مجلهٔ گستره ریاضی
جلد ۱، شماره ۱، سال ۱۳۸۵، ۱۴—۱

یک شاخص کشیدگی برای چگالی‌های متقارن با دنباله سنگین

رحمان فرنوش
دانشگاه علم و صنعت

هدیه جعفرپور
دانشگاه آزاد اسلامی ـ واحد علوم و تحقیقات تهران

چکیده: شاخص کشیدگی معمولی، گشتاور چهارم تقسیم بر توان دوم گشتاور دوم، تنها کشیدگی یک توزیع را اندازه‌گیری نمی‌کند. بلکه برای اندازه‌گیری توامان تیزی و سنگینی دم‌های یک توزیع به کار برده می‌شود. این شاخص دارای معایبی است. انحراف از توزیع نرمال را به خوبی نشان نمی‌دهد. برای بعضی از خانواده‌های تابع چگالی از جمله، تابع چگالی نرمال آمیخته خوب کار نمی‌کند. در ضمن برای توزیع‌های با دنباله‌های سنگین تعریف نشده است. به عبارت دیگر نسبت به نقاط پرت حساس است. برای رفع عیوب در نظر گرفته شده، شاخص توانمند نسبت به نقاط پرت را معرفی می‌کنیم. این شاخص را با $\beta_p^q(F)$ نشان می‌دهیم. شاخص معرفی شده، خواص یک شاخص کشیدگی را حفظ می‌کند و مانند شاخص معمول کشیدگی، تابع‌های چگالی متقارن بر اساس ترتیب ون زوییت مرتب می‌شوند. با اختصاص مقادیری خاص برای p و q می‌توان جداگانه تابع چگالی‌های متقارن را نسبت به یکدیگر بر اساس تجمع در مرکز و بر اساس سنگینی دنباله‌هایشان مرتب کرد. با حفظ ترتیب ون زوییت بهترین مقادیر p و q را تشخیص می‌دهیم و در پایان با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو مقادیر بحرانی $\beta_p^q(F)$ را در سطوح مختلف به دست می‌آوریم.

واژگان کلیدی: تابع چگالی نرمال آمیخته، ترتیب ون زوییت، توزیع با دنباله‌های سنگین، توزیع متقارن، روش شبیه‌سازی مونت کارلو و شاخص کشیدگی.

۱. مقدمه

شاخص کشیدگی معمول برای هر تابع با گشتاور چهارم متناهی به صورت زیر است:

$$\beta_۲(F) = \frac{E_F(X - E_F(X))^۴}{E_F^۲(X - E_F(X))^۲}$$

بالاندا و مک گیلیوری نشان دادند که برای بعضی از توزیع‌های متقارن که شکل تابع چگالی آنها با تابع چگالی متقارن که شکل تابع چگالی آنها با تابع چگالی نرمال تفاوت فاحشی داشت، مقدار ۳ $= \beta_۲$ محاسبه شد.

بنابراین ۳ $= \beta_۲$ شرط کافی برای نرمال بودن تابع‌ها نیست و انحراف تابع‌های چگالی از تابع نرمال را به خوبی نشان نمی‌دهد.

$\beta_۲$ برای توزیع‌های با دنباله‌های سنگین تعریف نشده است، در ضمن برای توزیع آمیخته نرمال معرفی شده توسط مختار علی (۱۹۷۴) منجر به تصمیم گیری نادرست می‌شود:

$$F_k(x) = \left(۱ - \frac{۱}{k^۲ - ۱}\right)\Phi(x) + \frac{۱}{k^۲ - ۱}\Phi\left(\frac{x}{k}\right) \qquad k = ۲, ۳, \cdots$$

که در آن $\Phi(x)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

اگرچه این دنباله به نرمال استاندارد در توزیع همگراست، اما $\beta_۲ = \frac{۳(k^۲ + ۱)}{۴} \longrightarrow \infty$ زمانی که $k \longrightarrow \infty$.

چون گشتاورها نسبت به نقاط پرت حساس است، این تاثیر در $\beta_۲$ مشهود است.

به عنوان مثال با تولید ۱۰۰۰۰ داده از توزیع نرمال استاندارد $\hat{\beta}_{۲,n} = ۳/۰۲۱۱$ محاسبه شد که بسیار نزدیک به ۳ است. چنانچه یکی از مشاهدات با مقدار پرت ۱۰

جایگزین کنیم، $\hat{\beta}_{2,n} = 3/9143$ محاسبه شد که در سطح یک درصد معنادار است. در بخش ۲ خواص کشیدگی را بررسی می‌کنیم و در بخش ۳ ابتدا شاخصی جدید برای کشیدگی معرفی می‌کنیم سپس نشان می‌دهیم که ویژگی‌های شاخص معمول را داراست و در مورد توزیع مختارعلی به خوبی عمل می‌کند. در بخش ۴ تابع‌ها را بر اساس تجمع در مرکز و بر اساس تجمع جرم احتمال در دنباله‌های تابع چگالی مرتب می‌کنیم. در بخش ۵ بهترین مقادیر p و q با حفظ ترتیب ون زوییت (۱۹۶۴) معرفی می‌شوند و مقادیر بحرانی $\beta_p^q(F)$ نیز محاسبه می‌شوند.

۲. ویژگی‌های شاخص کشیدگی

تعریف: اوجا (Oja ۱۹۸۱) تابع ناوردای مکان و مقیاس T را یک شاخص کشیدگی می‌نامند هرگاه توزیع G حداقل به اندازه توزیع F کشیدگی داشته باشد آنگاه $T(G) \geq T(F)$ باشد.

شاخص کشیدگی دارای دو ویژگی زیر است:

۱− $a > 0 \quad T(aX+b) = T(X)$

۲− $F \leq_s G \Longrightarrow T(F) \leq T(G)$

ون زوییت برای تابع‌های متقارن ترتیب $\leq_s$ را بدین صورت تعریف کرد:

$F \leq_s G$ اگر و تنها اگر $R_{F,G}(x) = G^{-1}(F(x))$ برای $x > m_F$ محدب باشد. که m_F مرکز تقارن تابع توزیع F است.

ون زوییت تابع‌های چگالی را به صورت زیر مرتب کرد.

لاپلاس > لوجستیک > نرمال > یکنواخت

مقادیر β_2 برای تابع‌های فوق به ترتیب از راست به چپ ۶، ۴۵/۴۶، ۳، ۱/۸ به دست می آید.

ون زوییت نشان داد که β_2 دو ویژگی کشیدگی را دارد. باید به این نکته توجه داشت که β_2 تابع‌های چگالی را بر اساس کشیدگی نسبت به یکدیگر مرتب نمی‌کند، یعنی $\beta_2 > 3$ بدین معنا نیست که تابع چگالی نسبت به نرمال بلندتر است. ممکن است جرم بیشتری در دنباله‌های تابع چگالی نسبت به تابع چگالی نرمال وجود داشته باشد.

۳. معرفی شاخص جدید کشیدگی

همان طور که در پیشگفتار گفته شد، β_2 نسبت به نقاط پرت حساس است. اینک شاخص کشیدگی زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\beta_p^q(F) = \frac{E_F[(X - E_F(X))I_{(F^{-1}(p),F^{-1}(q))}(X)]^4}{E_F^2[(X - E_F(X))^2 I_{(F^{-1}(p),F^{-1}(q))}(X)]}$$

که در آن $F^{-1}(q)$ و $F^{-1}(p)$ چندک‌های مرتبه q و p است و $X \sim F(.)$ در این مقاله به علت در نظر گرفتن توابع متقارن $q = 1 - p$ است.

$\beta_p^q(F)$ همواره متناهی است و در تابع‌های متقارن $q = 1 - p$ است. ابتدا نشان می‌دهیم این شاخص ویژگی‌های شاخص معمولی را دارد. ویژگی اول بدیهی است. اما برای اثبات ویژگی دوم ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha \in (0, 1)$، $\frac{G^{-1}(\alpha)}{F^{-1}(\alpha)}$ غیرنزولی است و اگر

$R(x)$ محدب باشد، $\frac{R(x)}{x}$ برای $x \neq 0$ غیرنزولی است.

بدون از دست دادن کلیت، می‌توان میانه توزیع‌ها را صفر در نظر گرفت. در این مقاله علت متقارن بودن توابع چگالی این شرط برقرار است. پس

$$R(0) = G^{-1}(F(0)) = G^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

برای $x > 0$ از $\frac{R(x)}{x}$ مشتق می‌گیریم، خواهیم داشت: $\frac{xR'(x) - R(x)}{x^2}$ این مشتق نامنفی است اگر $R'(x) \geq \frac{R(x)}{x}$.

برای برقرار نامساوی اخیر، توجه کنید که $R(0) = 0$ است. با استفاده از قضیه مقدار میانگین خواهیم داشت:

$$R'(x_1) = \frac{R(x)}{x} \quad 0 < x_1 < x$$

از طرفی چون $R(x)$ محدب است پس $R''(x) > 0$. بنابراین $R'(x)$ غیرنزولی است و

$$\frac{R(x)}{x} \leq R'(x_1) \leq R'(x)$$

درنتیجه $\frac{R(x)}{x}$ برای $x > 0$ غیرنزولی است. اثباتی مشابه برای $x < 0$ نیز برقرار است.

پس،

$$\frac{G^{-1}(F(F^{-1}(\alpha)))}{F^{-1}(\alpha)} = \frac{G^{-1}(\alpha)}{F^{-1}(\alpha)} \quad \alpha \in (0, 1)$$

غیرنزولی است.

برای اثبات ویژگی دوم نشان می‌دهیم:

$$\beta_p^q(F) \leq \beta_p^q(G)$$

کافیست نشان دهیم،

$$\frac{E_F(X^{\text{۴}} I_{(F^{-\text{۱}}(p),F^{-\text{۱}}(q))}(X))}{E_F^{\text{۲}}(X^{\text{۲}} I_{(F^{-\text{۱}}(p),F^{-\text{۱}}(q))}(X))} \leq \frac{E_G(X^{\text{۴}}_{(G^{-\text{۱}}(p),G^{-\text{۱}}(q))} I(X))}{E_G^{\text{۲}}(X^{\text{۲}} I_{(G^{-\text{۱}}(p),G^{-\text{۱}}(q))}(X))}$$

می‌دانیم با تغییر متغیر $x = F^{-\text{۱}}(u)$، خواهیم داشت:

$$E_F(X^{\text{۴}} I_{(F^{-\text{۱}}(p),F^{-\text{۱}}(q))}(X)) = \int_{F^{-\text{۱}}(p)}^{F^{-\text{۱}}(q)} x^{\text{۴}} dF(x) = \int_p^q (F^{-\text{۱}}(u))^{\text{۴}} du$$

نامساوی اخیر معادل است با

$$\frac{\int_p^q (F^{-\text{۱}}(u))^{\text{۴}} du}{\int_p^q (G^{-\text{۱}}(u))^{\text{۴}} du} \leq \frac{\left(\int_p^q (F^{-\text{۱}}(u))^{\text{۲}} du\right)^{\text{۲}}}{\left(\int_p^q (G^{-\text{۱}}(u))^{\text{۲}} du\right)^{\text{۲}}}$$

به وسیله قضیه مقدار میانگین تعمیم‌یافته، نامعادله اخیر با نامعادله زیر جایگزین می‌شود:

$$\frac{(F^{-\text{۱}}(u_{\text{۲}}))^{\text{۴}}}{(G^{-\text{۱}}(u_{\text{۲}}))^{\text{۴}}} \leq \frac{((F^{-\text{۱}}(u_{\text{۱}})))^{\text{۲}}}{((G^{-\text{۱}}(u_{\text{۱}})))^{\text{۲}}}, \quad \text{۰} < u_{\text{۱}} < u_{\text{۲}} < \text{۱}$$

چون $\frac{F^{-\text{۱}}(\alpha)}{G^{-\text{۱}}(\alpha)}$ غیرصعودی است، زمانی که $F \leq_s G$ نامساوی فوق برقرار است.

قضیه: شاخص کشیدگی $\beta_p^q(F)$ که در آن $F_k(x)$ تابع توزیع مختارعلی است به $\beta_p^q(\Phi_k)$ همگراست.

اثبات:

$$\beta_p^q(F_k(x)) = \frac{\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{k^{\text{۲}} - \text{۱}}\right) \int_{F^{-\text{۱}}(p)}^{F^{-\text{۱}}(q)} x^{\text{۴}} \phi(x) dx + A(k)}{\left(\left(\text{۱} - \frac{\text{۱}}{k^{\text{۲}} - \text{۱}}\right) \int_{F^{-\text{۱}}(p)}^{F^{-\text{۱}}(q)} x^{\text{۲}} \phi(x) dx + B(k)\right)^{\text{۲}}}$$

که در آن $\phi(x)$ تابع چگالی نرمال استاندارد است و

$$A(k) = \frac{\text{۱}}{k(k^{\text{۲}} - \text{۱})} \int_{F^{-\text{۱}}(p)}^{F^{-\text{۱}}(q)} x^{\text{۴}} \phi\left(\frac{x}{k}\right) dx = \frac{k^{\text{۵}}}{k(k^{\text{۲}} - \text{۱})} \int_{\frac{F^{-\text{۱}}(p)}{k}}^{\frac{F^{-\text{۱}}(q)}{k}} x^{\text{۴}} \phi(x) dx$$

و

$$B(k)=\frac{1}{k(k^2-1)}\int_{F^{-1}(p)}^{F^{-1}(q)}x^2\phi(\frac{x}{k})dx=\frac{k^3}{k(k^2-1)}\int_{\frac{F^{-1}(p)}{k}}^{\frac{F^{-1}(q)}{k}}x^2\phi(x)dx.$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned} 0\leq \lim_{k\longrightarrow\infty} A(k) &\leq \lim_{k\longrightarrow\infty}\frac{k^5}{k(k^2-1)}\int_{\frac{F^{-1}(p)}{k}}^{\frac{F^{-1}(q)}{k}}x^4dx \\ &= \lim \frac{k^5}{5k^6(k^2-1)}\Big((F^{-1}(q))^5-(F^{-1}(p))^5\Big)^5=0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} B(k)=0$$

بنابراین

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\beta_p^q(F_k(x))=\frac{\int_{F^{-1}(p)}^{F^{-1}(q)}x^4\phi(x)dx}{\Big(\int_{F^{-1}(p)}^{F^{-1}(q)}x^2\phi(x)dx\Big)^2}=\beta_p^q(\Phi(x)). \qquad \square$$

۴. برآورد پارامتر مقیاس و مرتب کردن توابع بر اساس کشیدگی یا تجمع در دنباله‌ها

۱.۴ معرفی γ_2:

چون در مثالهای کاربردی توزیع داده‌ها معمولاً نامشخص است، بین β_2 و γ_2 فرقی قائل می‌شویم. γ_2 گشتاور چهارم استاندارد شده است که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\gamma_2=E\Big(\frac{X-\mu}{\sigma}\Big)^4$$

که در آن μ, σ پارامترهای مقیاس و مکان است.

در کلاس توزیع نرمال β_2 و γ_2 با یکدیگر برابر است به این علت که برآوردهای σ و μ در γ_2 همان میانگین و انحراف معیار است. اما در توزیع لاپلاس استاندارد ۲۴ $= \gamma_2$ و ٦ $= \beta_2$ است. در صورت استفاده از γ_2 باید پارامتر مقیاس را برآورد کنیم.

۲.۴ برآوردهای پارامتر مقیاس با استفاده از روش گشتاوری:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{۱}$$

$$R = x_{\max} - x_{\min} \tag{۲}$$

$$QD_p = \frac{F^{-1}(1-p) - F^{-1}(p)}{2} \tag{۳}$$

$$AAD = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \tag{۴}$$

$$MAD = med(|x_i - \bar{x}|) \tag{۵}$$

مقدار واقعی γ_2 برای تابع‌های متقارن محاسبه شده و مقدار γ_2 بر اساس برآوردهای مختلف در جدول ۱ آورده شده است.

می‌توان نتیجه گرفت که هر یک از برآوردگرها در جای خود می‌تواند به عنوان برآوردی خوب برای پارامتر مقیاس به کار برده شود و دلیلی ندارد که همواره از انحراف معیار به جای σ استفاده کرد. اگرچه برخی از نویسندگان استفاده از MAD را بر S ترجیح می‌دهند.

$\gamma_۲ \downarrow$ توزیع $\rightarrow$	یکنواخت	نرمال	لوجستیک	لاپلاس
مقدار واقعی	۱/۸	۳	۴۵/۴۷۵	۲۴
بر اساس SD	۱/۸۰۵۵	۳/۰۶۸۶	۴/۰۷۷	۵/۵۹۴۹
بر اساس R	۰/۱۳۰۵۱۹	۰/۰۰۴۱۳	۰/۰۰۳۵	۰/۰۰۳۶
بر اساس AAD	۳/۲۱۷	۷/۷۳۲۹	۱۱/۹۸۸	۲۱/۲۷۱۱
بر اساس MAD	۳/۲۳۷۵	۱۵/۸۶۸۰	۳۰/۹۹۵۸	۱۰۱/۳۳۶۸
بر اساس $QD_{۰/۲۵}$	۳/۲۳۰۵	۱۵/۸۲۴	۳۰/۸۴۴۶	۱۰۱/۱۶۲۰
بر اساس $QD_{۰/۲}$	۱/۵۷۷	۶/۵۶۶۹	۱۲/۳۸۳۷	۳۳/۸۵۱۶

جدول ۱: برآورد $\gamma_۲$ در برخی توزیعها

توزیع	کوشی	لوجستیک	لاپلاس	نرمال	یکنواخت
$\gamma_{۰/۰۵}^{۰/۹۵}$	۵۰/۳۹۶	۶/۷۴	۲/۰۱	۰/۷۶۳	۰/۰۰۷۳۸

جدول ۲: مقادیر محاسبه شده γ برای $p = ۰/۰۵$ در برخی توزیعها

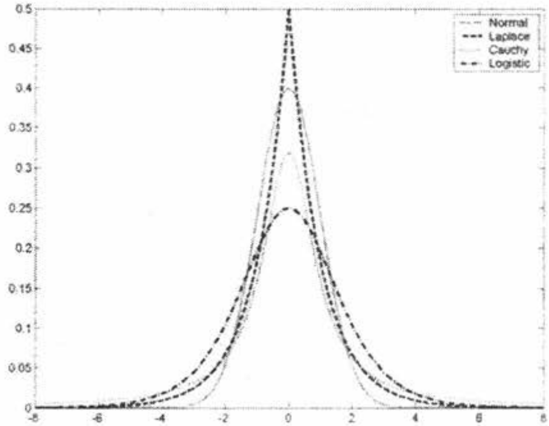
۳.۴ مرتب کردن توابع بر اساس کشیدگی و بر اساس تجمع جرم احتمال در دنباله‌های تابع چگالی:

چگالیهای کوشی، نرمال، لوجستیک و لاپلاس در شکل ۱ رسم شده‌اند.

مقدار واقعی $\gamma_{۰/۰۵}^{۰/۹۵}$ برای توابع رسم شده محاسبه شده و نتایج در جدول ۲ آورده شده است.

با بزرگ شدن مقدار $\gamma_{۰/۰۵}^{۰/۹۵}$ سنگینی جرم احتمال در دنباله‌های توزیع بیشتر می‌شود.

مقادیر $\gamma_{۰/۲۵}^{۰/۷۵}(F)$ را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم. نتایج در جدول ۳ آورده



شکل ۱: چگالیهای کوشی، نرمال، لوجستیک و لاپلاس

توزیع	یکنواخت	لاپلاس	نرمال	کوشی	لوجستیک
$\gamma_{۰/۰۵}^{۰/۹۵}$	۰/۰۰۳۹	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸۳۸	۰/۰۷۵۸۵	۰/۱۳

جدول ۳: مقادیر محاسبه شده γ برای $p=۰/۲۵$ در برخی توزیعها

شده است.

$$\gamma_{۰/۲۵}^{۰/۷۵}(F)=\frac{\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}x^{۴}(i)I_{(F^{-۱}(۰/۲۵),F^{-۱}(۰/۷۵))}(x_i)}{\left(\frac{QD_{۰/۷۵}-QD_{۰/۲۵}}{۲}\right)^{۴}}$$

با بزرگ شدن مقدار $\gamma_{۰/۲۵}^{۰/۷۵}(F)$ تابع احتمال از کشیدگی کمتری نسبت به تابع نرمال برخوردار است.

توزیع	نرمال	لوجستیک	کوشی	لاپلاس	یکنواخت
$\beta_{۰/۰۵}^{۰/۹۵}$	۲/۴۳	۲/۶	۵/۱۷	۳/۰۸	۲
$\beta_{۰/۱}^{۰/۹}$	۲/۵۳	۲/۶۴	۳/۷۴	۳/۰۲	۲/۲۵
$\beta_{۰/۱۵}^{۰/۸۵}$	۲/۷۹	۲/۸۶	۳/۴۹	۳/۲	۲/۵۷
$\beta_{۰/۰۲}^{۰/۸}$	۳/۱۶	۳/۲۱	۳/۶۳	۳/۵۳	۳
$\beta_{۰/۲۵}^{۰/۷۵}$	۳/۷۲	۳/۷۶	۴/۰۵	۴/۰۶	۳/۶
$\beta_{۰/۳}^{۰/۷}$	۴/۵۹	۴/۶۲	۴/۸۲	۴/۹۲	۴/۵
$\beta_{۰/۳۵}^{۰/۶۵}$	۶/۰۶	۶/۰۹	۶/۲۱	۶/۳۸	۶
$\beta_{۰/۴}^{۰/۶}$	۹/۰۳	۹/۰۶	۹/۱۲	۹/۳۵	۹
$\beta_{۰/۴۵}^{۰/۵۵}$	۱۷/۹۸	۱۸/۳	۱۷/۹۸	۱۸/۳۲	۱۸

جدول ۴: مقادیر محاسبه شده β در برخی توزیعها برای بعضی از مقادیر t

۵. پیشنهاد مقادیری برای p و q و یافتن مقادیر بحرانی $\beta_p^q(F)$

با تولید داده از توابع چگالی داده شده مقادیر $\beta_p^q(F)$ برای مقادیر مختلف p محاسبه شده و در جدول ۴ ارائه شده است. با نگاهی اجمالی می‌توان دریافت برای حفظ ترتیب ون زوییت باید $p \leq ۰/۲$ باشد.

توسط روش شبیه‌سازی مونت کارلو نمونه‌ای n تایی از توزیع نرمال استاندارد تولید می‌کنیم $\hat{\beta}_p^q$ را محاسبه می‌کنیم. این عمل را $N = ۱۰۰۰۰$ بار انجام می‌دهیم. $\hat{\beta}_p^{q^۱}, \hat{\beta}_p^{q^۲}, \dots, \hat{\beta}_p^{q^N}$ را محاسبه می‌کنیم. سپس آنها را به صورت $\hat{\beta}_p^{q^{(۱)}}, \hat{\beta}_p^{q^{(۲)}}, \dots, \hat{\beta}_p^{q^{(N)}}$ مرتب می‌کنیم. برآورد مرتبه p مونت کارلو $\hat{\beta}_p^{q^{(N_p)}}$ است. نتایج در جدول ۵ ارائه شده است.

$\downarrow n \quad p \rightarrow$	۰/۰۱	۰/۰۲۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۹	۰/۹۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹
۱۰	۱/۳۹۳۱	۱/۴۷۴۹	۱/۵۷۲۸	۱/۶۸۷۲	۳/۵۲۱۵	۴/۰۴۶۸	۴/۶۰۶۲	۵/۳۶۱۵
۲۰	۱/۵۷۸۸	۱/۶۷۰۷	۱/۷۶۲۳	۱/۸۷۵۱	۳/۶۲۰۱	۴/۱۸۶۴	۴/۸۳۹۹	۵/۶۸۲۵
۳۰	۱/۶۶۲۶	۱/۷۳۶۷	۱/۸۱۲۸	۱/۹۰۱۳	۳/۰۴۴۵	۳/۳۳۳۸	۳/۶۲۱۸	۴/۰۷۹۷
۴۰	۱/۷۱۴۸	۱/۷۹۵۹	۱/۸۷۰۷	۱/۹۶۱۴	۲/۹۹۸۴	۳/۲۶۵۴	۳/۵۲۶۷	۳/۸۸۸۸
۵۰	۱/۷۶۷۱	۱/۸۲۸۸	۱/۸۸۶۳	۱/۹۶۵۸	۲/۸۲۱۴	۳/۰۱۱۴	۳/۲۰۹۲	۳/۴۴۱۸
۶۰	۱/۷۸۷۲	۱/۸۵۱۸	۱/۹۱۰۲	۱/۹۸۲۴	۲/۷۵۸۴	۲/۹۲۸۶	۳/۰۷۷۵	۳/۳۰۲۰
۷۰	۱/۸۱۶۸	۱/۸۶۹۵	۱/۹۱۸۴	۱/۹۹۶۱	۲/۶۷۴۷	۲/۸۱۳۶	۲/۹۵۲۷	۳/۱۲۴۱
۸۰	۱/۸۲۹۹	۱/۸۸۶۵	۱/۹۳۷۴	۲/۰۰۸۰	۲/۶۵۲۴	۲/۷۷۵۵	۲/۸۹۷۴	۳/۰۶۴۹
۱۰۰	۱/۸۵۷۷	۱/۹۰۷۱	۱/۹۵۸۵	۲/۰۱۷۸	۲/۵۷۲۰	۲/۶۸۲۰	۲/۷۸۵۹	۲/۹۰۴۷
۱۲۰	۱/۸۸۳۳	۱/۹۳۲۱	۱/۹۷۶۹	۲/۰۳۰۸	۲/۵۲۷۳	۲/۶۱۹۴	۲/۷۰۲۲	۲/۸۲۸۲
۱۳۰	۱/۸۹۲۴	۱/۹۳۴۸	۱/۹۷۸۹	۲/۰۳۲۵	۲/۵۰۴۸	۲/۵۹۳۰	۲/۶۷۴۵	۲/۷۷۸۵
۱۴۰	۱/۹۰۰۱	۱/۹۴۷۲	۱/۹۸۶۷	۲/۰۴۱۳	۲/۴۹۴۴	۲/۵۸۴۲	۲/۶۷۳۳	۲/۷۷۱۹
۱۵۰	۱/۹۰۵۱	۱/۹۵۱۰	۱/۹۹۱۱	۲/۰۳۷۶	۲/۴۷۳۳	۲/۵۵۴۴	۲/۶۳۳۳	۲/۷۱۶۸
۲۰۰	۱/۹۳۴۸	۱/۹۸۱۰	۲/۰۱۶۷	۲/۰۵۸۵	۲/۴۳۰۰	۲/۴۹۳۰	۲/۵۵۷۰	۲/۶۳۰۷
۲۵۰	۱/۹۵۹۹	۱/۹۹۶۰	۲/۰۲۸۱	۲/۰۶۴۱	۲/۳۹۱۹	۲/۴۴۵۴	۲/۴۹۳۰	۲/۵۶۰۲
۳۰۰	۱/۹۷۷۰	۲/۰۱۲۰	۲/۰۴۰۰	۲/۰۷۹۲	۲/۳۷۱۶	۲/۴۲۰۴	۲/۴۶۴۲	۲/۵۱۷۰
۴۰۰	۲/۰۰۲۲	۲/۰۳۱۵	۲/۰۵۷۱	۲/۰۸۸۲	۲/۳۴۳۲	۲/۳۸۴۰	۲/۴۱۹۵	۲/۴۶۲۷
۵۰۰	۲/۰۱۴۸	۲/۰۴۳۵	۲/۰۶۶۳	۲/۰۹۶۴	۲/۳۲۱۳	۲/۳۵۷۴	۲/۳۸۸۷	۲/۴۲۶۰
۶۰۰	۲/۰۳۰۶	۲/۰۵۴۸	۲/۰۷۷۳	۲/۱۰۳۲	۲/۳۰۸۵	۲/۳۴۱۱	۲/۳۶۹۵	۲/۴۰۵۶
۷۰۰	۲/۰۴۳۴	۲/۰۶۵۰	۲/۰۸۵۰	۲/۱۰۸۰	۲/۲۹۶۴	۲/۳۲۳۹	۲/۳۵۰۷	۲/۳۸۰۴
۸۰۰	۲/۰۴۷۴	۲/۰۶۹۵	۲/۰۸۹۲	۲/۱۱۲۳	۲/۲۸۹۳	۲/۳۱۷۷	۲/۳۴۰۴	۲/۳۶۷۰
۹۰۰	/۰۵۳۲	۲/۰۷۳۰	۲/۰۹۲۰	۲/۱۱۴۲	۲/۲۸۰۲	۲/۳۰۴۵	۲/۳۲۷۱	۲/۳۵۳۰
۱۰۰۰	۲/۰۶۳۶	۲/۰۸۴۳	۲/۱۰۱۵	۲/۱۲۲۲	۲/۲۷۷۵	۲/۳۰۱۱	۲/۳۲۱۹	۲/۳۴۶۲
۱۵۰۰	۲/۰۸۱۷	۲/۰۹۹۵	۲/۱۱۵۶	۲/۱۳۱۷	۲/۲۵۷۷	۲/۲۷۶۴	۲/۲۹۳۸	۲/۳۱۴۷
۲۰۰۰	۲/۰۹۴۷	۲/۱۰۹۲	۲/۱۲۲۵	۲/۱۳۸۳	۲/۲۴۷۴	۲/۲۶۴	۲/۲۷۹۹	۲/۲۹۵۹

جدول ۵: مقادیر بحرانی β برای اندازه نمونه‌ها و pهای مختلف

۶. بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله در مورد خواص معمول کشیدگی بحث کردیم. سپس شاخص جدیدی را معرفی کردیم و نشان دادیم که این شاخص تمامی خواص شاخص معمولی را دارد. مقداری برای p پیشنهاد دادیم و برای آزمون فرض در مثالهای عددی نقاط بحرانی را با روشهای عددی به دست آوردیم.

فهرست مراجع

[۱] M.M. Ali, Stochastic Ordering and Kurtosis Measure, *Jasa,* Vol. 69, (346) (1974), 543-545.

[۲] H. M. Brys, and A. Stryyf, Robust Measure of Tail Weight, *Computational Statistics and Data Analysis,* (2004).

[۳] R. B. Darlington, Is Kurtosis Really peakedness?, *The American Statistician,* Vol. 24, (1970), 19-22.

[۴] H. M. Finucan, A note kurtosis, *Irss, Ser. B,* No. 1, (26) (1964), 111-112.

[۵] R. A. Groeneveld, A Class of Quantile measure for kurtosis, *The American Statistician,* Vol. 51, (4) (1999), 325-329.

[۶] R. A. Groeneveld, and G. Meeden, Measuring skewess and kurtosis, *The Statistician,* Vol. 33, (1984), 391-399.

[۷] j. R. M. Hosking, Moments or L moments? An example comparing two measure statisican, Vol. 46, (3) (1992), 186-189.

[۸] P. J. Huber, Robust statistics, Wiley, New York (2004).

[۹] K. P. Balanda and H. L. MacGillivray, Kurtosis: a critical review, *Jasa,* Vol. 42, (2) (1988), 111-119.

[۱۰] H. Oja, On location, scale, skewness and kutosis of univarate distributions, *Scand J Statist,* Vol. 8, (1981), 154-168.

[۱۱] R. A. Groeneveld and G. Meeden, Measuring and kurtosis, *The Statistician,* Vol. 33, (1984), 391-399.

[۱۲] D. Ruppert, What is kurtosis?, *The American Statistician,* Vol. 41, (1987), 15.

[۱۳] A. Stuart and J. K. Ord, *Kendalls Advanced Theory of Statisticd,* Vol. 1, Distribution Theory, 6th ed., Arnild, London, (1994).

[۱۴] W. R. Van Zwet, *Convex transformation of random variables,* Mathematisch Centrum, Amsterdam (1964).

Rahaman Farnoosh
Department of Mathematics
Iran University of Science and Technology
Tehran, Iran
E-mail: rfarnoosh@iust.ac.ir

Hedieh Jafarpour
Department of Statistics
Science and Research Branch

Islamic Azad University
Tehran, Iran
E-mail: hedieh.jafarpour@gmail.com