیجه این واقعیت است که خاصه‌ای که آن مفهوم در نسبت با آن نامتعیناً گسترش‌پذیر شده، خود

یک ویژگی ذاتی آن مفهوم است، یعنی هر زیر کلیتی از مفهوم مزبور واجد آن خاصه یا ویژگی می‌باشد.

ارتباط بین خود ارجاعی و گسترش‌پذیری نامتعین

اکنون می‌توانیم به پرسش ابتدای نوشتار بپردازیم: این دو پیشنهاد عیب‌یابانه موازی یعنی خود ارجاعی و گسترش‌پذیری نامتعین چه نسبتی با هم دارند؟ هرچند در ابتدای امر به نظر می‌رسد با دو پیشنهاد کاملاً متفاوت و مستقل روبه‌رو هستیم، یکی مبتنی بر ساختاری انعکاسی و دیگری مبتنی بر ساختاری ناپایدار و گسترش یابنده، ولی کمی تأمل در دو ساختار قرائنی حاکی از شباهت‌ها و ارتباط‌هایی بین آن دو به دست می‌دهد.

پیشنهاد خود ارجاعی عملاً تا حد زیادی به غیر حملی بودن تعبیر می‌شود که عبارت است از مفروض گرفتن یک کلیت و ارجاع غیر مجاز به آن، چرا که از این ارجاع برای تعریف یا ساختن مصادیق همین کلیت استفاده شده است. از طرفی ایده مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین و یا به تعبیر راسل خود بازتولیدگری هم مبتنی بر مفروض گرفتن غیر مجاز یک کلیت ناپایدار و گسترش یابنده از یک مفهوم است، گسترش یابندگیی که با تولید مصادیق جدیدی از آن مفهوم با استفاده یا ارجاع به خود کلیت اولیه محقق می-شود، و همان مصادیق جدید منشاء ناپایداری آن کلیت می‌شوند. تعبیر خودبازتولیدگری راسل به خوبی خود ارجاعی ضمنی موجود در مفهوم گسترش پذیری نامتعین را منعکس می‌کند: کلیتی که مصادیق جدید خودش را باز تولید می‌کند.

از طرف دیگر هرچند در ایده گسترش‌پذیری نامتعین تأکید روی گسترش حوزه مصادیق و فرایندی برای تولید مصادیق جدید از یک مفهوم است، و این خصیصه به صراحت در ایده گسترش‌پذیری نامتعین دیده می‌شود، اما فراموش نکنیم که همین غیر حملی بودن، یعنی ارجاع انعکاسی برای تعریف یک مفهوم، یا ساخت مصداقی از آن خود به طور ضمنی نوعی خود بازتولیدگری یا گسترش یابندگی درونی را دربر دارد.

به طور خلاصه می‌توان گفت آن‌چه در هر یک از دو پیشنهاد پررنگ و شاخص است، در دیگری به طور ضمنی وجود دارد. ارجاع انعکاسی آشکار در پیشنهاد خودارجاعی در دل مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین نهفته است و بر عکس همین ارجاع انعکاسی منجر به گسترش یابندگی‌ای می‌شود که ویژگی بارز مفهوم گسترش‌پذیری نامتعین است.

در ضمن به یاد داریم که انگیزه ما از طرح این بحث، این واقعیت بود که هر دو پیشنهاد برای یافتن منشاء تعداد زیادی پارادوکس مشترک مطرح شده‌اند، و هر دو هم در تبیین آنها موفق بوده‌اند. تقریباً اکثر قریب به اتفاق پارادوکس‌های کلاسیک را می‌توان بر اساس هر دو ایده تبیین کرد. این که دو پیشنهاد عیب‌یابانه ساختار محور بتوانند مشترکاً بر یک پارادوکس تطبیق یابند، ناگزیر منجر به این استنباط خواهد شد که حتماً به نحوی رابطه‌ای میان آن دو برقرار است. نتیجه‌ای که تحلیل مفهومی که از دو ایده در بالا به دست دادیم هم بر آن صحه می‌گذارد و مؤید آن است. پس به نظر می‌رسد مجازیم نتیجه بگیریم که نه با دو پیشنهاد مجزا بلکه با یک پیشنهاد روبه‌روییم که از دو منظر یا جنبه خاص به آن پرداخته شده و یا با یک پیشنهاد با دو بیان متفاوت سروکار داریم.

نتیجه فعلی یعنی همگرا بودن و مرتبط بودن دو پیشنهاد خود ارجاعی و گسترش-پذیری نامتعین، هر چند از نظر شهودی قانع کننده و روشن است ولی از آنجا که تا اینجا بحث‌ها را علاوه بر جنبه شهودی از جنبه صوری هم دنبال کردیم، مناسب است اینجا هم نتیجه را در قالبی صوری بیازماییم و استدلالی صوری برای آن ارائه دهیم.

در بحث خود ارجاعی از ساختار صوری پیشنهادی پریست به نام شمای بستار بهره بردیم و در گسترش‌پذیری نامتعین از ساختار صوری پیشنهادی رایت و شاپیرو. اکنون با تأمل در جزئیات هر دو ساختار، چنین پیشنهاد می‌کنیم: بیایید جایگزینی‌هایی در نمادهای مورد استفاده در یکی از ساختارها در جهت نزدیک کردن آن به ساختار دیگر انجام دهیم. در شمای بستار با محمول درجه اول P، محمول درجه دوم Q و تابع δ در

کنار کلیت اصلی یا مجموعه W و زیر مجموعه‌های آن یعنی y ها سروکار داریم. از طرفی در ساختار صوری گسترش‌پذیری نامتعین با مفهوم مرتبه اول P، مفهوم مرتبه دوم Π و موجودیت‌هایی از نوع τ و زیر کلیت‌هایی از مفهوم P به نام Q و تابعی به نام F مواجه هستیم.

اگر نمادهای عناصر توصیف شمای بستار را مطابق با جدول زیر تغییر دهیم:

نمادهای اولیه	نمادهای جدید
P	P
Q	Π
Δ	F
W	<P>
X	τ

و توصیف شمای بستار را با نمادهای جدید باز نویسی کنیم، چنین خواهیم داشت:

اگر سه گانه‌ای شامل دو محمول P و Π و یک تابع جزئی مانند F داشته باشیم که شرایط زیر را بر قرار سازند می‌توانیم یک پارادوکس داشته باشیم:

۱. P یک محمول باشد و $<P>=\{\tau \mid P(\tau)\}$ باشد.

۲. Π یک محمول باشد به نحوی که $\Pi(<P>)$ برقرار باشد.

۳. F یک تابع جزئی روی زیر مجموعه‌های <P> مانند Q باشد که Π برای آنها هم بر قرار است؛ یعنی $\Pi(Q)$ درست است؛ و داریم:

الف. $F(Q) \notin Q$

ب. $F(Q) \in <P>$

به سادگی می‌توان دید که اگر در ساختار بالا Q را برابر <P> قرار دهیم، این کار به راحتی مجاز است چون Q یک زیر مجموعه از <P> است و در شرایط بالا صدق می-کند، تناقضی به این نحو خواهیم داشت: $\Pi(<P>)$ طبق شرط ۲ برقرار است. و لذا طبق ۳- الف داریم $F(<P>) \notin <P>$ و طبق ۳- ب داریم $F(<P>) \in <P>$ که تناقض در

آن مشهود است. یعنی می‌بینیم که سه تایی (P,Π ,F) تحت شرایط بیان شده تولید تناقض می‌کنند.

از طرف دیگر در مورد توصیف صوری گسترش‌پذیری نامتعین مفهوم P و شرط پارادوکسیکال بودن آن، به یاد بیاوریم که چنین عمل کردیم: ابتدا مفهوم P را در نسبت با مفهوم مرتبه دوم Π با وصف زیر نامتعیناً گسترش‌پذیر تعریف کردیم:

فرض کنید P یک مفهوم قابل اطلاق بر آیتم‌هایی از نوع τ باشد. و Π هم یک مفهوم قابل اطلاق بر مفهوم‌های x ها باشد. یعنی Π یک مفهوم مرتبه دوم است. می‌گوییم P در ارتباط با Π نامتعینا گسترش‌پذیر است اگر و تنها اگر تابعی مانند F از آیتم‌هایی از نوع P به آیتم‌هایی از نوع τ وجود داشته باشد به نحوی که اگر Q هر زیر مفهومی از P باشد که ذیل Π واقع شود، یعنی ΠQ برقرار باشد، داشته باشیم:

۱.FQ هم ذیل مفهوم P واقع شود. یعنی به عبارتی P تحت نگاشت F بسته باشد.

۲. ولی FQ ذیل Q واقع نشود. یعنی مفهوم Q تحت نگاشت F بسته نباشد.

۳.Q` ذیل $\Pi$ واقع شود، که Q` مفهومی است که مصادیقش صرفاً مصادیق Q و نیز FQ ها باشد. به بیان نظریه مجموعه‌ای $Q`=Q \cup \{FQ\}$ خواهد بود.

و در نهایت هم برای استخراج پارادوکس کلیت مفروضی از همه Pها را <P> فرض کردیم و Q را برابر <P> قرار دادیم.

مقایسه بین دو ساختار بالا شباهت آنها را به خوبی نشان می‌دهد. یعنی استنباط شهودی ما توجیه صوری هم پیدا کرد. نشان دادیم که آن‌چه پیشنهاد خود ارجاعی با ساختار صوری شمای بستار پریست بیان می‌کند، در واقع همان چیزی است که پیشنهاد گسترش‌پذیری نامتعین به قرائت رایت و شاپیرو بیان می‌کند.

نتیجه

هدف این پژوهش بررسی و مقایسه دو پیشنهاد عیب‌یابانه با رویکرد ساختار محور، یعنی

خود ارجاعی و گسترش‌پذیری نامتعین، در تبیین منشاء پارادوکس‌ها بود. ضمن بررسی و تحلیل هردو پیشنهاد هم از منظر شهودی، و هم از منظر صوری ساختار زیر بنایی هر یک را به تصریح نشان دادیم و نیز شرط‌های ایجاد پارادوکس در آن ساختارها را یافتیم. در انتها هم با استدلالی مبتنی بر نگاشتی از نمادها و تطبیق عناصر معنایی دو ساختار توانستیم نشان دهیم که دو پیشنهاد در واقع دو بیان متفاوت از یک ایده مشترک هستند و هر یک را می‌توان از دیگری نتیجه گرفت. این نتیجه را با تحیل مفهومی عناصر هر یک از دو ایده هم ملموس‌تر کردیم.

در پایان توجه می‌دهیم که در رویکرد ساختار محور در عیب‌یابی منشاء پارادوکس‌ها، کمابیش یک مفهوم یا ساختار جامع، یا به عبارتی یک منشاء یکتا برای همه پارادوکس‌ها جست‌وجو می‌شود. تفاوت بارز این رویکرد با رویکرد موضوع محور در صوری محور بودن آن است، چرا که می‌کوشد مفهوم یا در اکثر موارد ساختاری صوری را معرفی کند و مکانیزمی صوری برای تولید پارادوکس ارائه دهد تا نشان دهد همه پارادوکس‌هایی که قابل انطباق بر ساختار مزبور هستند، ذیل آن ساختار می‌گنجند. البته در عمل اکثر پیشنهادهایی که حول این محور مطرح شده‌اند ادعا یا هدفی وسیع‌تر دارند، یعنی با هدف یافتن راه حلی جامع یا یکتا برای همه پارادوکس‌ها دنبال یافتن منشائی یکتا برای آنها هستند، که دقیقاً همین انگیزه است که رویکردهای ساختار محور را در نگاه اول جذاب‌تر و قابل اعتمادتر از رویکردهای موضوع محور نشان می‌دهد.

اما باید توجه داشت که اولاً ادعای جامعیت این پیشنهادها و پوشش سراسری آنها به راحتی قابل تحقیق نیست. هم‌چنین ضمن بررسی هر دو پیشنهاد و به خصوص در مورد گسترش‌پذیری نامتعین دیدیم که ساختار صوری مولد پارادوکس در عمل فقط نشان می‌دهد که در هر مورد خاص، پارادوکس به دلیل کدام ویژگی ذاتی در موضوع مربوطه ایجاد شده است. ویژگی‌های ذاتی که در اغلب موارد در مورد پارادوکس‌های اساسی منطق و ریاضیات، در واقع اساس و معرف موضوع‌ها و مفاهیم مربوطه‌شان

هستند، یعنی مفاهیمی مانند مجموعه، عدد، صدق، و... دقیقاً با همان‌ها تعریف می‌شود. حال بعید به نظر می‌رسد دریافتن این‌که دقیقاً همان ویژگی در هر مورد خواهی نخواهی پارادوکسی را در آن حوزه در پی خواهد داشت بتواند کمک مستقیمی برای خلاصی از پارادوکس‌ها به ما بکند. به علاوه ساختار زیربنایی نشان داد که منشاء پارادوکس در هر موضوع به ویژگی خاصی از همان موضوع مربوط است و همین، چشم انداز یافتن راه حلی جامع و یکتا برای همه پارادوکس‌ها را کمرنگ می‌کند. و در عوض این باور بیشتر تقویت می‌شود که با هر پارادوکس باید به طور خاص و در بستر موضوعی خودش روبه‌رو شد.

منابع

Bolander, Th., “Self-Reference”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.), 2015. URL=<http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/self-reference/>.

Cantini, A., “Paradoxes and Contemporary Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Edward N. Zalta (ed.) 2014. URL=<http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/paradoxes-contemporary-logic/>.

Dummett, M., “The Philosophical Significance of Gödel’s theorem”, *Ratio*, 5, 1963.

Idem, *The Seas of Language*, Oxford, Oxford University Press, 1993.

Potter, M., *Set Theory and its Philospphy*, a Critical Introduction, Oxford University Press, 2004.

Russell, B., “On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types”, *Proceedings of the London Mathematical Society 4*, 1906.

Shapiro, S., Wright, C., *All Things Indefinitely Extensible-Absolute Generality*, Oxford University Press on Demand, 2006.

Shapiro, S. (Ed.),. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford University Press, 2005.