دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره پنجم، بهار ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

محاسبه تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب نهایی تحت تکنولوژی با دسترسی ضعیف در یک شبکه دو مرحله‌ای

راحله راستگو[۱]، محسن رستمی مال خلیفه[۲*]

(۱) دانشجوی کارشناسی ارشد گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) دانشیار گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: زمستان ۱۳۹۴ تاریخ پذیرش مقاله: بهار ۱۳۹۵

چکیده

تراکم یکی از مسایل مهم در تحلیل پوششی داده‌ها که از اهمیت خاصی برخوردار است. اخیراً، چه در مقالات اقتصادی و چه در مقالات تحقیق در عملیات، سرعت تحقیقات در مورد تراکم به طور چشمگیری افزایش پیدا کرده است. تراکم یک مرحله اسرافی در فرایند تولید است که خروجی‌ها در نتیجه افزایش ورودی‌ها کاهش پیدا می‌کنند. در اقتصاد، تراکم از این بابت حائز اهمیت است که حذف آن باعث کاهش هزینه و همچنین افزایش خروجی می‌شود. بنابراین منفعت شناسایی تراکم و کاهش آن زیاد است.

در این مقاله، یک روش برای تشخیص و محاسبه میزان تراکم با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تحت دسترسی ضعیف در یک شبکه سری دو مرحله‌ای ارائه می‌کنیم و مدلی برای تشخیص و محاسبه مقدار تراکم با وجود خروجی‌های نهایی مطلوب و نامطلوب ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده، تراکم، خروجی نامطلوب، شبکه‌ی دو مرحله‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Mohsen_rostamy@yahoo.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده (DEA) یک روش غیر پارامتری مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی است که کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده DMU، متجانس با چند ورودی و چند خروجی را محاسبه می‌نماید که اولین بار توسط چارنز، کوپر و رودز [1] در سال ۱۹۷۸ مطرح شد.
مدل CCR اولین مدل کلاسیک DEA برای اندازه گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده است که در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز [1] ارائه شد سپس مدل BCC توسط بنکر، چارنز و کوپر[2] در سال ۱۹۸۴ مطرح شد.
یکی از مفاهیم اقتصادی تحلیل پوششی داده‌ها تراکم می‌باشد. اولین بار مفهوم اقتصادی تراکم توسط فار و سونسون [3] در سال ۱۹۸۰ در مقالات DEA ارائه شد و متعاقباً توسط فار، گروسکوف و لوول [4]شکل اجرایی عملی پیدا کرد. در سال ۱۹۹۶ کوپر و همکاران [5] مدلی بر مبنای متغیرهای کمکی (CTT) معرفی نمودند و مدل CTT توسط براکت و همکارانش [6] در صنعت چین به کار گرفته شد.
تحقیقاتی در زمینه واحدهای تصمیم‌گیرنده دارای فرایند دو یا چند مرحله‌ای صورت گرفته است که در آن علاوه بر ورودی‌ها و خروجی‌ها، اندازه واسطه وجود دارد که این اندازه واسطه خروجی مرحله اول است که به‌عنوان ورودی مرحله دوم در نظر گرفته می‌شود. در این زمینه وانگ [7] در سال ۱۹۹۷، فرایند دو مرحله‌ای را بیان و در صنعت بانکداری پیاده کرد. این مدل توسط ژو و سیفورد [8] در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ نیز در زمینه‌های دیگر پیاده‌سازی شد.
روش‌های پیشین برای محاسبه تراکم در DEA، مبحث تراکم را فقط با در نظرگرفتن خروجی‌های مطلوب مورد بررسی قرار می‌دهند. اما در فرایند تولیدات، خروجی‌های نامطلوب معمولاً با خروجی‌های مطلوب به‌طور همزمان تولید می‌شود. در سال ۲۰۱۵ فانگ[9] روشی برای محاسبه تراکم در حضور خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تحت تکنولوژی با امکان‌پذیری ضعیف ارائه داده است. اما این مقالات برای واحدهای دو مرحله‌ای مناسب نیستند ما در این مقاله می‌خواهیم یک روش جدید برای محاسبه تراکم در یک شبکه دو مرحله‌ای با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تحت تکنولوژی با امکان‌پذیری ضعیف با استفاده از مدل تابع فاصله جهتدار در یک شبکه دو مرحله‌ای ارائه دهیم.

۲- روش فانگ برای محاسبه تراکم با استفاده از تابع فاصله جهتدار

در این بخش از مقاله، فانگ یک روش جهت تشخیص و محاسبه مقدار تراکم باوجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب تحت تکنولوژی ضعیف با استفاده از تابع فاصله جهتدار ارائه می‌دهد.
فانگ فرمول دوآل مدل فاصله جهتدار را با استفاده از قضیه دوآلیتی برنامه‌ریزی خطی، به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
\min \quad & b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - \pi^y y_{k_0} \\
\text{s.t} \quad & y_k\pi^y - b_k\pi^b - x_k\pi^x \leq 0 \qquad k = 1, \dots, K \\
& b_{k_0}\pi^b + x_{k0}\pi^x + y_{k_0}\pi^y = 1 \qquad (1) \\
& \pi^x \geq 0 \\
& \pi^y \geq 0 \qquad (1-1) \\
& \pi^b \quad \text{آزاد}
\end{aligned}$$

π^{x*}،π^{y*}وπ^{b*} جواب بهین مدل (۱) با در نظر گرفتن نقطه تصویرشده زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}
x'_{k_0} &= x_{k_0} - \delta^*_{k_0} x_{k_0} \\
y'_{k_0} &= y_{k_0} + \delta^*_{k_0} y_{k_0} \qquad (2) \\
b'_{k_0} &= b_{k_0} - \delta^*_{k_0} b_{k_0}
\end{aligned}$$

DMU_K با مختصات (x_k, y_k, b_k) در وضعیت تراکم قوی است اگر وتنها اگر در هر جواب بهین حداقل یک π_i^{b*} ،$i \in \{1, \dots, l\}$ منفی باشد.
با توجه به مطلب فوق علامت منفی برای یک متغیر دوآل که به یک خروجی نامطلوب مربوط می‌شود که به وقوع تراکم اشاره دارد.
سپس فانگ مدل زیر را برای مشخص کردن مقدار تراکم قوی پیشنهاد داد:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \alpha \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k y_{km} \geq \\
&y_{k_0 m} + \delta\, y_{k_0 m} && m = 1, \dots, M \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k b_{ki} = \\
&b_{k_0 i} - \delta\, b_{k_0 i} && i = 1, \dots, L \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k x_{kn} \leq \\
&x_{k_0 n} + \delta x_{k_0 n} && n = 1, \dots, N \\
&b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - y_{k_0}\pi^y = \delta && (۳) \\
&y_k\pi^y - b_k\pi^b - x_k\pi^x \leq 0 \\
&k = 1, \dots, k \\
&b_{k_0}\pi^b + x_{k0}\pi^x + y_{k_0}\pi^y = 1 \\
&\pi_i^b - \alpha \geq 0 && i = 1, \dots, L
\end{aligned}
$$

$(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}, \delta^*, \alpha^*)$ جواب بهینه مدل (۳) با در نظر گرفتن نقطه تصویر (۲) می‌باشد.

اگر $\alpha^* < 0$، پس نقطه تصویر شده، $(\acute{x}, \acute{y}, \acute{b})$ از DMU_{k_0} دارای تراکم قوی است.

اگر $\alpha^* > 0$، پس نقطه تصویر شد $(\acute{x}, \acute{y}, \acute{b})$ از DMU_{k_0} دارای تراکم نیست.

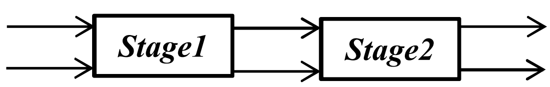
اگر $\alpha^* = 0$، برای نقطه تصویر شده $(\acute{x}, \acute{y}, \acute{b})$ از DMU_{k_0}، سیستم زیر را حل می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \beta \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k y_{km} \geq y_{k_0 m} + \partial^*\, y_{k_0 m} + t_m^+ \\
&m = 1, \dots, M \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k b_{ki} \leq b_{k_0 i} - \partial^*\, b_{k_0 i} \\
&i = 1, \dots, L \\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} z_k x_{kn} \leq x_{k_0 n} - \delta^*\, x_{k_0 n} - t_n^- \\
&n = 1, \dots, N \\
&\textstyle\sum_{m=1}^{M} t_m^+ - \beta \geq 0 && (۴) \\
&\textstyle\sum_{n=1}^{N} t_n^- - \beta \geq 0 \\
&z_k \geq 0 && k = 1, \dots, K
\end{aligned}
$$

در حالی که δ^* جواب بهینه مدل (۱) است. اگر $\beta > 0$ پس نقطه تصویر شده $(\acute{x}, \acute{y}, \acute{b})$، برای DMU_{k_0} تراکم ضعیف دارد. در غیر اینصورت تراکم ندارد.

۳- مجموعه امکان تولید یک شبکه دومرحله‌ای

واحد تصمیم‌گیرنده دو مرحله ای را که در شکل ۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. در اینجا فرض شده است که هر واحد تصمیم‌گیرنده در مرحله اول N ورودی و D خروجی می‌باشد. در مرحله دوم D خروجی مرحله اول به صورت D ورودی مرحله دوم عمل می‌کند و M خروجی مطلوب و L خروجی نامطلوب نهایی را تولید می‌کنند. بردارهای ورودی مرحله اول را با x_j، بردار واسطه یعنی خروجی‌های مرحله اول و ورودی‌های مرحله دوم را با z_j و خروجی‌های مطلوب مرحله دوم را با y_j و خروجی‌های نامطلوب مرحله دوم را با b_j نشان می‌دهیم.



شکل۱

$x_{ij}, i = 1, \dots, m \qquad z_{dj}, d = 1, \dots, t \quad y_{rj}, s = 1, \dots, r$

$b_{lj}, l = 1, \dots, L$

فرض کنیم k شبکه‌ی دو مرحله‌ای تحت ارزیابی باشند. شبکه jام در مرحله اول با مصرف بردار ورودی x_j، خروجی z_j و در مرحله دوم با مصرف بردار ورودی z_j خروجی مطلوب y_j و خروجی نامطلوب b_j را تولید می‌نماید. با پذیرش اصول شمول مشاهدات، تحدب، امکان‌پذیری، بی‌کرانی اشعه مجموعه‌های امکان تولید متناظر مراحل اول و دوم به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$pps^{*}=\left\{(x,z,y,b)\left|\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j\le x\\ ,\sum_{j=1}^{k}\lambda_j z_j\ge z,\\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j z_j\le z,\\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j y_j\ge y,\\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j b_j\le b,\\ \lambda_j\ge 0,\mu_j\ge 0\\ ,j=1,\dots,k\end{array}\right.\right\} \qquad (۵)$$

با ترکیب محدودیت‌های متناظر تولیدات میانی خواهیم داشت:

$$pps=\left\{(x,z)\left|\begin{array}{c}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x_j\le x,\\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j y_j\ge y,\\ \sum_{j=1}^{k}\mu_j b_j\le b,\\ \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\mu_j)\,z_j\ge 0,\\ \lambda_j\ge 0,\mu_j\ge 0,\\ j=1,\dots,k\end{array}\right.\right\} \qquad (۶)$$

روشن است که دو مجموعه امکان تولید (۵) و (۶) ارائه شده در بالا معادل نیستند به عبارت دیگر نمی‌توان از رابطه (۶) رابطه (۵) را نتیجه گرفت. یعنی pps بزرگتر از pps^* است. در اینجا رابطه (۵) به عنوان رابطه مجموعه امکان تولید متناظر واحدهای شبکه‌ای معرفی می‌شود.

در قسمت بعد مدل فاصله جهتدار متناظر یک شبکه‌ی دو مرحله‌ای را تحت امکان‌پذیری ضعیف با خروجی‌های نهایی مطلوب و نامطلوب بدست می‌آوریم.

۴- مدل پیشنهادی تابع فاصله جهتدار یک شبکه دو مرحله‌ای

فرض می‌کنیم k شبکه دومرحله‌ای وجود دارد. که در هر یک N ورودی و M خروجی نهایی مطلوب و L خروجی نهایی نامطلوب و T تولید میانی به کار برده می‌شود. مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های نهایی مطلوب و نامطلوب و تولیدات میانی (ورودی مرحله اول و خروجی مرحله دوم) نظیر هر واحد تصمیم‌گیرنده دو مرحله‌ای به ترتیب با بردارهای $(x_{1j},x_{2j},\dots,x_{nj})$ و $(y_{1j},y_{2j},\dots,y_{mj})$ و $(b_{1j},b_{2j},\dots,b_{lj})$ و $(z_{1j}^1,z_{2j}^1,\dots,z_{tj}^1)$ و $(z_{1j}^2,z_{2j}^2,\dots,z_{tj}^2)$ نمایش دهیم. که $z^1=z^2$.

با توجه به این که k، شبکه دو مرحله‌ای مشاهده شده داریم. مجموعه امکان تولید با توجه به اصول شمول مشاهدات، امکان‌پذیری ورودی‌ها و خروجی‌ها، امکان پذیری ضعیف برای خروجی‌های نهایی مطلوب و نامطلوب و تحدب مانند زیر فرموله می‌کنیم:

$$pps_{new}=\left\{(x,z^1,z^2,y,b)\left|\begin{array}{c}\sum_{k=1}^{k}\lambda_k x_{kn}\le x_n,\\ \sum_{k=1}^{k}\lambda_k z_{kd}^1\ge z_d^1,\\ \sum_{k=1}^{k}\mu_k z_{kd}^2\le z_d^2,\\ \theta\sum_{k=1}^{k}\mu_k y_{km}\ge y_m,\\ \theta\sum_{k=1}^{k}\mu_k b_{ki}=b_i\end{array}\right.\right\}$$

مدل فاصله جهتدار (۱) را روی مرز pps_{new} تصویر می‌کنیم. ناکارایی برای شبکه دومرحله‌ای k_0 به وسیله مدل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&IE(k_0)=\max\delta\\ &s.t\ \sum_{j=1}^{k}\lambda_k x_{kn}\le x_{k_0n}-\delta x_{k_0n}\\ &n=1,\dots,N \qquad\qquad (۷)\\ &\sum_{j=1}^{k}\lambda_k z_{kd}^1\ge z_{k_0d}^1+\delta z_{k_0d}^1\\ &d=1,\dots,t\\ &\sum_{j=1}^{k}\mu_k z_{kd}^2\le z_{k_0d}^2-\delta z_{k_0d}^2\\ &d=1,\dots,t\\ &\sum_{j=1}^{k}\mu_k b_{ki}=b_{k_0i}-\delta b_{k_0i}\\ &i=1,\dots,L\\ &\sum_{j=1}^{k}\mu_k y_{km}\ge y_{k_0m}+\delta y_{k_0m}\end{aligned}$$

$$m = 1, \dots, M$$
$$\lambda_k \geq 0 \qquad k = 1, \dots, k$$
$$\mu_k \geq 0 \qquad k = 1, \dots, k$$

که $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ و $(\mu_1, \dots, \mu_k)$ متغیرهای حساسیت و $(x_{k_0 n}, z^1_{kd}, z^2_{kd}, y_{k_0 m}, b_{k_0 m})$ بردار جهتدار می باشند. اگر $IE(k_0) = 0$ شبکه دو مرحله‌ای k_0 کارا است در غیر این‌صورت ناکارا است.
اگر شبکه دو مرحله‌ای k_0 ناکارا باشد. یک تصویر به روش زیر می‌سازیم.

$$\begin{aligned} x'_{k0} &= x_{k0} - \delta^* x_{k0}, \\ z'^1_{k0} &= z^1_{k0} + \delta^* z^1_{k0}, \\ z'^2_{k0} &= z^2_{k0} - \delta^* z^2_{k0} \\ y'_{k0} &= y_{k0} + \delta^* y_{k0}, \\ b'_{k0} &= b_{k0} - \delta^* b_{k0} \end{aligned} \qquad (۸)$$

تعریف ۱: یک شبکه دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ به‌طور قوی متراکم است اگر روی مرز pps_{new} کارا باشد و یک فعالیتی مانند $(\tilde{x}, \widetilde{z^1}, \widetilde{z^2}, \tilde{y}, \tilde{b}) \in pps_{new}$ موجود باشد بطوری که

$$\tilde{x} = \alpha x_k, (0 < \alpha < 1)$$
$$\tilde{y} = \acute{\beta} x_k, (\acute{\beta} > 0)$$
$$\tilde{b} = \gamma b_k, (0 < \gamma < 1)$$

۵- مدل پیشنهادی برای محاسبه تراکم در یک شبکه دو مرحله‌ای

در این بخش از مقاله مدلی برای ارزیابی تراکم در یک شبکه دو مرحله‌ای جهت تشخیص و محاسبه مقدار تراکم، با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب نهایی تحت امکان‌پذیری ضعیف ارائه می‌دهیم.
با استفاده از قضیه دوآلیتی برنامه‌ریزی خطی، فرمول دوآل مدل فاصله جهتدار (۷) به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\min\ b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - z^1_{k0}\pi^{z_1} + z^2_{k0}\pi^{z_2} - y_{k_0}\pi^y$$
$$z^1_k\pi^{z_1} - x_k\pi^x \leq 0 \qquad k = 1, \dots, k$$
$$\text{s.t}$$
$$y_k\pi^y - b_k\pi^b - z^2_k\pi^{z_2} \leq$$
$$b_{k_0}\pi^b + z^1_{k_0}\pi^{z^1} + z^2_{k_0}\pi^{z^2} + y_{k_0}\pi^y + x_{k_0}\pi^x = 1$$
$$\pi^x \geq 0$$
$$\pi^{z^1} \geq 0$$
$$\pi^{z^2} \geq 0$$
$$\pi^y \geq 0$$
$$\pi^b \quad \text{ازاد}$$
$$\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{z^2*}, \pi^{y*} \text{و} \pi^{b*}$$

جواب بهین مدل (۹) با در نظر گرفتن رابطه (۸) می‌باشد.
قضیه ۱: یک شبکه دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ در وضعیت تراکم قوی است اگر و تنها اگر در هر جواب بهین حداقل یک π^{b*}_i،$i \in \{1, \dots, l\}$ منفی است.
برهان فرض می‌کنیم شبکه‌ی دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ در وضعیت تراکم قوی است.
نشان می‌دهیم در هر جواب بهینه حداقل یک π^{b*}_i ، $i \in \{1, \dots, l\}$ منفی است.
طبق قضیه دوآلیتی برنامه‌ریزی خطی نتیجه می‌شود که یک جواب بهینه مانند $(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ برای مدل (۹) با در نظر گرفتن نقطه تصویر شده (۸) وجود دارد بطوری‌که

$$b_{k_0}\pi^{*b} + x_{k_0}\pi^{*x} - z^1_{k0}\pi^{*z_1} + z^{*2}_{k0}\pi^{z_2} - y_{k_0}\pi^{*y} = 0 \qquad (۱۰)$$

طبق فرض شبکه دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ تراکم قوی است. پس با توجه به تعریف ۱ بنابراین فعالیتی مانند $(\tilde{x}, \widetilde{z^1}, \widetilde{z^2}, \tilde{y}, \tilde{b}) \in pps_{new}$ وجود دارد به بطوری‌که

$$\tilde{x} = \alpha x_k, (0 < \alpha < 1)$$

$$\tilde{y} = \acute{\beta} x_k, (\acute{\beta} > 0)$$
$$\tilde{b} = \gamma b_k, (0 < \gamma < 1)$$

بدیهی است که:

$$\tilde{b}\pi^{*b} + \tilde{x}\pi^{*x} - \widetilde{z^1}\pi^{*z_1} + \widetilde{z^2}\pi^{*z_2} - \tilde{y}\pi^{*y} \geq 0 \qquad (۱۱)$$

با کم کردن روابط (۱۰) و (۱۱) بدست می‌آوریم:

$$(\tilde{b} - b_{k_0})\pi^{*b} + (\tilde{x} - x_{k_0})\pi^{*x} + (z^1_{k_0} - \tilde{z})\pi^{*z^1} + (\tilde{z} - z^2_{k_0})\pi^{*z^2} + (y_{k_0} - \tilde{y})\pi^{*y} \geq 0 \qquad (۱۲)$$

بطوری‌که

$$\tilde{x} < x_{k_0}, \quad \widetilde{z^1} > z^1_{k_0}, \quad \widetilde{z^2} < z^2_{k_0}, \quad y_{k_0} < \tilde{y}, \quad \tilde{b} < b_{k_0}$$

داریم:

$$(\tilde{x} - x_{k_0})\pi^{*x} \leq 0 \qquad (۱۳)$$
$$(y_{k_0} - \tilde{y})\pi^{*y} \leq 0 \qquad (۱۴)$$
$$(z^1_{k_0} - \tilde{z})\pi^{*z^1} \leq 0 \qquad (۱۵)$$
$$(\tilde{z} - z^2_{k_0})\pi^{*z^2} \leq 0 \qquad (۱۶)$$

فرض کنیم که $\pi^{*b} \geq 0$، بنابراین

$$(\tilde{b} - b_{k_0})\pi^{*b} \leq 0 \qquad (۱۷)$$

طبق محدودیت (۱-۱) داریم:

$$\pi^{*b} \neq 0, \pi^{*x} \neq 0, \pi^{*y} = 0, \pi^{*z^1} \neq 0, \pi^{*z^2} = 0$$

طبق رابطه (۱۳)، (۱۴)، (۱۵)، (۱۶)، (۱۷) داریم:

$$(\tilde{b} - b_{k0})\pi^{*b} + (\tilde{x} - x_{k0})\pi^{*x} + (z^1_{k0} - \tilde{z})\pi^{*z^1} + (\tilde{z} - z^2_{k0})\pi^{*z^2} + (y_{k0} - \tilde{y})\pi^{*y} \leq 0$$

که با (۱۱) تناقض دارد.

بدین گونه حداقل یک $i \in \{1, \dots, L\}$ وجود دارد که π_i^{b*} منفی است.

اثبات عکس: فرض کنیم چنین نباشد. (فرض خلف) از این رو باید نشان دهیم که اگر شبکه دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ تراکم قوی نباشد. یک جواب بهینه مانند $(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ برای مدل (۹) وجود دارد بطوری‌که $\pi_i^{b*} \geq 0$

چون که شبکه دو مرحله‌ای با مختصات $(x_k, z^1_k, z^2_k, y_k, b_k)$ تراکم قوی نیست. سیستم خطی زیر جواب ندارد:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k y_{km} > y_{k_0 m} && m = 1, \dots, M\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k z^1_{kd} > z^1_{k_0 d} && d = 1, \dots, t\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k b_{ki} < b_{k_0 i} && i = 1, \dots, L\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k z^2_{kd} < z^2_{k_0 d} && d = 1, \dots, t\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k x_{kn} < x_{k_0 n} && n = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

بدین گونه مقدار بهین مدل (۱۸) زیر صفر است.

$$\begin{aligned}
&\max \ \varphi\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k y_{km} \geq y_{k_0 m} + \varphi y_{k_0 m}\\
&m = 1, \dots, M\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k z^1_{kd} \geq z^1_{k_0 d} + \varphi z^1_{k_0 d}\\
&d = 1, \dots, t \qquad (۱۸)\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k b_{ki} \leq b_{k_0 i} - \varphi b_{k_0 i}\\
&i = 1, \dots, L\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \mu_k z^2_{kd} \leq z^2_{k_0 d} - \varphi z^2_{k_0 d}\\
&d = 1, \dots, t\\
&\textstyle\sum_{k=1}^{k} \lambda_k x_{kn} \leq x_{k_0 n} - \varphi x_{k_0 n}\\
&n = 1, \dots, N
\end{aligned}$$

مفروض است دوآل مدل (۱۸) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \ b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - z^1_{k0}\pi^{z_1} + z^2_{k0}\pi^{z_2} - y_{k_0}\pi^y\\
&\text{s.t } z^1_k\pi^{z_1} - x_k\pi^x \leq 0\\
&k = 1, \dots, k \qquad (۱۹)\\
&y_k\pi^y - b_k\pi^b - z^2_k\pi^{z_2} \leq 0\\
&b_{k0}\pi^b + z^1_{k0}\pi^{z^1} + z^2_{k0}\pi^{z^2} + y_{k0}\pi^y + x_{k0}\pi^x = 1\\
&\pi^x \geq 0\\
&\pi^{z^1} \geq 0\\
&\pi^{z^2} \geq 0\\
&\pi^y \geq 0\\
&\pi^b \geq 0
\end{aligned}$$

در نظر بگیرید $\left(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}\right)$ جواب بهین مدل (۱۹) باشد. توجه داشته باشید که مدل (۱۹) و مدل (۹) تنها در هشتمین مجموعه از محدودیت‌ها تفاوت دارند. بدیهی است که $\left(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}\right)$ جواب شدنی مدل (۹) با در نظر گرفتن نقطه تصویر شده $\left(\acute{x}, \acute{z}^1, \acute{z}^2, \acute{y}, \acute{b}\right)$ است.

طبق قضیه دوآلیتی، مقدار بهین مدل (۱۹) صفر است. یعنی

$$b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - z_{k0}^1\pi^{z_1} + z_{k0}^2\pi^{z_2} - y_{k_0}\pi^y = 0$$

بنابراین، $\left(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}\right)$ جواب بهین مدل (۹) است که $\pi_i^{b*} \geq 0$ برای همه $i\in\{i = 1, \dots, L\}$.

بنابراین، علامت منفی از یک متغیردوآل به یک خروجی نامطلوب مربوط می‌شود که به وقوع تراکم اشاره دارد.

طبق قضیه۱، روش زیر را برای مشخص کردن مقدار تراکم قوی پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \quad \alpha \\
&\sum_{j=1}^{k} \lambda_k x_{kn} \leq x_{k_0 n} - \delta x_{k_0 n} \\
&n = 1, \dots, N \\
&\sum_{j=1}^{k} \lambda_k z_{kd}^1 \geq z_{k_0 d}^1 + \delta z_{k_0 d}^1 \\
&d = 1, \dots, t \\
&\sum_{j=1}^{k} \mu_k z_{kd}^2 \leq z_{k_0 d}^2 - \delta z_{k_0 d}^2 \\
&d = 1, \dots, t \\
&\sum_{j=1}^{k} \mu_k b_{ki} \leq b_{k_0 i} - \delta b_{k_0 i} \\
&i = 1, \dots, L \\
&\sum_{j=1}^{k} \mu_k y_{km} \geq y_{k_0 m} + \delta y_{k_0 m} \\
&m = 1, \dots, M \\
&b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - z_{k0}^1\pi^{z_1} + z_{k0}^2\pi^{z_2} - y_{k_0}\pi^y = \delta \\
&z_k^1\pi^{z_1} - x_k\pi^x \leq 0 \\
&k = 1, \dots, k \\
&y_k\pi^y - b_k\pi^b - z_k^1\pi^{z_1} \leq 0 \\
&k = 1, \dots, k \\
&b_{k0}\pi^b + z_{k0}^1\pi^{z^1} + z_{k0}^2\pi^{z^2} + y_{k0}\pi^y + x_{k0}\pi^x = 1 \\
&\pi_i^b - \alpha \geq 0
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

در نظر بگیرید

$\left(\pi^{x*}, \pi^{z^1*}, \pi^{z^2*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}, \delta^*, \alpha^*\right)$

جواب بهینه مدل (۲۰) باشد.

اگر $\alpha^* < 0$، پس نقطه تصویر شده $\left(\acute{x}, \acute{z}^1, \acute{z}^2, \acute{y}, \acute{b}\right)$ از شبکه دو مرحله‌ای k_0 دارای تراکم قوی است

اگر $\alpha^* > 0$، پس نقطه تصویر شده $\left(\acute{x}, \acute{z}^1, \acute{z}^2, \acute{y}, \acute{b}\right)$ ازشبکه دو مرحله‌ای k_0 دارای تراکم قوی نیست.

اگر $\alpha^* = 0$، برای نقطه تصویر شده $\left(\acute{x}, \acute{z}^1, \acute{z}^2, \acute{y}, \acute{b}\right)$ از شبکه دو مرحله‌ای k_0 سیستم زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max \ \beta \\
&\sum_{j=1}^{k} \lambda_k x_{kn} \leq x_{k_0 n} - \delta^* x_{k_0 n} - t_n^- \\
&n = 1, \dots, N \\
&\sum_{j=1}^{k} \lambda_k z_{kt}^1 \geq z_{k_0 t}^1 + \delta^* z_{k_0 t}^1 \\
&t = 1, \dots, T \\
&\sum_{j=1}^{k} \mu_k z_{kt}^2 \leq z_{k_0 t}^2 - \delta^* z_{k_0 t}^2 \\
&t = 1, \dots, T \\
&\sum_{j=1}^{k} \mu_k b_{ki} \leq b_{k_0 i} - \delta^* b_{k_0 i} \\
&i = 1, \dots, L
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_k y_{km} \ge y_{k_0 m} + \delta^* y_{k_0 m} + t_m^+$$
$$m = 1, \dots, M$$
$$\sum_{m=1}^{M} t_m^+ - \beta \ge 0$$
$$\sum_{n=1}^{N} t_n^- - \beta \ge 0$$
$$\mu_k \ \ge \ 0 \qquad k = 1, \dots, k$$
$$\lambda_k \ \ge \ 0 \qquad k = 1, \dots, k$$

در حالی که δ^* جواب بهینه مدل (۷) است. اگر $\beta > 0$ پس نقطه تصویر شده $(\acute{x}, \acute{z}^1, \acute{z}^2, \acute{y}, \acute{b})$، شبکه دومرحله‌ای k_0 تراکم ضعیف دارد. درغیر اینصورت تراکم ندارد.

۶- مثال عددی

دراین بخش به منظور نمایش کاربرد روش پیشنهادی برای تشخیص تراکم با وجود خروجی‌های مطلوب و نامطلوب نهایی تحت امکان‌پذیری ضعیف در یک شبکه‌ی دو مرحله‌ای یک مجموعه داده‌ی از ۵ واحد را بررسی می‌کنیم.

مثال مربوط به جدول ۱ که شامل پنج واحد تصمیم گیرنده دو مرحله‌ای می‌باشد را در نظر می‌گیریم. هر کدام از واحدها شامل دو ورودی مرحله اول و دو خروجی مرحله اول که به عنوان ورودی مرحله دوم در نظر گرفته می‌شود. و دو خروجی مطلوب و دو خروجی نامطلوب مرحله دوم است. مختصات این واحدها (ورودی‌ها و خروجی‌ها) در جدول ۱ نمایش داده شده است.

نتایج حاصل از محاسبه درجه ناکارایی با توجه به مدل (۷) در جدول ۲ نمایش داده شده است با توجه به درجات ناکارایی تمام واحدها کارا می‌باشند. هر چند از DMU_2 به DMU_3 تراکم رخ داده است. زیرا خروجی مطلوب مرحله دوم کاهش یافته و هر دو خروجی نامطلوب افزایش یافته است.

از مدل (۲۰) استفاده می‌کنیم و مقدار $\boldsymbol{\alpha}$ را برای پنج واحد شبکه دو مرحله‌ای را بدست می‌آوریم. با توجه به مقدار $\boldsymbol{\alpha}$ در جدول ۲ ، DMU_3، DMU_4 دارای تراکم قوی است. وDMU_1، DMU_2 تراکم ندارد و برای DMU_5 مدل (۲۱) را حل می‌کنیم. $\beta^* = .61$، در نتیجه DMU_5 دارای تراکم ضعیف است.

جدول ۱:داده‌ها

	x_1	x_1	z^1	z^2	y_1	y_1	b_1	b_1
DMU_1	1	3	2	8	3	13	3	2
DMU_2	1	4	3	7	5	10	2.5	4
DMU_3	3	6	2	6	1	6	5	35
DMU_4	5	6	3	5	1	4	10	10
DMU_5	1.5	3	1.5	8	1.5	13	3	3

جدول ۲:نتایج

	ناکارایی	α
DMU_1	0	.12
DMU_2	0	.082
DMU_3	0	-.31
DMU_4	0	-.221
DMU_5	0	0

نتیجه‌گیری

تراکم یک پدیده اقتصادی است که کاهش در یک یا چند ورودی منجر به افزایش در یک یا چند خروجی می‌شود. بسیاری از روش‌های قبلی برای شناسایی تراکم خروجی‌های مطلوب را در نظر می‌گیرند. درحالی که واحدها و سازمان‌هایی نظیر کارخانه‌ها، بیمارستان‌ها و... در فرایند فعالیت و تولید ممکن است علاوه بر خروجی‌های مورد نیاز خروجی‌های نامطلوبی مانند مواد مضر معلق در هوا، ضایعات و اثرات نامطلوب دیگری مانند آلودگی‌های صوتی نیز تولید می‌کنند. در فرایند تولیدات واقعی، خروجی‌های نامطلوب معمولاً با خروجی‌های نامطلوب تواماً تولید می‌شوند. مدل فاصله جهتدار برای یک شبکه دو مرحله‌ای را با توجه به تکنولوژی تولید مربوطه توسعه دادیم. همچنین اگر یک DMU به وسیله تابع جهتدار یک شبکه کارا باشد ممکن است با در نظر گرفتن خروجی‌های مطلوب و نامطلوب دارای تراکم باشد. با توجه به مدل فاصله جهتدار شبکه دو مرحله‌ای روشی برای محاسبه مقدار تراکم در یک شبکه ارائه دادیم. این روش بین DMUهای متراکم و DMUهای کارای واقعی تفاوتی قائل می‌شود علاوه بر این این روش یک مزیت بیشتر از روش‌های پیشین دارد و آن این است که قابلیت تفکیک بین تراکم قوی و ضعیف را دارد.

فهرست منابع

[1] Charnes,A.,Cooper,W.W.,&Rhodes,E.(1978).Measuringtheefficiencyofdecision-makingunits.EuropeanJournalofOperationalResearch,2,429–444.
[2] Banker,R.D.,Charnes,A.,&Cooper,W.W (1984).Somemodelsforestimatingtechnicalandscaleinefficienciesindataenvelopmentanalysis.ManagementScience,30(11), 1078–1092.
[3] Färe,R.,&Svensson,L.(1980).Congestionoffactorsofproduction.Econometrica,48, 1745–1753.
[4] *R.Färe*, S. Grosskopf and C. A. K. Lovell, (1985) The Measurement of Efficiency of Production, Kluwer-Nijhoff Publishing, Boston, Mass, USA.
[5] Cooper, W. W., Thompson, R. G.. Thrall, R. M.,(1996). "Introduction: extensions and new developments in DEA", Annals of Operations Research, vol. 66, pp. 3-45.
[6] Brockett, P. L., Cooper, W. W., Shin, H.-C., Wang, Y.,(1978). "Inefficiency and congestion in Chinese production before and after the economic reforms," Socio-Economic Planning Sciences, vol. 32, no. 1, pp. 1–20.
[7] Wang, C. H., Gopaorl, R., Zionts, S.,1997. Use of data envelopment analysis in assessing information technology impact on frim performance. Annals of Operations Research 73, 191-213
[8] Seiford, L. M., Zhu, j., (1999). Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. Management Science 45 (9), 1270-1288.
[9] Fang, L., (2015). "Congestion measurement in nonparametric analysis under the weakly disposable teachnology", European Journal of