دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره پنجم، بهار ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۰۱۹۶-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

گراف همسایه مشترک

سمانه حسین‌زاده[۱]، علی ایرانمنش[۲*]، اسما حمزه[۳]، محمدعلی حسین‌زاده[۴]

[۱، ۲، ۳، ۴] دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: زمستان ۱۳۹۴ تاریخ پذیرش مقاله: بهار ۱۳۹۵

چکیده

فرض کنید G یک گراف ساده با مجموعه رأس‌های $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ است. گراف همسایه مشترک که با $con(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ و دو رأس در آن مجاورند اگر دست کم یک همسایه مشترک داشته باشند. در این مقاله گراف همسایه مشترک تعدادی گراف‌های ترکیبی را محاسبه می‌کنیم. همچنین به بررسی رابطه همیلتونی بودن گراف G و $con(G)$ پرداخته و کران پایینی برای عدد خوشه گراف $con(G)$ برحسب عدد خوشه گراف G به دست می‌آوریم. در ادامه نشان می‌دهیم عدد رنگی کلی گراف G به وسیله عدد رنگی $con(T(G))$ محدود می‌شود.

واژه‌های کلیدی: گراف همسایه مشترک، دور همیلتونی، عدد خوشه، اعمال گراف.

*. عهده‌دار مکاتبات : iranmana@yahoo.com

۱– مقدمه

در این مقاله گراف‌ها را ساده در نظر می‌گیریم. فرض کنید G و H دو گراف باشند. مجموعه رأس‌های همسایه رأس u در گراف G را با نماد $N_G(u)$ نشان می‌دهند. به تعداد یال‌های موجود در یک مسیر، طول آن مسیر گفته می‌شود. طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v در گراف G را فاصله بین آن‌ها گویند و با نماد $d_G(u,v)$ نشان می‌دهند. منطبق شدن دو رأس از دو گراف متمایز منجر به تشکیل یک گراف جدید می‌شود. فرض کنید H و G دو گراف همبند با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. برای دو رأس $a \in V(G)$ و $b \in V(H)$، جمع رأسی دو گراف G و H در رأس $v=a=b$، که با $G\cdot H$ نشان داده می‌شود، از یکسان‌سازی دو رأس a و b به دست می‌آید. اگر این دو گراف با یک یال با آغاز a و پایان b به یکدیگر متصل شوند، آن‌گاه عمل جمع یالی دو گراف که با $G \sim H$ نشان داده می‌شود به دست می‌آید. [۶]

فرض کنید H و G گراف‌هایی با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. در این صورت پیوند $G+H$، به کمک دو گراف H و G، بدین صورت تعریف می‌شود:

$$V(G+H)=V(G)\cup V(H),$$
$$E(G+H)=E(G)\cup E(H)\cup \{xy: x\in V(G), y\in V(H)\}$$

در ادامه به معرفی عمل حاصل ضرب دکارتی پرداخته شده که از اعمال ترکیبی مهم در نظریه گراف است.

فرض کنید G و H گراف‌هایی با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. در این صورت گراف با مجموعه رأس‌های $V(G)\times V(H)$ چنان‌که دو رأس (u_1,v_1) و (u_2,v_2) با هم مجاور است اگر و تنها اگر $u_1=u_2$ و v_1 با v_2 در گراف H مجاور باشند یا $v_1=v_2$ و u_1 با u_2 در گراف G مجاور باشد، حاصل ضرب دکارتی G و H گویند و با $G\times H$ نشان می‌دهند.

فرض کنید G و H گراف‌هایی با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. در این صورت گراف با مجموعه رأس‌های $V(G)\times V(H)$، چنان‌که دو رأس (u_1,v_1) و (u_2,v_2) با هم مجاور است اگر و تنها اگر u_1 و u_2 در گراف G مجاور باشند، یا $u_1 = u_2$ و v_1 با v_2 در گراف H مجاور باشند، ترکیب یا حاصل ضرب لغت‌نامه‌ای G و گویند و با $G[[H]]$ نشان می‌دهند. عمل کرونای دو گراف G_1 و G_2 را با نماد $G_1 \circ G_2$ نشان داده و چنین به دست می‌آید: (یک نسخه از G_1 و n_1 = تعداد رأس‌های G_1)، نسخه از G_2 را در نظر گیرید. سپس همه رأس‌های نسخه iام از G_2 را به رأس iام، $i=1,2,\dots,n_1$، از G_1 وصل کنید.

فرض کنید G_1 و G_2 گراف‌هایی با مجموعه رأس‌های مجزا باشند. آن‌گاه گراف با مجموعه رأس‌های $V(G_1)\times V(G_2)$، چنان‌که دو رأس (u_1,v_1) و (u_2,v_2) با هم مجاورند اگر و تنها اگر u_1 با u_2 در گراف G_1 و v_1 با v_2 در گراف G_2 مجاور باشد، تانسور G_1 و G_2 گویند و با $G_1 \otimes G_2$ نشان می‌دهند. مسیری که شامل هر رأس G است را مسیر همیلتونی نامند. هم‌چنین دور همیلتونی G دوری است که شامل هر رأس باشد. یک گراف را گراف همیلتونی گویند، اگر دارای دور همیلتونی باشد. مکمل گراف G که آن را با نماد $\bar{G}$ نشان می‌دهند، گرافی است با مجموعه رأس‌های $V(G)$ و دو رأس در آن مجاورند اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند.

یک خوشه‌ی گراف G زیرمجموعه S از V است چنان‌که گراف القایی G روی مجموعه S کامل باشد. اندازه بزرگ‌ترین خوشه را عدد خوشه‌ای گویند و با $\omega(G)$ نشان می‌دهند. رنگ‌آمیزی رأسی G، تخصیص k رنگ، ۱،۲،...،k به رأس‌های G است. رنگ‌آمیزی سره است اگر هیچ دو رأس مجاور متمایز دارای یک رنگ نباشند. گراف G، k– رنگ‌پذیر رأسی است اگر G دارای k- رنگ آمیزی رأسی سره باشد. عدد رنگی وابسته به G که با نماد $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، می‌نیمم k– هایی است که برای آن G، k- رنگ‌پذیر رأسی است. بنابراین اگر عدد رنگی گراف G برابر با k باشد می‌توان مجموعه رأس‌های این گراف را به V_iها، $1 \le i \le k$، افراز کرد چنان‌که V_iها مجموعه رأس‌هایی است که دارای رنگ i می‌باشند. به V_iها کلاس‌های رنگی گفته می‌شود. k- رنگ‌آمیزی یالی گراف G تخصیص k رنگ به یال‌های G است. رنگ آمیزی سره است اگر هیچ دو یال مجاور دارای یک رنگ نباشند. گراف G، k- رنگ‌پذیر یالی است اگر G دارای k– رنگ‌آمیزی یالی سره باشد. عدد رنگی یالی وابسته به G،

می نیمم k- هایی است که برای آن G، k- رنگ‌پذیر یالی است. رنگ‌آمیزی کلی، نوعی رنگ‌آمیزی گراف بر یال‌ها و رأس‌ها است. در رنگ‌آمیزی کلی هیچ دو رأس مجاور و هیچ دو یال مجاور دارای یک رنگ نیست. هم‌چنین یک رأس و یک یال مجاور هم دارای رنگ یکسان نیستند. می‌نیمم تعداد رنگ‌ها، برای یک رنگ‌آمیزی کلی سره G را عدد رنگی کلی نامیده و با $\chi''(G)$ نشان می‌دهند. گراف همسایه مشترک بر گراف G در سال ۲۰۱۱ در [۲] چنین تعریف شده است. فرض کنید G یک گراف با مجموعه رأس‌های $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ است، گراف همسایه مشترک که با $con(G)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رأس‌های $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ و دو رأس در آن مجاورند اگر دست کم یک همسایه مشترک داشته باشند. گراف مشتق $G^\dagger$، گرافی است با مجموعه رأس‌های یکسان با G و دو رأس در آن مجاورند اگر فاصله آن‌ها در G برابر با 2 باشد. آشکارا می‌توان دید $G^\dagger \cong con(G)$ اگر و تنها اگر G، شامل مثلث نباشد. بنابراین اگر G دوبخشی باشد، آن‌گاه $G^\dagger \cong con(G)$. هم‌چنین گراف G^2 که گراف توانی مرتبه دوم نامیده می‌شود، گرافی با مجموعه رأس‌های یکسان با G است و دو رأس در آن مجاور است اگر و تنها اگر فاصله آن‌ها در G حداکثر ۲ باشد. بنابر آن‌چه گفته شد $con(G)$ زیرگراف G^2 است. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه [۱۰،۹،۸،۷،۴،۳] را ببینید. نمادهای دیگر از مراجع [۱۱،۵] آمده است.

۲- نتایج اصلی

در این بخش به بررسی گراف همسایه مشترک برخی اعمال گراف‌ها پرداخته شده است. ابتدا به بررسی ساختار گراف همسایه مشترک پیوند دو گراف می‌پردازیم.

قضیه ۱: فرض کنید G_1 و G_2 دو گراف و گراف G_1 گرافی بدون رأس تنها باشد. آن‌گاه $con(G_1+G_2)=K_{n_1+n_2}$، که n_i، $1\le i\le 2$ تعداد رأس‌های گراف G_i است.

اثبات: فرض کنید u_1 و u_2 دو رأس گراف G_1 باشند. در این صورت هر رأسی در گراف G_2 در نظر گرفته شود، با رأس‌های u_1 و u_2 در گراف $G_1 + G_2$ مجاور است. بنابراین $u_1u_2 \in E(con(G_1+G_2))$. به‌طور مشابه اگر v_1 و v_2 دو رأس از گراف G_2 باشند نیز با توجه به تعریف پیوند دو گراف می‌توان دید که v_1v_2 نیز یالی در گراف $con(G_1+G_2)$ می‌باشد. از سویی چون G_1 رأس تنها ندارد، اگر $u_1\in V(G_1)$ و $v_1\in V(G_2)$، آن‌گاه هر رأس در $N_{G_1}(u_1)$، مجاور با v_1 در گراف G_1+G_2 است. بنابراین u_1v_1 نیز یالی در گراف G_1+G_2 می‌باشد. پس همه رأس‌های G_1+G_2 با هم مجاور است. ■

قضیه بعد به بررسی ساختار گراف همسایه مشترک حاصل ضرب دکارتی دو گراف می‌پردازد.

قضیه ۲: فرض کنید G و H دو گراف باشند، آن‌گاه

$$\mathrm{con}(G\times H) = (con(G)\times con(H)) \cup E(G\otimes H)$$

اثبات: فرض کنید $V(G)=\{v_1,\dots,v_n\}$ و $V(H)=\{u_1,\dots,u_m\}$ و هم‌چنین $(v_i,u_j)(v_r,u_s)$ یالی در گراف $con(G\times H)$ باشد. با توجه به تعریف گراف همسایه مشترک می‌توان دید رأس‌های (v_i,u_j) و (v_r,u_s) دارای رأس مجاور مشترک هستند.

اگر v_i,v_r ، آن‌گاه رأس u در H وجود دارد چنان‌که $u\in N_H(u_j)\cap N_H(u_s)$ و این ایجاب می‌کند که برای هر i ثابت که $(1\le i\le n)$ یال‌های بین (v_i,u_j)، $(1\le j\le m)$، فقط یال‌های بین u_j، $(1\le j\le m)$ در گراف $con(H)$ هستند. به‌طور مشابه اگر u_j,u_s باشد، آن‌گاه رأسی مانند v در G وجود دارد چنان‌که $v\in N_G(v_i)\cap N_G(v_r)$ و این ایجاب می‌کند که برای هر j ثابت، $(1\le j\le m)$، یال‌های بین (v_i,u_j)، $(1\le i\le n)$ فقط یال‌های بین v_i، $(1\le i\le n)$، در $con(G)$ هستند. در نتیجه گراف $con(G\times H)$ گراف $con(G)\times con(H)$ را به عنوان زیرگراف دربردارد.

حال فرض کنید $v_i \neq v_r$ و $u_j \neq u_s$ می‌توان رأس (v_k, u_t) را به‌عنوان رأس مجاور با رأس‌های (v_i, u_j) و (v_r, u_s) در گراف $G \times H$ در نظر گرفت. چون (v_k, u_t) مجاور با (v_i, u_j) است بنابراین $(v_k = v_i)$ و $u_j u_t \in E(H)$ یا $u_j = u_t$)) و $v_k v_i \in E(G)$. هم‌چنین چون (v_k, u_t) مجاور با (v_r, u_s) است بنابراین $v_k = v_r$ و $u_s u_t \in E(H)$ یا $u_s = u_t$ و $v_k v_r \in E(G)$.
این ایجاب می‌کند تنها رأس‌هایی که همسایه مشترک رأس‌های (v_i, u_j) و (v_r, u_s) در گراف $G \times H$ هستند، رأس‌های (v_i, u_s) و (v_r, u_j) می‌باشند. بنابراین $v_i v_r \in E(G)$ و $u_j u_s \in E(H)$ و از تعریف گراف ضرب تانسور دو گراف نتیجه به دست می‌آید. ■
در قضیه‌های بعد، فرمول‌هایی برای محاسبه گراف همسایه مشترک ترکیب و حاصل ضرب کرونای دو گراف G و H ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳: فرض کنید G و H دو گراف باشند که رأس تنها ندارند، آن‌گاه

$$con(G[[H]]) = con(G)[[K_m]] \cup E\,(G[[\bar{K}_m]]).$$

اثبات: فرض کنید $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ و $V(H) = \{u_1, \dots, u_m\}$ مجموعه رأس‌های گراف‌های G و H باشند. در این صورت $V(G[[H]]) = \{(v_i, u_j) \mid 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$.
چون برای هر $v_i \in V(G)$، $1 \le i \le n$، v_i یک رأس تنها نیست، بنابراین رأسی وجود دارد که با رأس v_i در G مجاور است. پس بنابر تعریف ترکیب دو گراف، $(v_i, u_r)(v_i, u_s)$، $1 \le r < s \le m$، یک یال در گراف $con(G[[H]])$ می‌باشد. هم‌چنین اگر v_i و v_j، $1 \le i, j \le n$، همسایه مشترک در G داشته باشند، آن‌گاه $(v_i, u_r)(v_j, u_s)$، $1 \le r < s \le m$، یالی در گراف $con(G[[H]])$ است. اگر $v_i v_j$ یالی در G باشد، چون H رأس تنها ندارد، آن‌گاه بنابر تعریف $(v_i, u_r)(v_j, u_s)$، $1 \le r < s \le m$، یالی در گراف $con(G[[H]])$ است. ■

قضیه ۴: فرض کنید G و H دو گراف باشند که رأس تنها ندارند، آن‌گاه

$$con(G^\circ H) = con(G)^\circ K_m \cup E\,\Big(\bigcup_{i=1}^{n} N_G(v_i) + H_i\Big).$$

که n و m به ترتیب تعداد رأس‌های گراف‌های G و H است.

اثبات: فرض کنید $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعه رأس‌های گراف G باشد. i- امین کپی از H در گراف $G^\circ H$ با H_i نشان داده می‌شود. چون v_i یک همسایه مشترک بین هر دو رأس در H_i، $(1 \le i \le n)$ است، پس بین هر دو رأس از H_i در گراف $con(G^\circ H)$ یک یال وجود دارد. از سویی چون H_i، $(1 \le i \le n)$، رأس تنها ندارد بنابراین هر رأس در H_i با v_i در $con(G^\circ H)$ مجاور است. به عبارت دیگر، اگر v_i و v_j، $1 \le i, j \le n$، رأس v را به عنوان همسایه مشترک در گراف G داشته باشند، آن‌گاه v همسایه مشترک آن‌ها در گراف $con(G^\circ H)$ نیز می‌باشد. برای هر یال $v_i v_j \in E(G)$، v_i و v_j به ترتیب همسایه مشترک برای همه رأس‌های H_i و H_j هستند. ■
در قضیه بعد به بررسی ساختار گراف همسایه مشترک جمع رأسی و جمع یالی دو گراف می‌پردازیم.

قضیه ۵: فرض کنید G و H دو گراف باشند، آن‌گاه

$$con\big((G.H)(v,u)\big) = \big(con(G).con(H)\big)(v,u) \cup E\,(N_G(v) + N_H(u))$$

$$con\big((G\sim H)(v,u)\big) = \big(con(G)\sim con(H)\big)(v,u) \cup E\big(v + N_H(u)\big) \cup E(u + N_G(v))$$

که $v + N_H(u)$ اتصال رأس v به همسایه‌های رأس u در گراف H است.

اثبات: بنابر تعریف جمع رأسی یالی دو گراف G و H به آسانی می‌توان دید $(con(G)\cdot con(H))(v,u)$ زیرگراف $con((G\cdot H)(v,u))$ است. با توجه به تعریف جمع رأسی دو گراف با یکی گرفتن رأس‌های u و v در $(G\cdot H)(v,u)$، هر رأس در $N_G(v)$ دارای یک همسایه

مشترک با هر رأس در $N_H(u)$ می‌باشد. بدین ترتیب قسمت اول اثبات می‌شود. اثبات قسمت دوم نیز مشابه قسمت اول با استفاده از تعریف جمع یالی دو گراف نتیجه می‌شود.■

۳- رابطه بین تعدادی گراف خاص و گراف همسایه مشترک آن‌ها

در ادامه گراف همسایه مشترک برخی گراف‌های ترکیبی مانند گراف‌های زیرتقسیم، کلی، خطی، $R(G)$، $Q(G)$ به دست آمده است. ابتدا به بررسی گراف همسایه مشترک گراف زیرتقسیم پرداخته و در واقع ساختار این گراف برحسب گراف G و گراف یالی G بیان می‌کنیم.

به گراف G پنج گراف پایین را نظیر می‌کنند: (مرجع [۱۲] را ببینید)

گراف یالی $L(G)$: گرافی است که مجموعه رأس‌های آن متناظر با مجموعه یال‌های G است و دو رأس با هم مجاورند هرگاه یال‌های متناظر آنها دارای یک رأس مشترک باشند.

گراف زیرتقسیم $S(G)$: گرافی است که با افزودن یک رأس بر هر یال G به دست می‌آید، یا به طور معادل هر یال G با یک مسیر به طول ۲ جایگزین شود.

گراف کلی $T(G)$: بر هر یال G یک رأس جدید قرار می‌دهند و دو رأس جدید را به هم وصل می‌کنند اگر یال‌های متناظرشان در G، دارای رأس مشترک باشند. هم‌چنین رأس‌هایی را که قبلاً در G مجاور بودند به هم وصل می‌کنند.

گراف $R(G)$: بر هر یال G یک رأس جدید قرار می‌دهند و رأس‌هایی را که قبلاً در G مجاور بودند به هم وصل می‌کنند یا به‌طور هم‌ارز می‌توان به جای هر یال G یک مثلث قرار داد.

گراف $Q(G)$: بر هر یال G یک رأس جدید قرار می‌دهند و دو رأس جدید را به هم وصل می‌کنند اگر یال‌های متناظرشان در G، دارای رأس مشترک باشند.

قضیه ۶: فرض کنید G یک گراف باشد، در این صورت $con(S(G)) = G \cup L(G)$.

اثبات: فرض کنید $V(G)=\{v_1,\dots, v_n\}$ و $E(G)=\{e_1,\dots, e_m\}$ به ترتیب مجموعه رأس‌ها و مجموعه یال‌های گراف G باشند. بنابراین مجموعه رأس‌های $S(G)$ به صورت $V(S(G))=\{v_1,\dots, v_n, v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ است که v_{e_i}، $(1\leq i \leq m)$، به وسیله‌ی اضافه کردن یک رأس در یال e_i به دست می‌آید.

اگر $e_k = v_i v_j \in E(G)$ باشد، آن‌گاه $v_i v_j$ یک یال در $con(S(G))$ نیز می‌باشد. چون رأس v_{e_k}، مجاور با v_i و v_j در $S(G)$ بوده در واقع همسایه مشترک این رأس‌ها در $S(G)$ است. با استفاده از تعریف $S(G)$، یال‌های G، فقط یال‌های میان $\{v_1,\dots, v_n\}$ در $con(S(G))$ هستند. از طرفی رأس‌های v_{e_i} و v_{e_j} در $con(S(G))$ مجاورند اگر و فقط اگر یال‌های e_i و e_j در G مجاور باشند که این همان گراف $L(G)$ است. هم‌چنین آشکارا هیچ یالی بین $\{v_1,\dots, v_n\}$ و $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ وجود ندارد، پس $con(S(G)) = G \cup L(G)$.

در ادامه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ مجموعه رأس‌های متناظر با مجموعه یال‌های $\{e_1,\dots, e_m\}$ است. هم‌چنین $v_{e_i} + (N_G(v_k) \cup N_G(v_j))$ پیوند رأس v_{e_i} و $N_G(v_k) \cup N_G(v_j)$ در نظر می‌گیریم.

قضیه ۷: فرض کنید G گرافی با مجموعه رأس‌های $V(G)=\{v_1,\dots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G)=\{e_1,\dots, e_m\}$ باشد. هم‌چنین مجموعه رأس‌های $R(G)$ به صورت $\{v_1,\dots, v_n, v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ باشد. در این صورت

$$con\left(R(G)\right) = G \cup L(G) \cup E\big(con(G)\big)$$
$$\cup\ \left(\cup_{e_i=v_k v_j\, \in E(G)} V_{e_i} + (N_G(v_k) \cup N_G(v_j))\right)$$

اثبات: برای اثبات حکم سه حالت پایین را در نظر بگیرید:

حالت ۱. یال‌های بین رأس‌های $\{v_1,\dots,v_n\}$.

فرض کنید v_i و v_j دو رأس از $R(G)$ باشند. رأس‌های همسایه مشترک این دو رأس از مجموعه $\{v_1,\dots, v_n\}$ در $R(G)$، یکسان با رأس‌های همسایه

مشترک آن‌ها در گراف G است. بنابراین $con(G)$ زیرگراف $con(R(G))$ می‌باشد.

هم‌چنین اگر $e_k=v_iv_j$، یک یال در گراف G باشد، آن‌گاه v_{e_k} همسایه مشترک رأس‌های v_i و v_j در $R(G)$ است. بنابراین v_iv_j یک یال در $con(R(G))$ نیز است.

بنابر تعریف $R(G)$، اگر v_i و v_j در G مجاور نباشند، آن‌گاه این رأس‌ها همسایه مشترکی از مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ در $R(G)$ ندارند.

حالت ۲. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_{e_1},\dots,v_{e_m}\}$.

فرض کنید v_{e_i} و v_{e_j} دو رأس در گراف $R(G)$ باشند. در این صورت فاصله میان رأس‌های v_{e_i} و v_{e_j} در $R(G)$ دست کم ۲ است. بنابراین v_{e_i} و v_{e_j} هیچ همسایه مشترکی در مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ ندارند و v_k مجاور به رأس‌های v_{e_i} و v_{e_j} است اگر و تنها اگر یال‌های e_i و e_j، رأس v_k را به عنوان رأس مشترک در گراف G داشته باشند. بنابراین $L(G)$ زیرگراف $con(R(G))$ می‌شود.

حالت ۳. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_1,\dots, v_n\}$ و $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$.

رأس‌های v_i و v_{e_j} در $R(G)$ را در نظر بگیرید. این رأس‌ها هیچ همسایه مشترکی در مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ ندارند. فرض کنید $e_j=v_rv_s$ یک یال در G است. بنابراین $N_{R(G)}(v_{e_j})=\{v_r,v_s\}$ پس فقط رأس‌های $N_G(v_r)$ و $N_G(v_s)$، همسایه مشترک با رأس v_{e_j} در $R(G)$ دارند.

با استفاده از سه حالت گفته شده نتیجه می‌شود:

$$con\left(R(G)\right) = G \cup L(G) \cup E\left(con(G)\right) \cup \left(\cup_{e_i=v_kv_j \in E(G)} V_{e_i} + \left(N_G(v_k) \cup N_G(v_j)\right)\right)$$

اکنون با استفاده از قضیه ۷ رابطه‌ی بین $R(G)$ و $con(R(G))$ به دست می‌آید.

نتیجه ۸: فرض کنید G یک گراف باشد. آن‌گاه $R(G)$ زیرگراف $con(R(G))$ است.

اثبات: فرض کنید $e_i=v_kv_j$ یالی از گراف G باشد. آن‌گاه $v_j \in N_G(v_k)$ و $v_k \in N_G(v_j)$. این نتیجه می‌دهد که $v_{e_i}v_k$ و $v_{e_i}v_j$ یال‌هایی در $\cup_{e_i=v_kv_j \in E(G)} v_{e_i} + (N_G(v_k) \cup N_G(v_j))$ هستند. بنابراین $R(G)$ زیرگراف $G \cup (\cup_{e_i=v_kv_j \in E(G)} v_{e_i} + (N_G(v_k) \cup N_G(v_j)))$ است. حال با استفاده از قضیه ۷ می‌توان دید که $R(G)$ زیرگراف $con(R(G))$ است. ■

در گراف G، فرض کنید $\{e_1, \dots, e_k\}$ مجموعه یال‌هایی باشند که رأس u را به عنوان رأس مشترک دارند. در ادامه مجموعه $\{v_{e_1}, \dots, v_{e_k}\}$ با نماد $N'_{G(u)}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹: فرض کنید G یک گراف باشد و $\delta(G) \geq 2$، در این صورت

$$con\left(Q(G)\right) = G \cup L(G) \cup \left(\cup \left(\cup_{e_{uv} \in E(G)} \acute{N}_G(u) + \acute{N}_G(v)\right) \cup \left(\cup_{e_{uv} \in E(G)} v_e + \left(N_G(u) \cup N_G(v)\right)\right)$$

اثبات: برای اثبات حکم سه حالت پایین را در نظر بگیرید:

حالت ۱. یال‌های بین رأس‌های $\{v_1,\dots,v_n\}$.

فرض کنید v_i و v_j دو رأس از $Q(G)$ باشند. چون فاصله میان رأس‌های G در گراف $Q(G)$ حداقل ۲ است، بنابراین آن‌ها هیچ همسایه مشترکی از رأس‌های مجموعه $\{v_1,\dots,v_n\}$ ندارند. فرض کنید $N_G(v_i)=\{v_1, \dots, v_k\}$ همسایه‌های رأس v_i و $e_1=v_iv_1, \dots, e_k=v_iv_k$ هستند. بنابراین همسایه‌های رأس v_i در گراف $Q(G)$، $\{v_{e_1}, \dots, v_{e_k}\}$ است. اما v_{e_1}، ....، v_{e_k}، به غیر از v_i، به ترتیب مجاور به v_1، ....، v_k از مجموعه $\{v_1,\dots,v_n\}$ در گراف $Q(G)$ نیز هستند. بنابراین G زیرگراف $con(Q(G))$ است.

حالت ۲. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_{e_1},\dots,v_{e_m}\}$.

فرض کنید v_{e_i} و v_{e_j} دو رأس در گراف $Q(G)$ باشند. با استفاده از تعریف $Q(G)$، v_{e_i} و v_{e_j} یک همسایه مشترک در مجموعه $\{v_1,\dots,v_n\}$، مانند v_k دارند اگر و تنها اگر یال‌های e_i و e_j، رأس v_k را به عنوان رأس مشترک در G داشته باشند. بنابراین $L(G)$ زیرگراف $con(Q(G))$ است.

حال رأس v_{e_i} در $Q(G)$ را در نظر بگیرید. اگر $e_i=v_rv_s$ یک یال در G باشد، آن‌گاه فقط v_{e_i} می‌تواند به عنوان همسایه مشترک برای مجموعه‌های $N'_G(v_r)$ و $N'_G(v_s)$ باشد. بنابراین برای هر یال $e_i=v_rv_s$ در G، $N'_G(v_r)+N'_G(v_s)$ زیرگراف $con(Q(G))$ است.

حالت ۳. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_1,\dots, v_n\}$ و $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$.

رأس‌های v_i و v_{e_j} در $Q(G)$ را در نظر بگیرید. چون فاصله میان رأس‌های G در گراف $Q(G)$ حداقل ۲ است، بنابراین آن‌ها هیچ همسایه مشترکی از رأس‌های مجموعه $\{v_1,\dots, v_n\}$ ندارند. فرض کنید $e_j=v_rv_s$ یالی در G باشد. در این صورت همسایه‌های v_{e_j} در مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$، $N'_G(v_r)$ و $N'_G(v_s)$ هستند. اگر $e_t=v_rv_k$، آن‌گاه $v_{e_t}\in V(Q(G))$ در مجموعه $\{v_1,\dots, v_n\}$ فقط با v_r و v_k مجاور می‌شود. پس $\{v_1,\dots, v_n\}$ تنها رأس‌هایی در $N_G(v_r)\cup N_G(v_s)$ هستند که دارای یک همسایه مشترک با v_{e_j} در مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ هستند.

با در نظر گرفتن حالت‌های بالا می‌توان دید:

$$con\left(Q(G)\right) = G\cup L(G)\cup\left(\cup\ \left(\cup_{e=uv\in E(G)} \acute{N}_G(u)+\acute{N}_G(v)\right)\cup\ \left(\cup_{e=uv\in E(G)} v_e+(N_G(u)\cup N_G(v)\right)\right)$$

حال با استفاده از قضیه ۹ رابطه‌ی بین $Q(G)$ و $con(Q(G))$ را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱۰: فرض کنید G یک گراف باشد، آن‌گاه $Q(G)$ زیرگراف $con(Q(G))$ است.

اثبات: فرض کنید $e_i=v_kv_j$ یالی از گراف G باشد، آن‌گاه $v_k\in N_G(v_j)$ و $v_j\in N_G(v_k)$. این نتیجه می‌دهد $v_{e_i}v_k$ و $v_{e_i}v_j$ یال‌هایی در $\cup_{e_i=v_kv_j\in E(G)} v_{e_i}+(N_G(v_k)\cup N_G(v_j))$ باشند. بنابراین $Q(G)$ زیرگراف

$$L(G)\cup\left(\cup_{e_i=v_kv_j\in E(G)} v_{e_i}+(N_G(v_k)\cup N_G(v_j))\right)$$

است. حال با استفاده از قضیه ۹ می‌توان دید که $Q(G)$ زیرگراف $con(Q(G))$ است. ■

در قضیه بعد به بررسی ساختار گراف همسایه مشترک گراف کلی می‌پردازیم.

قضیه ۱۱: فرض کنید G یک گراف باشد، آن‌گاه

$$con\left(T(G)\right) = G\cup E(con(G))\cup L(G)\cup con(L(G))\cup\left(\cup_{e=uv\in E(G)} v_e+\left(N_G(u)\cup N_G(v)\right)\right)$$

اثبات: برای اثبات حکم سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۱. یال‌های بین رأس‌های $\{v_1,\dots,v_n\}$.

فرض کنید v_i و v_j دو رأس از $T(G)$ باشند. در این صورت رأس‌های همسایه مشترک این دو رأس از مجموعه $\{v_1,\dots, v_n\}$ در $T(G)$، یکسان با رأس‌های همسایه مشترک آن‌ها در گراف G است. بنابراین $con(G)$ زیرگراف $con(T(G))$ می‌باشد. هم‌چنین اگر $e_k=v_iv_j$ یک یال در گراف G باشد، آن‌گاه v_{e_k} همسایه مشترک رأس‌های v_i و v_j در $T(G)$ است. بنابراین v_iv_j یک یال در $con(T(G))$ نیز است. بنابر تعریف $T(G)$، اگر v_i و v_j در G مجاور نباشند، آن‌گاه این رأس‌ها همسایه مشترکی از مجموعه $\{v_{e_1},\dots, v_{e_m}\}$ در $T(G)$ ندارند.

حالت ۲. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_{e_1},\dots,v_{e_m}\}$.

فرض کنید v_{e_i} و v_{e_j} دو رأس در گراف $T(G)$ باشند. با استفاده از تعریف $T(G)$، v_{e_i} و v_{e_j} یک همسایه مشترک در مجموعه $\{v_1,\dots,v_n\}$، مانند v_k دارند اگر و تنها اگر یال‌های e_i و e_j، رأس v_k را به عنوان رأس مشترک در G داشته باشند. بنابراین $L(G)$ زیرگراف $con(T(G))$ است.

از سوی دیگر اگر مجموعه رأس‌های $\{v_1,\dots,v_n\}$ از $V(T(G))$ حذف شود، گراف باقی‌مانده گراف $L(G)$ است. بنابراین یال‌های دیگری که بین رأس‌های $\{v_{e_1},\dots,v_{e_m}\}$ در $con(T(G))$ باقی می‌ماند فقط یال‌های $con(L(G))$ هستند.

حالت ۳. یال‌های موجود بین رأس‌های $\{v_1,\ldots,v_n\}$ و $\{v_{e_1},\ldots,v_{e_m}\}$.

فرض کنید $e_i=v_rv_s$ یک یال در G باشد. بنابراین $N_{T(G)}(v_{e_i})=\{v_r,v_s\}\cup N'_G(v_r)\cup N'_G(v_s)$ و این ایجاب می‌کند که $N_G(v_r)$ و $N_G(v_s)$ تنها رأس‌هایی در مجموعه $\{v_1,\ldots,v_n\}$ هستند که $\{v_r,v_s\}$ را به عنوان همسایه مشترک با v_{e_i} دارند. از طرف دیگر $N_G(v_r)$ و $N_G(v_s)$ تنها رأس‌هایی در مجموعه $\{v_1,\ldots,v_n\}$ هستند که $N'_G(v_r)\cup N'_G(v_s)$ را به عنوان همسایه مشترک با v_{e_i} در $T(G)$ دارند. بنابراین v_{e_i} فقط با $N_G(v_r)\cup N_G(v_s)$ در مجموعه $\{v_1,\ldots,v_n\}$ مجاور است. با توجه به آن‌چه که گفته شد، می‌توان دید:

$$con\left(T(G)\right)=G\cup E(con(G))\cup L(G)\cup con(L(G))\cup\left(\cup_{e=uv\in E(G)} v_e+\left(N_G(u)\cup N_G(v)\right)\right)$$

حال با استفاده از قضیه ۱۱ رابطه‌ی بین $T(G)$ و $con(T(G))$ را به دست می‌آوریم.

نتیجه ۱۲: فرض کنید G یک گراف باشد. آن‌گاه $T(G)$ زیرگراف $con(T(G))$ است.

اثبات: فرض کنید $e_i=v_kv_j$ یالی از گراف G باشد. در این صورت $v_k\in N_G(v_j)$ و $v_j\in N_G(v_k)$ و این نتیجه می‌دهد که $v_{e_i}v_k$ و $v_{e_i}v_j$ یال‌هایی در $\cup_{e_i=v_kv_j\in E(G)}v_{e_i}+(N_G(v_k)\cup N_G(v_j))$ هستند. بنابراین $T(G)$ زیرگراف $G\cup L(G)\cup(\cup_{e_i=v_kv_j\in E(G)}v_{e_i}+(N_G(v_k)\cup N_G(v_j)))$ است. حال با استفاده از قضیه ۱۱ می‌توان دید که $T(G)$ زیرگراف $con(T(G))$ است. ■

۴- نتایج بیشتر روی گراف همسایه مشترک

در [۱] همبندی گراف همسایه مشترک مورد بررسی قرار گرفته است و ثابت شده است گراف همسایه مشترک همبند است اگر و فقط اگر گراف G همبند و غیر دو بخشی باشد. در ادامه نتیجه‌هایی درباره‌ی همیلتونی بودن گراف همسایه مشترک بیان شده است.

قضیه ۱۳: فرض کنید G گرافی همبند با n رأس و $n\geq 3$ و n یک عدد فرد باشد. اگر G یک گراف همیلتونی باشد، آن‌گاه $con(G)$ نیز همیلتونی است.

اثبات: فرض کنید G یک گراف همیلتونی باشد، آن‌گاه G دارای دور $C_n: v_1-v_2-\cdots-v_n-v_1$ است که از هر رأس G دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند. آشکارا این دور در $con(G)$ به‌صورت $C_{n'}: v_1-v_3-v_5\cdots-v_n-v_2-v_4\cdots-v_{n-1}-v_1$ است، که از همه رأس‌های $con(G)$ دقیقاً یک‌بار عبور می‌کند. بنابراین $con(G)$ نیز گرافی همیلتونی است. ■

توجه کنید که وارون قضیه ۱۳ درست نیست. در شکل ۱، G گرافی با تعداد رأس‌های فرد است که شامل دور همیلتونی نیست ولی $con(G)$ دور همیلتونی $v_2-v_5-v_3-v_1-v_4-v_2$ را دارد. هم‌چنین اگر G گرافی همیلتونی با n رأس باشد که n زوج است، آن‌گاه $con(G)$ لزوماً گرافی همیلتونی نیست. برای نمونه گراف $K_{a,a}$ را در نظر گیرید. به آسانی می‌توان دید $K_{a,a}$ گرافی همیلتونی است و $con(K_{a,a})=K_a\bigcup K_a$ که $K_a\bigcup K_a$ گرافی ناهمبند و بی‌دور همیلتونی است.

در حالت کلی اگر $con(G)$ همیلتونی باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت G همیلتونی است. برای نمونه شکل ۲ را ببینید.

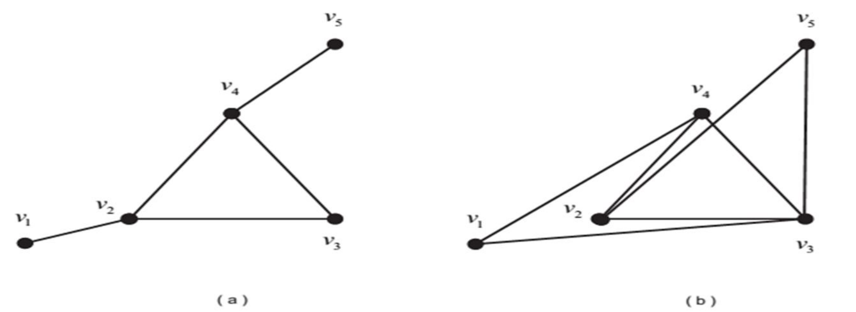
در ادامه به بررسی عدد خوشه و عدد رنگی گراف همسایه مشترک پرداخته شده است.

قضیه ۱۴: فرض کنید G گرافی همبند با $\omega(G)\geq 3$ باشد. در این صورت $\omega(con(G))\geq\omega(G)$.

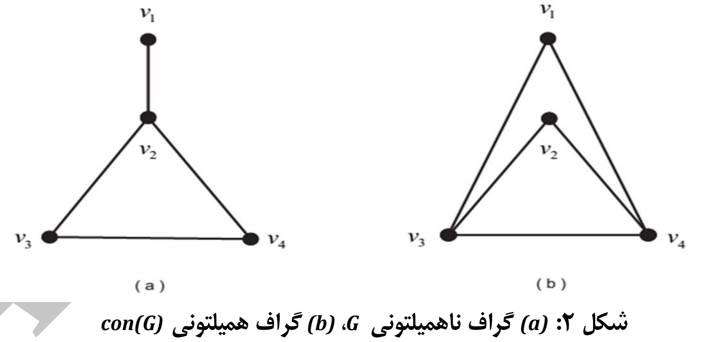
اثبات: فرض کنید S یک خوشه در گراف G باشد چنان‌که $|S|=\omega(G)$. بنابراین برای هر $x,y,z\in V(S)$، داریم $xy,xz,yz\in E(G)$. این نتیجه می‌دهد برای دو رأس $x,y\in V(S)$، داریم $xy\in E(con(G))$. از این رو S یک خوشه در گراف $con(G)$ نیز است و این ایجاب می‌کند $\omega(con(G))\geq\omega(G)$. ■

بنابر تعریف عدد رنگی نتیجه می‌شود که اگر H زیرگراف گراف G و G گرافی k- رنگ‌پذیر باشد، آن‌گاه H نیز k- رنگ‌پذیر است پس $\chi(G) \geq \chi(H)$ هم‌چنین با استفاده از تعریف گراف کلی نتیجه می‌شود برای هر گراف G، $\chi''(G) = \chi(T(G))$.
بنابراین با استفاده از نتیجه ۱۲ نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۱۵: فرض کنید G یک گراف باشد، آن‌گاه $\chi''(G) \leq \chi(con(T(G)))$.



شکل ۱: (a) گراف ناهمیلتونی G، (b) گراف همیلتونی $con(G)$



شکل ۲: (a) گراف ناهمیلتونی G، (b) گراف همیلتونی $con(G)$

فهرست منابع

[1] A. Alwardi, B. Arsić, I. Gutman, N. D. Sonera, The Common neighbor hood graph and its energy, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics, 7 (2) (2012) 1-8.

[2] A. Alwardi, N. D. Soner, I. Gutman, On the common-neighborhood energy of a graph, Bull. Acad. Serbe Sci. Arts (Cl. Sci. Math. Natur.) 143 (2011) 49-59.

[3] S. K. Ayyaswamy, S. Balachandran, I. Gutman, On second–stage spectrum and energy of a graph, Kragujevac J. Math., 34 (2010) 139-146.

[4] S. K. Ayyaswamy, S. Balachandran, K. Kannan, Bounds on the second stage spectral radius of graphs, Int. J. Math. Sci., 1 (2009) 223-226.

[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, 244. Springer, New York, 2008.

[6] T. Došlić, Splices, links, and their degree-weighted Wiener polynomials, Graph Theory Notes New York, 48 (2005) 47-55.

[7] T. Došlić, M. Ghorbani, M. A. Hosseinzadeh, Eccentric connectivity polynomial of some graph operations, Utilitas Mathematica, 84 (2011) 297-309.

[8] M. Ghorbani, M. A. Hosseinzadeh, M. V. Diudea, On Omega Polynomial of Cartesian Product graph, Utilitas Mathematica, 84 (2011) 165-172.

[9] A. Hamzeh, S. Hossein-Zadeh, A. R. Ashrafi, y-Wiener index of composite graphs, Appl. Math. Lett., 24 (2011) 1099-1104.

[10] S. Hossein-Zadeh, A. Hamzeh, A. R. Ashrafi, Wiener-type invariants of some graph operations, Filomat, 29 (2009) 103-113.

[11] W. Imrich, S. Klavžar, Product graphs: structure and recognition, John Wiley & Sons, New York, USA, 2000.

[12] W. G. Yan, B.-Y. Yang, Y.-N. Yeh, The behavior of Wiener indices and polynomials of graphs under five graph decorations, Appl. Math. Lett., 20 (2007) 290-295.