دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره ششم، تابستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یادداشتی بر نگاشت‌های جمعی حافظ طیف روی C*- جبرها

علی تقوی*

دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۳/۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۶/۲۰

چکیده

متیو و رادی [۱۴] ثابت کرده‌اند که اگر $\phi : A \to B$ ایزومتری طیفی یکانی از C*- جبر یکدار A به روی C*- جبر یکدار B از نوع I با فضای ایده‌آل هاسدورف و کلاً ناهمبند باشد، آنگاه ϕ جردن ایزومورفیزم است. در این یادداشت نشان می‌دهیم که اگر $\phi : A \to B$ یک نگاشت جمعی پوشا و حافظ طیف باشد، آنگاه ϕ جردن ایزومورفیزم است بدون فرض اینکه کلاً ناهمبند باشد.

واژه‌های کلیدی: نگاشت جمعی، جبر باناخ، C*- جبر، همریختی جردن، طیف

*. taghavi@umz.ac.ir

۱- بیان مسئله و مقدمات

فرض کنید A و B دو جبر باناخ یکدار با یکه e و برای هر $a \in A$ نمادهای $\sigma(a)$و r(a) به ترتیب نشان دهنده طیف و شعاع طیفی a باشند. گوییم $\phi: A \to B$ نگاشت حافظ طیف است اگر به ازای هر $a \in A$داشته باشیم $\sigma(\phi(a)) = \sigma(a)$ و حافظ معکوس پذیری است اگر $\phi(a)$ معکوس پذیر باشد وقتی که a معکوس پذیر باشد. ϕ یکانی است اگر $\phi(e) = e$.

نگاشت‌های خطی نگهدارنده اولین بار توسط فروبینیوس [۶] مطالعه شد. او ثابت کرد که هر نگاشت خطی نگهدارنده طیف $\varphi: M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ به یکی از فرم های $\varphi(T) = ATA^{-1}$ یا $\varphi(T) = A^tTA^{-1}$ است به ازای یک عنصر معکوس‌پذیر A. در [۸] جعفریان و سرور ثابت کردند که اگر یک نگاشت خطی پوشای حافظ طیف از $B(X)$ به B(y) یا ایزومورفیزم یا آنتی- ایزومورفیزم است که در آن X و Y فضاهای باناخ و B(X) جبر باناخ همه عملگرهای خطی روی X است.

حدس زیر به نظر می‌رسد هنوز باز باشد:

هر نگاشت خطی پوشای یکانی حافظ طیف از یک جبر باناخ یکدار بروی یک جبر باناخ نیم- ساده (غیرجابجایی) یک جردن ایزومورفیزم است (حدس کاپلانسکی).

گلیسون، کاهان و زلاسکو [۹و۱۲] ادعا کرده‌اند که یک تابعک خطی یکانی روی یک جبر باناخ ضربیست اگر حافظ معکوس‌پذیری باشد. با یک بحث ساده از قضیه گلیسون، کاهان و زلاسکو می‌توان نشان داد که نگاشت خطی یکانی حافظ معکوس پذیری از یک جبر باناخ بتوی یک جبر باناخ جابجایی نیم-ساده ضربی است. نتایجی که در این راستا بدست آمده در مقالات [۱و ۷-۳و ۱۱] تنظیم شده است.

در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر A یک *C- جبر و B یک *C- جبر نوع I باشند به طوری کهPrim(B) فضای هاسدورف و $\phi: A \to B$یک نگاشت جمعی پوشای حافظ طیف باشند، آنگاه ϕجردن ایزومورفیزم است که در آن Prim(A) فضای ایده‌آل اولیه A است. خاطر نشان می-سازیم که یک ایده‌آل P از یک *C- جبر A اولیه است اگر و فقط اگر یک نمایش تحویل ناپذیر غیرصفر (H,ϕ) از A وجود داشته باشد به طوری که $P = \ker(\phi)$.

نتایج زیادی پیرامون حدس کاپلانسکی وجود دارد. یکی از مشهورترین این نتایج متعلق به اوپتیت [۲، قضیه ۱.۳] است.

قضیه ۱.۱: [۲] فرض کنید A و B دو جبر فون نویمن باشند و $\phi: A \to B$ نگاشت خطی پوشای نگهدارنده طیف باشد، در این صورت ϕ جردن ایزومورفیزم است.

لارنس و هریس قضیه زیر رو که مربوط به این موضوع است، ثابت کردند.

قضیه ۱.۲: [۷] فرض کنید A جبر باناخ مختلط یکدار، B جبر باناخ جابه جایی نیم- ساده یکدار و $\phi: A \to B$ نگاشت نگهدارنده معکوس‌پذیری باشد، در این صورت ϕ پیوسته و ضربی است.

۲- نتایج اصلی

قصد داریم قضیه ۱.۲ را توسعه دهیم به حالتی که B یک *C- جبر که لزوماً جابه جایی نیست. در واقع پاسخی به حدس کاپلانسکی می‌دهیم در حالت خاص پاسخی به سوال هریس:

حدس (هریس-کادیسون [۷]) فرض کنید A و B دو *C- جبر با همانی e باشند و $\phi: A \to B$ یک نگاشت خطی دوسویی یکانی حافظ طیف باشند، در این صورت ϕ یک جردن ایزومورفیزم است.

قضیه ۲.۱: فرض کنید A و B دو *C- جبر با همانی e باشند و $\phi: A \to B$یک نگاشت جمعی پوشای حافظ طیف باشد. آنگاه

$$\phi(za) = \phi(z)\phi(a), \qquad \forall a \in A \ \forall z \in Z(A)$$

اثبات. به سادگی می‌توان نشان داد که Z(A) یک *C- زیر جبر A است. فرض کنید z عضو دلخواهی از Z(A) باشد. بنا به [۱۳، نتیجه ۴.۴] ϕ مرکز Z(A) از A را به روی مرکز Z(B) از B می‌نگارد. البته، باید متذکر شد که در قضیه اشاره شده ϕ خطی است در حالی که نگاشت ما جمعی است. با نگاهی به اثبات قضیه

مذکور می‌بینید که فرض جمعی بودن برای این نتیجه کافیست (اثبات قضیه مذکور را ببینید).

حال فرض کنید τ یک حالت محض دلخواه روی B باشد. بنا به قضیه طیفی

$$\tau o\phi(z)=\tau(\phi(z))\in\sigma(\phi(z))=\sigma(z) \qquad (۱)$$

همچنین داریم $\tau o\phi(0)=0$ بنابراین بنا به [۱۰، قضیه ۲.۱] $\tau o\phi$ روی Z(A) خطی و ضربی است.

فرض کنید z عنصر مثبتی از Z(A) باشد. چون $\phi(z)$ نرمال است و $\sigma(\phi(z))\subseteq\sigma(z)\subset R^{+}$ لذا $\phi(z)$ مثبت می‌باشد. داریم $\sigma(\phi(e))=\sigma(e)=\{1\}$ که از آن نتیجه می‌شود $\phi(e)=e$ یعنی، ϕ یکانی است، بنابراین $\tau o\phi(e)=1$ از این رو $\tau o\phi$ یک حالت روی Z(A) است. چون حالت‌های محض تابعک‌های خطی ضربی روی c*- جبرهای جابجایی هستند، می‌توانیم نتیجه بگیریم

$$\tau(\phi(z)^2\}=(\tau o\phi(z))^2=\tau(\phi(z^2))\ ,\ \forall z\in Z(A) \qquad (۲)$$

فرض کنید z یک عنصر خود الحاق و $u=\phi(z)-\tau(\phi(z))e$ در این صورت u عنصری خود الحاق است و بنا به (۲) داریم $u^2\in\ker r$ نامساوی کوشی- شوارتز نتیجه می‌دهد $\tau(ub)=0$ برای هر $b\in B$ و بنابراین $\tau(\phi(z)b)=\tau(\phi(z))\tau(b)$ با استفاده از آن برای τ و به طور مشابه برای $\tau o\phi$ به دست می‌آوریم.

$$\tau o\phi(za)=\tau o\phi(z)\tau o\phi(a)=\tau(\phi(z)\phi(a)), \qquad (۳)$$

برای تمام عناصر خود الحاق $z\in Z(A)$ و برای تمام $a\in A$ به وضوح (۳) برای هر $z\in Z(A)$ و $a\in A$ برقرار است. از آن نتیجه می‌شود $\tau(\phi(za)-\phi(z)\phi(a))=0$ چون حالت‌های محض نقاط را جدا می‌کنند بالاخره به دست می‌آوریم که

$$\phi(za)=\phi(z)\phi(a),\qquad \forall a\in A\ \ \forall z\in Z(A)$$

در قضایای زیر برای مشخص کردن نگاشت‌های حافظ طیف به ایده‌آل گلیم احتیاج داریم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۲: فرض کنید A یک C*- جبر و M ایده‌آل ماکزیمال در مرکز Z(A) از A باشد. I را ایده‌آل گلیم تولید شده به وسیله M در A گویند اگر I=AM، یعنی

$$AM=\{\sum_{i=1}^{n}a_iz_i\,|a_i\in A,z_i\in Z(A),n\in N\}$$

کاربرد صریحی از قضیه فاکتور سازی کوهن نشان می‌دهد که I بسته است.

پیش از آنکه به قضیه اصلی بپردازیم، لازم است از نتیجه زیر آگاه باشیم.

نتیجه ۲.۳: فرض کنید که A و B دو C*- جبر یکدار و $\phi:A\to B$ یک نگاشت جمعی پوشا و حافظ طیف باشند. در این صورت احکام زیر برقرارند:

۱- ϕ ایده آل‌های جابجایی را در دو جهت حفظ می‌کند.

۲- ϕ ایده آل‌های گلیم را در دو جهت حفظ می‌کند.

اثبات.

۱- فرض کنید که I یک ایده‌آل جابجایی در A و $\phi(I)=I'$ اولاً، داریم $I'\subset Z(B)$، زیرا بنا به [۱۳، نتیجه۴.۴] ϕ مرکز Z(A) را به روی مرکز Z(B) می‌نگارد. ثانیاً، اگر $Z'\in I'$ و $b\in B$ آنگاه وجود دارد $z\in Z(A)$ و $a\in A$ به طوری که $\phi(a)=b$ و $\phi(z)=z'$ چون $I\subset Z(A)$ بنا به قضیه ۲.۱ داریم:

$$z'(b)=\phi(z)\phi(a)=\phi(za)\in I'$$

یعنی، I' یک ایده‌آل جابه جایی در B است. با استفاده از یک استدلال مشابه برای ϕ^{-1} نتیجه می‌شود که تصویر عکس هر ایده‌آل جابجایی در B یک ایده‌آل جابجایی در A است.

۲- فرض کنید I=AM یک ایده‌آل گلیم در A باشد که به وسیله M تولید شده که در آن M یک ایده‌آل ماکزیمال در مرکز A یعنی Z(A) است. چون بنا به [۱۳، نتیجه ۴.۴] تحدید ϕ به Z(A) یک ×- ایزومورفیزم به روی Z(B) است، به آسانی می‌توان نشان داد که M نیز یک ایده‌آل ماکزیمال در B است.

بنا به قضیه ۲.۱

$$\phi(I)=\phi(AM)=\phi(A)\phi(M)=B\phi(M)$$

از این رو $\phi(I)$ یک ایده آل گلیم در B است. با استفاده از یک استدلال مشابه برای ϕ^{-1} نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل گلیم در B به این فرم است.
اخیراً در [۱۴] متیو و رادی قضیه زیر را ثابت کرده‌اند.

قضیه ۲.۴. [۱۴] فرض کنید $T:A\to B$ یک ایزومتری طیفی یکانی از یک C^*- جبر یکدار A به روی یک C^*- جبر نوع I یکدار B باشد که فضای ایده‌آل اولیه‌اش هاسدورف و تماماً ناهمبند باشد. در این صورت T جردن ایزومورفیزم است.
کاپلانسکی نشان داد که هر n- هومومورفیزم C^*- جبر A، یعنی هر نمایش تحویل‌ناپذیر A که روی یک فضای n بُعدی عمل می‌کند، دارای طیف هاسدورف است [۱۶، گزاره ۴.۴.۱۰]. اگر A یکدار باشد در این حالت Prime(A) فضای هاسدورف است، بنابراین هاسدورف و فشرده است. این موارد شامل جبرهای نوع $A=C(X)\otimes M_n$ نیز می‌شود. خواننده به یاد می‌آورد که حدس هریس یک پاسخ مثبت دارد، اگر هم دامنه‌اش C(X) یا M_n باشد [۱۴]. استفاده از فرض هاسدورف بودن طیف برای مسائل عمومی مرسوم است. قضیه زیر پاسخ مثبتی است برای سوال هریس اگر B، C^*- جبر نوع I باشد که فضای ایده‌آل اولیه‌اش هاسدورف است.
در قضیه زیر فرض کلاً ناهمبندی به کار رفته در قضیه ۲.۴ حذف شده است. البته در اینجا به جای ایزومتری طیفی خطی، نگاشت جمعی، حافظ طیف فرض شده است. برای تکمیل بحث لازم است قسمتی از اثبات قضیه مذکور در اینجا آورده شود.

قضیه ۲.۵: فرض کنید که A یک C^*- جبر یکدار و B یک C^*- جبر یکدار نوع I باشد که فضای ایده‌آل اولیه‌اش هاسدورف و $\phi:A\to B$ یک نگاشت جمعی پوشای حافظ طیف باشد. در این صورت ϕ یک جردن ایزومورفیزم است.

اثبات. فرض کنید I یک ایده‌آل گلیم در A باشد. بنا به نتیجه ۲.۳ $J=\phi(I)$ یک ایده‌آل گلیم در B است و آن نتیجه می‌دهد که نگاشت تولید شده‌ی $\psi:A/I\to B/J$ یک ایزومتری طیفی یکانی است [۱۵، گزاره ۹]. چون فضای ایده‌آل اولیه B هاسدورف است، بنا به [۱۴، لم ۹] J یک ایده آل ماکزیمال در B است. جبر خارج قسمت B/J ساده است و چون B نوع I است، نتیجه می‌شود که B/J عملگرهای فشرده روی فضای هیلبرت است. از آنجایی که B یکدار است، B/J باید M_n به ازای یک عدد طبیعی چون n ایزومورفیک باشد. از این رو، بنا به [۱۴، قضیه ۴] ψ یک جردن ایزومورفیزم است. چون ایده‌آل‌های گلیم (در A و B) نقاط را جدا می‌کنند، ما نتیجه می‌گیریم که ϕ خودش یک جردن ایزومورفیزم جبری است.

تبصره ۲.۶: توجه داشته باشید بنا به [۱۶، قضیه ۶.۱.۵] فضای ایده‌آل اولیه C^*- جبر نوع I با طیف‌اش همریخت است. بنابراین در حقیقت فرض در قضیه بالا همان فرض "طیف هاسدورف" است.

تبصره ۲.۷: به‌طور مشابه، ما می‌توانیم بدون فرض اینکه طیف B کلاً ناهمبند باشد نتایج زیر را به دست بیاوریم که در [۱۴] ثابت شده‌اند [رجوع شود به ۱۴].

نتیجه ۲.۸: قضیه بالا برقرار است اگر هم دامنه، یک C^*- جبر جدا پذیر یکدار با طیف هاسدورف باشد.

نتیجه ۲.۹: قضیه بالا برقرار است اگر هم دامنه، یک C^*- جبر با اثر پیوسته باشد.

Referenc:

[1] Arveson, W. (1976). An invitation to C*-algebras (Vol. 39). Springer Science & Business Media.
[2] Aupetit, B. (2000). Spectrum-preserving linear mappings between Banach algebras or Jordan–Banach algebras. Journal of the London Mathematical Society, 62(3), 917-924.
[3] Aupetit, B. (1991). A primer on spectral theory. Springer Science & Business Media.
[4] Aupetit, B., & Mouton, H. D. T. (1994). Spectrum preserving linear mappings in Banach algebras. Studia Mathematica, 109(1), 91-100.
[5] Brešar, M., & Šemrl, P. (1996). Linear maps preserving the spectral radius. Journal of Functional Analysis, 142(2), 360-368.
[6] Frobenius, F. G. (1897). Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen.
[7] Harris, L. A. (2004). Invertibility preserving linear maps of Banach algebras. Contemporary Mathematics, 364, 59-66.
[8] Jafarian, A. A., & Sourour, A. R. (1986). Spectrum-preserving linear maps. Journal of functional analysis, 66(2), 255-261.
[9] Kahane, J., & Żelazko, W. (1968). A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. Studia Mathematica, 29(3), 339-343.
[10] Kowalski, S., & Słodkowski, Z. (1980). A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. Studia Math, 67, 215-223.
[11] Lin, Y. F., & Mathieu, M. (2007). Jordan isomorphism of purely infinite C*-algebras. The Quarterly Journal of Mathematics, 58(2), 249-253.
[12] Gleason, A. M. (1967). A characterization of maximal ideals. Journal d'Analyse Mathématique, 19(1), 171-172.
[13] Mathieu, M., & Schick, G. J. (2002). First results on spectrally bounded operators. Studia Mathematica, 152, 187-199.
[14] Mathieu, M., & Ruddy, C. (2007). Spectral isometries, II. Contemporary Mathematics, 435, 301-310.
[15] Mathieu, M., & Sourour, A. R. (2004). Hereditary properties of spectral isometries. Archiv der Mathematik, 82(3), 222-229.
[16] Pedersen, G. K. (1979). C*-algebras and their automorphism groups (Vol. 14). Academic Pr.