دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره ششم، تابستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای تصادفی

راشد خانجانی شیراز *

گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۴/۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۶/۱۱

چکیده

برنامه‌ریزی هندسی روش کارایی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است. برنامه‌ریزی هندسی به منظور بهینه سازی مسایل طراحی مهندسی تعمیم و توسعه یافته است ولی اکنون به‌عنوان ابزار قوی در بهینه‌سازی سایر مواردی که به شکلی متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل مساله بهینه‌سازی به صورت نمایی هستند، بکار گرفته می‌شود.

برنامه‌ریزی هندسی معمولاً با پارامترهای معلوم و مشخص به کار برده شده است. اما واقعیت امر این است که عمدتاً در مسایل واقعی، دسترسی به داده‌های قطعی برای تصمیم‌گیرنده امکان‌پذیر نیست و داده‌ها به صورت دقیق مشخص نیستند. این داده‌ها ممکن است به صورت‌های مختلف از قبیل کران‌دار، بازه‌ای، فازی و تصادفی باشند. در این مقاله برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای تصادفی در نظر گرفته می‌شود. سپس برای حل آن ابتدا برنامه‌ریزی تصادفی به یک مساله بهینه‌سازی هندسی با پارامترهای قطعی تبدیل می‌شود. با بدست آوردن مدل دوگان مساله برنامه‌ریزی هندسی قطعی شده، جواب بهینه مساله بهینه‌سازی تصادفی هندسی بدست می‌آید. برای توصیف کارایی روش ارایه شده دو مثال ارایه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی هندسی، برنامه‌ریزی تصادفی، محدودیت‌های تصادفی، دوگان

*. Rashed.shiraz@gmail.com

۱– مقدمه

برنامه‌ریزی هندسی یکی از مهم‌ترین نوع برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد که توسط دوفین[1] و همکاران [1] در سال ۱۹۶۷ معرفی شد. برنامه‌ریزی هندسی از دو دیگاه نظری و کاربردی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. تاکنون برنامه‌ریزی هندسی در سیستم‌های ارتباطی، مهندسی عمران، مهندسی مکانیک، طراحی سازه، مهندسی شیمی، کنترل بهینه، تصمیم گیری، شبکه‌های جریان، نظریه کنترل موجودی، مهندسی الکترونیک، تحلیل تکنیکی مدل‌های اقتصاد و غیره به کار برده شده است.

چنگ[2] [2]، برای حل مدل مقدار اقتصادی تولید با تقاضای هزینه واحد تولید از برنامه‌ریزی هندسی استفاده کردند. روی و میتی[3] [3]، مدل برنامه‌ریزی هندسی را برای حل مدل مقدار اقتصادی تولید با پارامترهای فازی به کار بردند. لی[4] [4] مدل مرتبه کیفیت و قیمت فروش را به وسیله برنامه‌ریزی هندسی مشخص کرد.

روش‌های مختلفی برای حل برنامه‌ریزی هندسی ارایه شده است. برخی از روش‌ها بر پایه مدل اولیه برنامه‌ریزی هندسی و برخی بر اساس مدل دوگان برنامه‌ریزی هندسی می‌باشد. دوفین و همکاران[5] در سال ۱۹۶۷ برنامه‌ریزی هندسی را فقط با ضرایب مثبت مطالعه کردند.

علاوه بر الگوریتم‌های کارا، چندین روش‌های تقریبی برای حل مسایل برنامه‌ریزی هندسی ارایه شده است (کورتانک و همکاران (۱۹۹۷و۱۹۹۲)[6] [5,6]، بوید و وندنبرق (۲۰۰۴)[7] [7] و بوید و همکاران (۲۰۰۷و ۲۰۰۵). [8,9]

مدل کلاسیک برنامه‌ریزی هندسی فرض بر قطعی[8] بودن پارامترها در تابع هدف و محدودیت‌ها می‌باشد. ولی واقعیت امر این است که در دنیای واقعی مقادیر داده‌ها و پارامترها به صورت دقیق مشخص نیستند. پارامترها می‌توانند به صورت‌های مختلف از قبیل کران‌دار (یعنی یک کران بالا و پایین برای داده‌ها وجود داشته باشد)، بازه‌ای، فازی و تصادفی باشند. تاکنون برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای غیرقطعی شامل فازی، بازه‌ای و کراندار معرفی شده است.

لیو[9] در سال ۲۰۰۶ و ۲۰۰۷ [10,11] با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی هندسی رابطه بین تابع ماکزیمم سود و بازده به مقیاس را مشخص کردند. همچنین لیو روشی برای بدست آوردن کران بالا و کران پایین تابع هدف مدل برنامه‌ریزی هندسی وقتی که پارامترهای هزینه و محدودیت‌ها به صورت بازه‌ای باشد، تعمیم داد.

لیو در سال ۲۰۰۷ [12] روشی برای حل مسایل برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای ضرایب اعداد فازی و همچنین متغیرهای تصمیم با توان اعداد فازی در تابع هدف ارایه نمود. همچنین لیو در سال ۲۰۰۸ [13] روشی برای حل برنامه‌ریزی هندسی با داده‌های کراندار ارایه دادند. در واقع پارامترها در تابع هدف، توان متغیرهای تصمیم در تابع هدف و پارامترهای محدودیت‌ها به صورت کراندار (کران پایین و کران بالا پارامترها مشخص هستند) مشخص هستند.

در این مقاله برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های تصادفی که پارامترها که دارای توزیع نرمال می‌باشند، ارایه می‌شود. سپس برای حل آن ابتدا برنامه‌ریزی تصادفی به یک مساله بهینه‌سازی هندسی با پارامترهای قطعی تبدیل می‌شود. با بدست آوردن مدل دوگان مساله قطعی شده، جواب بهینه مساله بهینه‌سازی تصادفی هندسی بدست می‌آید. برای توصیف مدل پیشنهاد شده مثال‌هایی ارایه می‌شود.

ساختار این مقاله بدین صورت است. در بخش اول تاریخچه‌ای از بهینه‌سازی هندسی آورده شد. در بخش دوم مدل برنامه‌ریزی هندسی و مدل دوگان آن بحث می‌شود. در بخش سوم مدل برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های تصادفی بحث می‌شود. در بخش چهارم

1. Duffin
2. Cheng
3. Roy and Maiti
4. Lee
5. Duffin et al. (1967)
6. Kortanek
7. Boyd and Vandenberghe
8. Certainty
9. Liu

مثال‌هایی برای تشریح بهتر آورده می‌شود. در پایان جمع‌بندی و نتیجه‌گیری آمده است.

۲- مدل ریاضی برنامه‌ریزی هندسی

برنامه‌ریزی هندسی به منظور بهینه‌سازی مسایل طراحی مهندسی تعمیم و توسعه یافته است ولی اکنون به عنوان ابزار قوی در بهینه‌سازی سایر مواردی که به شکلی متغیرهای تصمیم‌گیری در مدل بهینه‌سازی بصورت نمایی هستند بکار گرفته می‌شود. همچنین برنامه‌ریزی هندسی روش کارایی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است. مدل ریاضی برنامه‌ریزی هندسی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} \\ & s.t. \\ & \sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le b_i \ , i = 1,\dots,n, \\ & x_j > 0 \ , j = 1,\dots,s. \end{aligned} \qquad (۱)$$

که $x_j \ (j = 1,\dots,s)$ متغیرهای مثبت مساله هستند. $c_p \ (p = 1,\dots,h)$، $b_i (i=1,\dots,n)$ و $c_{i,t(i)} \ (i=1,\dots,n)$ پارامترهای مثبت هستند و $\alpha_{p,j} (p=1,\dots,h, \ j=1,\dots,s)$ و اعداد $\gamma_{i,t(i),j} \ (i=1,\dots,n, \ t(i)=1,\dots,k(i), \ j=1,\dots,s)$ دلخواه حقیقی هستند.

حل مدل برنامه‌ریزی هندسی (۱) ممکن است با حل مستقیم مساله اولیه یا با استفاده از الگوریتم‌هایی بر اساس مدل دوگان باشد. مدل دوگان دارای تابع هدف غیرخطی با محدودیت‌های خطی می‌باشد. در واقع با حل دستگاه خطی جواب بهینه مساله دوگان یافت می‌شود. دوگان مدل برنامه‌ریزی هندسی (۱) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \prod_{p=1}^{h} \left(\frac{c_p}{\omega_p} \right)^{\omega_p} \prod_{i=1}^{n} \prod_{t(i)=1}^{k(i)} \left(\frac{c_{i,t(i)}}{b_i \omega_{i,t(i)}} \right)^{\omega_{i,t(i)}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\lambda_i} \\ & s.t. \\ & \sum_{p=1}^{h} \omega_p = 1 , \\ & \sum_{p=1}^{h} \alpha_{p,j} \omega_p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \gamma_{i,t(i),j} \omega_{i,t(i)} = 0 , \\ & j = 1,\dots,s, \\ & \lambda_i = \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \omega_{i,t(i)} , \quad i = 1,\dots,n, \\ & \omega_p > 0 , \quad p = 1,\dots,h, \\ & \omega_{i,t(i)} \ge 0 , \quad i = 1,\dots,n , \quad t(i) = 1,\dots,k(i). \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

متغیرهای مدل (۲)، ω_p و $\omega_{i,t(i)}$ می‌باشند. تعداد متغیرهای مدل دوگان برابر با تعداد جملات مدل اولیه برنامه‌ریزی هندسی است. از قضایای دوآلیتی برنامه‌ریزی هندسی نتیجه می‌شود که جواب بهینه مساله اولیه و دوگان مقادیر یکسان دارند. یعنی جواب بهینه مدل (۱) با جواب بهینه مدل (۲) یکسان است.

در واقع بهینه‌سازی هندسی ساختاری برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است که با تبدیل برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت‌های نامساوی به برنامه‌ریزی غیرخطی با محدودیت‌های خطی، تبدیل می‌شود که آسان‌تر از حل مساله اولیه می‌باشد.

پس با استفاده از دوگان مدل برنامه‌ریزی هندسی، برنامه ریزی غیر خطی به فرم مدل (۱) با محدودیت‌های نامساوی به برنامه ریزی غیرخطی با محدودیت‌های خطی، تبدیل می‌شود که آسان‌تر از حل مساله اولیه است. در واقع با حل دستگاه معادلات خطی مدل (۲)، جواب بهینه مدل (۲) بدست می‌آید.

۳- برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های تصادفی

در مسایل واقعی حالت‌های مختلفی از عدم قطعیت برای پارامترهای مساله وجود دارد. بسیاری از کاربردهای بهینه‌سازی هندسی در مسایل طراحی مهندسی هستند که پارامترها به صورت دقیق مشخص می‌باشند. در مسایل واقعی حالت‌هایی وجود دارند که ضرایب به صورت دقیق مشخص نیستند. برای مثال زمان مورد احتیاج برای کامل کردن فعالیت‌های مختلف در تحقیقات و پیشرفت در مدیریت پروژه ممکن است به صورت تصادفی باشد.

برنامه‌ریزی تصادفی، مسئله بهینه سازی با تمام یا تعدادی از پارامترهای تصادفی است. دانتزیک[1]، چارنز و کوپر[2] از پیشگامان این زمینه هستند. [۱۵و۱۴] آن‌ها مشاهده کردند در بسیاری از مدل‌های خطی پارامترها به‌طور دقیق مشخص نیستند بلکه به صورت احتمالی هستند. بنابراین آن‌ها پیشنهاد کردند که باید دیدگاه تصادفی را جایگزین کرد، با این فرض که ضرایب غیرمعلوم، متغیرهای تصادفی هستند که دارای تابع توزیع مشخص هستند. مسئله برنامه‌ریزی با قیود احتمالی یکی از حالت‌های مسائل برنامه‌ریزی تصادفی است، که در آن قیود به صورت احتمالی هستند، یعنی احتمالی برای نقض شدن این قیود در نظر گرفته می‌شود. مساله برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای تصادفی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{p=1}^{h} \tilde{c}_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} \\
& s.t. \\
& \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le \tilde{b}_i, \quad i=1,\dots,n \\
& x_j > 0, \quad j=1,\dots,s.
\end{aligned} \tag{۳}
$$

که پارامترها دارای توزیع نرمال به صورت $\tilde{c}_p \sim N(c_p,\sigma_p^2)$ ،$\tilde{c}_{i,t(i)} \sim N(c_{i,t(i)},\sigma_{i,t(i)}^2)$ می‌باشد. $Cov(\tilde{c}_p,\tilde{c}_l)$ و $Cov(\tilde{c}_{i,t(i)},\tilde{c}_{i,t(k)})$ معلوم می‌باشند و متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند. با توجه به اینکه مساله برنامه‌ریزی هندسی بالا دارای پارامتر تصادفی می‌باشد، برای حل مدل برنامه ریزی هندسی تصادفی، باید مدل (۳) را به یک مدل بهینه‌سازی با پارامترهای قطعی تبدیل کرد. برای حل آن از روش محدودیت‌های تصادفی استفاده می‌شود. مساله برنامه‌ریزی هندسی با محدودیت‌های تصادفی به صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
& \min \varphi \\
& s.t. \\
& Pr\left(\sum_{p=1}^{h} \tilde{c}_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} \le \varphi \right) \ge \gamma, \\
& Pr\left(\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le \tilde{b}_i \right) \ge \gamma, \\
& i=1,\dots,n, \quad x_j > 0,\ j=1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

در مدل بالا "Pr" نشان دهنده احتمال و $0 \le \gamma \le 1$، عددی معلوم است. قابل ذکر است که در مورد قید iام احتمال آن که نامساوی $\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le \tilde{b}_i$ برقرار باشد، حداقل γ است. برای حل برنامه‌ریزی هندسی احتمالی مدل (۴)، باید محدودیت‌های احتمالی به محدودیت‌های قطعی تبدیل شوند.

قرار می‌دهیم $\tilde{H} = \sum_{p=1}^{h} \tilde{c}_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} - \varphi$ با توجه به این‌که ترکیب خطی هر متغیر تصادفی نرمال، دارای توزیع نرمال است. بنابراین $\tilde{H}$ دارای توزیع نرمال با پارامترهای H و σ_H به صورت زیر خواهد بود.

$$
E\left[\tilde{H}\right] = H = \sum_{p=1}^{h} E\left[\tilde{c}_p\right] \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} - \varphi = \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} - \varphi,
$$

$$
\sigma_H = \sqrt{Var\left[\sum_{p=1}^{h} E\left[\tilde{c}_p\right] \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} - \varphi \right]} = \sqrt{Var\left[\sum_{p=1}^{h} \tilde{c}_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} \right]} = \sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{p,j}}}.
$$

بنابراین قید احتمالی مسئله (۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$
P\left[\tilde{H} \le 0\right] \ge \gamma \Leftrightarrow
$$

$$
P\left(\frac{\tilde{H} - E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H} \le \frac{0 - E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H} \right) \ge \gamma
$$

1. Dantzic
2. Charense and Cooper

با قراردادن $z = \frac{\tilde{H} - E(\tilde{H})}{\sqrt{\mathrm{var}(\tilde{H})}}$ و با توجه به این‌که z دارای توزیع نرمال استاندارد است، داریم:

$$P\left(z \le \frac{-E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H}\right) \ge \gamma \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{-E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H}\right) = P\left(z \le \frac{-E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H}\right) \ge \gamma.$$

به‌طوری که در عبارت فوق Φ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است. در نتیجه:

$$\frac{-E\left[\tilde{H}\right]}{\sigma_H} \ge \Phi^{-1}(\gamma) \Leftrightarrow$$

$$-E(\tilde{H}) - \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{Var(\tilde{H})} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$-\left(\sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} - \varphi\right) -$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi - \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} -$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \ge \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} +$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}}.$$

که $\Phi^{-1}(\gamma)$ معکوس Φ در سطح γ می‌باشد. بنابراین قید احتمالی $Pr(\sum_{p=1}^{h} \tilde{c}_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}}) \le \varphi \ge \gamma$ مدل (۴) به فرم قید قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\varphi \ge \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} +$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}}.$$

به طور مشابه محدودیت احتمالی

$$Pr\left(\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le \tilde{b}_i\right) \ge \gamma,\ i = 1,\dots,n,$$

مدل (۴) به محدودیت قطعی به صورت زیر تبدیل می‌شود: با فرض

$$\tilde{Q}_i = \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} - \tilde{b}_i,\ i = 1,\dots,n$$

میانگین و واریانس $\tilde{Q}_i$ به صورت زیر می‌باشد:

$$E\left[\tilde{Q}_i\right] = \sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} - b_i,$$

$$Var\left[\tilde{Q}_i\right] = Var\left[\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \tilde{c}_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} - \tilde{b}\right] =$$

$$\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma_{i,t(i)}^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} + \sigma_{b_i}^2.$$

بنابراین داریم:

$$Pr\left[\frac{\tilde{Q}_i - E\left[\tilde{Q}_i\right]}{\sigma_{\tilde{Q}_i}} \le \frac{-E\left[\tilde{Q}_i\right]}{\sigma_{\tilde{Q}_i}}\right] \ge \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{-E\left[\tilde{Q}_i\right]}{\sigma_{\tilde{Q}_i}}\right) \ge \gamma \Leftrightarrow \frac{-E\left[\tilde{Q}_i\right]}{\sigma_{\tilde{Q}_i}} \ge \Phi^{-1}(\gamma) \Leftrightarrow$$

$$-E\left[\tilde{Q}_i\right] + \Phi^{-1}(\gamma)\sigma_{\tilde{Q}_i} \le 0.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$-E\left[\tilde{Q}_i\right] + \Phi^{-1}(\gamma)\sigma_{\tilde{Q}_i} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} +$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma_{i,t(i)}^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} + \sigma_{b_i}^2} \le b_i.$$

بنابراین شکل قطعی مدل (۴) به صورت زیر است:

$$\min \varphi$$

$$s.t.$$

$$\sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} + \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}} \le \varphi,$$

$$\sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} + \qquad (۵)$$

$$\Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma_{i,t(i)}^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} + \sigma_{b_i}^2} \le b_i,$$

$$i = 1,\dots,m, \quad x_j > 0,\ j = 1,\dots,n.$$

چون تابع هدف مینیم روی φ می‌باشد، پس مدل (۵) معادل با مدل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& min \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} + \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}} \\
& s.t. \\
& \sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} + \\
& \Phi^{-1}(\gamma)\sqrt{\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma^2_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} + \sigma^2_{b_i}} \le b_i\,, \\
& i=1,\ldots,m, \quad x_j>0,\ j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۶}$$

مدل بالا یک برنامه‌ریزی غیرخطی می‌باشد. حال با تغییر متغیرهایی زیر، مدل (۶) به یک مدل برنامه ریزی هندسی تبدیل می‌شود.

فرض کنید:

$$\rho = \sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\alpha_{j,p}}$$

$$u_i = \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma^2_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{m} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} + \sigma^2_{b_i}$$

پس با جایگذاری متغیرهای بالا، مدل (۶) به مدل برنامه-ریزی هندسی زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}
& min \sum_{p=1}^{h} c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}} + \Phi^{-1}(\gamma)\rho^{\frac{1}{2}} \\
& s.t. \\
& \sum_{t(i)=1}^{k(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} + \\
& \Phi^{-1}(\gamma)\, u_i^{\frac{1}{2}} \le b_i\,,\ i=1,\ldots,n, \\
& \sum_{p=1}^{h} \sigma_p^2 \prod_{j=1}^{s} x_j^{2\alpha_{p,j}} \rho^{-1} \le 1, \\
& \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \sigma^2_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{2\gamma_{i,t(i),j}} u_i^{-1} + \\
& \sigma^2_{b_i} u_i^{-1} \le 1, i=1,\ldots,n, \\
& x_j>0,\ j=1,\ldots,s, \rho>0, u_i>0,\ i=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۷}$$

با استفاده از مدل دوگان (۲)، دوگان مساله برنامه‌ریزی هندسی مدل (۷) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
& max \prod_{p=1}^{h}\left(\frac{c_p}{\omega_p}\right)^{\omega_p} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{\omega_{h+1}}\right)^{\omega_{h+1}} \times \\
& \prod_{i=1}^{n}\prod_{t(i)=1}^{k(i)}\left(\frac{c_{i,t(i)}}{b_i\,\omega_{i,t(i)}}\right)^{\omega_{i,t(i)}} \times \\
& \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{b_i\,\omega_{i,k(i)+1}}\right)^{\omega_{i,k(i)+1}} \times \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\lambda_i} \\
& \times \prod_{p=1}^{h}\left(\frac{\sigma_p^2}{\delta_p}\right)^{\delta_p} \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{t(i)=1}^{k(i)}\left(\frac{\sigma^2_{i,t(i)}}{\theta_{i,t(i)}}\right)^{\theta_{i,t(i)}} \times \\
& \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sigma^2_{b_i}}{\theta_{i,k(i)+1}}\right)^{\theta_{i,k(i)+1}} \times \prod_{i=1}^{n}\gamma_i^{\gamma_i} \times \pi^{\pi} \\
& s.t. \\
& \sum_{p=1}^{h+1}\omega_p = 1, \\
& \sum_{p=1}^{h}\alpha_{p,j}\,\omega_p + \frac{\omega_{h+1}}{2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{t(i)=1}^{k(i)}\gamma_{i,t(i),j}\,\omega_{i,t(i)} + \\
& 2\sum_{p=1}^{h}\alpha_{p,j}\delta_p + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{t(i)=1}^{k(i)}\gamma_{i,t(i),j}\theta_{i,t(i)} = 0, j=1,\ldots,s, \\
& \frac{1}{2}\omega_{h+1} - \sum_{p=1}^{h}\delta_p = 0, \\
& \frac{1}{2}\omega_{i,k(i)+1} - \sum_{t(i)=1}^{k(i)+1}\theta_{i,t(i)} = 0, i=1,\ldots,n, \\
& \lambda_i = \sum_{t(i)=1}^{k(i)+1}\omega_{i,t(i)},\ i=1,\ldots,n, \\
& \sum_{p=1}^{h}\delta_p = \pi, \\
& \gamma_i = \sum_{t(i)=1}^{k(i)+1}\theta_{i,t(i)},\ i=1,\ldots,n, \omega_p>0, \delta_p>0,\ p=1,\ldots,h, \\
& \omega_{i,t(i)} \ge 0, \theta_{i,t(i)} \ge 0,\ i=1,\ldots,n,\ t(i)=1,\ldots,k(i)+1.
\end{aligned} \tag{۸}$$

متغیرهای مدل (۸)، δ_p، ω_p، $\theta_{i,t(i)}$ و $\omega_{i,t(i)}$ می‌باشند. با حل مدل (۸)، جواب بهینه مدل (۷) بدست می‌آید. در صورتی که پارامترها در مدل برنامه‌ریزی هندسی منفی باشند، از مدل (۸) برای بدست آوردن جواب بهینه برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای منفی

نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین مدل برنامه ریزی هندسی با ضرایب منفی را به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\min \sum_{p=1}^{h} \xi_p c_p \prod_{j=1}^{s} x_j^{\alpha_{p,j}}$$

$$s.t. \tag{۹}$$

$$\sum_{t(i)=1}^{k(i)} \xi_{i,t(i)} c_{i,t(i)} \prod_{j=1}^{s} x_j^{\gamma_{i,t(i),j}} \le \xi_i b_i ,$$

$$i = 1,\dots,n, \qquad x_j > 0,\ j = 1,\dots,s.$$

$$\xi_p, \xi_{i,t(i)}, \xi_i = 1 \ or \ -1$$

دوآل مدل (۹) به صورت زیر است:

$$\max \xi_{oo} \left(\prod_{p=1}^{h} \left(\frac{c_p}{\omega_p} \right)^{\xi_p \omega_p} \prod_{i=1}^{n} \prod_{t(i)=1}^{k(i)} \left(\frac{c_{i,t(i)}}{b_i \omega_{i,t(i)}} \right)^{\xi_{i,t(i)} \omega_{i,t(i)}} \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\sigma_i \lambda_i} \right)^{\xi_{oo}}$$

$$s.t. \tag{۱۰}$$

$$\xi_{oo} \sum_{p=1}^{h} \xi_p \omega_p = 1,$$

$$\sum_{p=1}^{h} \xi_p \alpha_{p,j} \omega_p + \sum_{i=1}^{n} \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \xi_{i,t(i)} \gamma_{i,t(i),j} \omega_{i,t(i)} = 0,$$

$$j = 1,\dots,s,$$

$$\lambda_i = \xi_i \sum_{t(i)=1}^{k(i)} \xi_{i,t(i)} \omega_{i,t(i)}, \quad i = 1,\dots,n,$$

$$\omega_p > 0, \quad p = 1,\dots,h,$$

$$\omega_{i,t(i)} \ge 0, \quad i = 1,\dots,n, \quad t(i) = 1,\dots,k(i),$$

$(\xi_{oo}$ *is the sign of the primal objective at the optimum*$)$.

۴- مثال‌های عددی

برای توصیف نتایج اخیر ، برنامه‌ریزی هندسی زیر با سه متغیر و یک محدودیت با پارامترهای تصادفی توزیع نرمال ارایه می‌شود.

$$\min \ \tilde{c}_1 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} + \tilde{c}_2 x_2 x_3 ,$$

$$s.t.$$

$$\tilde{a}_1 x_1 x_3 + \tilde{a}_2 x_1 x_2 \le b,$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0.$$

فرض می‌کنیم که $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ دارای توزیع نرمال به صورت زیر باشد:

$$\tilde{c}_1 \sim N(50,3), \tilde{c}_2 \sim N(42,2),$$

$$\tilde{a}_1 \sim N(3,1), \tilde{a}_2 \sim N(2,1),$$

$$b = 3.$$

با استفاده از مدل (۷)، مدل قطعی شده مثال ۱ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$z = \min 50 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} + 42 x_2 x_3 + \Phi^{-1}(\gamma) \rho^{\frac{1}{2}}$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} & 3x_1x_3 + 2x_1x_2 + \Phi^{-1}(\gamma) u_1^{1/2} \le 3, \\ & 9x_1^{-2} x_2^{-2} x_3^{-2} \rho^{-1} + 4 x_2^2 x_3^2 \rho^{-1} \le 1, \\ & x_1^2 x_3^2 u_1^{-1} + x_1^2 x_2^2 u_1^{-1} \le 1, \\ & x_1, x_2, x_3, \rho, u_1 > 0. \end{aligned} \tag{۱۱}$$

جواب‌های بهینه را برای $\gamma = 0.90$، $\gamma = 0.95$ و $\gamma = 0.97$ بررسی می‌کنیم. براساس مدل (۸)، دوآل مدل برنامه‌ریزی هندسی (۱۱) به صورت زیر بدست می-آید:

$$\max \left(\frac{50}{\omega_1} \right)^{\omega_1} \times \left(\frac{42}{\omega_2} \right)^{\omega_2} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{\omega_3} \right)^{\omega_3} \times$$

$$\left(\frac{1}{\omega_{1,1}} \right)^{\omega_{1,1}} \times \left(\frac{2}{3\omega_{1,2}} \right)^{\omega_{1,2}} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{3\omega_{1,3}} \right)^{\omega_{1,3}} \times$$

$$(\omega_{1,1} + \omega_{1,2} + \omega_{1,3})^{(\omega_{1,1}+\omega_{1,2}+\omega_{1,3})} \times \left(\frac{1}{\theta_{1,1}} \right)^{\theta_{1,1}} \times \left(\frac{1}{\theta_{1,2}} \right)^{\theta_{1,2}} \times$$

$$(\theta_{1,1} + \theta_{1,2})^{(\theta_{2,1}+\theta_{2,2})} \times \left(\frac{9}{\delta_1} \right)^{\delta_1} \times \left(\frac{4}{\delta_2} \right)^{\delta_2} \times$$

$$(\delta_1 + \delta_2)^{(\delta_1+\delta_2)} \tag{۱۲}$$

$$s.t.$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1,$$

$$-\omega_1 - 2\delta_1 + \omega_{1,1} + \omega_{1,2} + 2\theta_{1,1} + 2\theta_{1,2} = 0,$$

$$-\omega_1 + \omega_2 - 2\delta_1 + 2\delta_2 + \omega_{1,2} + 2\theta_{1,2} = 0,$$

$$-\omega_1 + \omega_2 - 2\delta_1 + 2\delta_2 + \omega_{1,1} + 2\theta_{1,1} = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 - \delta_1 - \delta_2 = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}\omega_{1,3} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} = 0 ,$$

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0, \omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \omega_{1,3}, \theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \delta_1, \delta_2 \geq 0.$$

با حل مدل (۱۲)، جواب‌های بهینه مدل بالا برای $\gamma = 0.95$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\omega_1 = \mathbf{0.5832}, \omega_2 = \mathbf{0.3490},\ \omega_3 = \mathbf{0.0678} ,$$

$$\omega_{1,1} = \mathbf{0.2770}, \omega_{1,2} = \mathbf{0.1671},\ \omega_{1,3} = \mathbf{0.1944},$$

$$\theta_{1,1} = \mathbf{0.0277}, \theta_{1,2} = \mathbf{0.0062} , \delta_1 = \mathbf{0.0422}, \delta_2 = \mathbf{0.0550}.$$

مقدار بهینه متغیرهای تصمیم و تابع هدف برای مدل (۱۱) به صورت زیر است:

$$x_1 = 0.3440,\ x_2 = 1.1410,\ x_3 = 1.2612,$$

$$\rho = 45.007,\ u_1 = 0.2724,\ z= 178.5938 .$$

برای $\gamma = 0.90$ مقادیر بهینه متغیرهای دوگان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\omega_1=0.6015, \omega_2 = 0.3477,\ \omega_3 = 0.0508 ,$$

$$\omega_{1,1} = 0.2869,\ \omega_{1,2} = 0.1932, \omega_{1,3} = 0.1633,$$

$$\theta_{1,1} = 0.0210, \theta_{1,2} = 0.0044 , \delta_1 = 0.0348, \delta_2 = 0.0468.$$

مقدار بهینه جواب‌های متغیر تصمیم و تابع هدف در حالت $\gamma = 0.90$ برای مدل (۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x_1 = 0.3885, x_2 = 1.1596 , x_3 = 1.1478 ,$$

$$\rho = 40.7502 , u_1 = 0.3538, z= 160.7748 .$$

برای $\gamma = 0.97$ مقادیر بهینه بدست آمده از مدل (۱۲) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\omega_1=0.5756,\ \omega_2 = 0.3492,\ \omega_3 = 0.0751 ,$$

$$\omega_{1,1} = 0.2732,\ \omega_{1,2} = 0.1575,\ \omega_{1,3} = 0.2059,$$

$$\theta_{1,1} = 0.0305, \theta_{1,2} = 0.0071 ,\ \delta_1 = 0.0451,\ \delta_2 = 0.0579.$$

مقدار بهینه متغیرهای تصمیم و تابع هدف در حالت $\gamma = 0.97$ برای مدل (۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$x_1 = 0.3275,\ x_2 = 1.1331,\ x_3 = 1.3105,$$

$$\rho = 46.8685,\ u_1 = 0.2450$$

به طور خلاصه مقادیر بهینه تابع هدف و متغیرهای تصمیم مدل (۱۱) برای $\gamma = 0.90, 0.95$ و $\gamma = 0.97$ در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱. مقادیر تابع هدف مدل (۱۱)

γ	0.95	0.90	0.97
Z	$x_1 = 0.3440, x_2 = 1.1410,$ $x_3 = 1.2612, \rho = 45.007,$ $u_1 = 0.2724, z= 173.1817.$	$x_1 = 0.3885, x_2 = 1.1596,$ $x_3 = 1.1478, \rho = 40.7502,$ $u_1 = 0.3538, z= 160.7748.$	$x_1 = 0.3275, x_2 = 1.1331,$ $x_3 = 1.3105, \rho = 46.8685,$ $u_1 = 0.2450, z = 178.5938.$

مثال ۲:

مدل برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای تصادفی در تابع هدف و محدودیت‌ها به صورت زیر ارایه می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
&\min\ \tilde{c}_1 x_1^{-0.11} x_2^{1.35} x_3^{-1} x_4^{1.3} + \tilde{c}_2 x_1^{-1.1} x_2^{-1} x_3^{-0.1} x_4^{-1}\\
&s.t.\\
&\tilde{a}_1 x_1^{-2} x_2^{-1} x_3^{2} x_4 + \tilde{a}_2 x_1 x_3 x_4^{2} \le \tilde{b}_1,\\
&\tilde{a}_3 x_1^{2} x_2^{1.4} x_3 x_4 + \tilde{a}_4 x_1^{2.2} x_4 \le \tilde{b}_2,\\
&x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

فرض می‌کنیم که $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4$ دارای توزیع نرمال به صورت زیر باشند.

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_1 \sim N(7,1), \bar{c}_2 \sim N(3,0.1),\\
&\bar{a}_1 \sim N(5,1), \bar{a}_2 \sim N(2,0.1),\\
&\bar{a}_3 \sim N(1.5,1), \bar{a}_4 \sim N(2.5,1),\\
&b_1 = 2, b_2 = 2.5.
\end{aligned}$$

با استفاده از مدل قطعی (۷) و پارامترهای بالا، مدل (۱۳) به مدل برنامه‌ریزی هندسی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min\ 7 x_1^{-0.11} x_2^{1.35} x_3^{-1} x_4^{1.3} +\\
&3 x_1^{-1.1} x_2^{-1} x_3^{-0.1} x_4^{-1} + \Phi^{-1}(\gamma)\rho^{\frac{1}{2}}\\
&s.t.\\
&5 x_1^{-2} x_2^{-1} x_3^{2} x_4 + 2 x_1 x_3 x_4^{2} + \Phi^{-1}(\gamma) u_1^{\frac{1}{2}} \le 2,\\
&1.5 x_1^{2} x_2^{1.4} x_3 x_4 + 2.5 x_1^{2.2} x_4 + \Phi^{-1}(\gamma) u_2^{\frac{1}{2}} \le 2.5,\\
&x_1^{-0.22} x_2^{2.7} x_3^{-2} x_4^{2.6} \rho^{-1} +\\
&0.01 x_1^{-2.2} x_2^{-2} x_3^{-0.2} x_4^{-2} \rho^{-1} \le 1,\\
&x_1^{-4} x_2^{-2} x_3^{4} x_4^{2} u_1^{-1} + 0.01 x_1^{2} x_3^{2} x_4^{4} u_1^{-1} + u_1^{-1} \le 1,\\
&x_1^{4} x_2^{2.8} x_3^{2} x_4^{2} u_2^{-1} + x_1^{4.4} x_4^{2} u_2^{-1} + u_2^{-1} \le 1,\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, \rho, u_1, u_2 > 0.
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

براساس مدل (۸)، دوآل مدل بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\max \left(\frac{7}{\omega_1}\right)^{\omega_1} \times \left(\frac{3}{\omega_2}\right)^{\omega_2} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{\omega_3}\right)^{\omega_3} \times\\
&\left(\frac{5}{2\omega_{1,1}}\right)^{\omega_{1,1}} \times \left(\frac{2}{2\omega_{1,2}}\right)^{\omega_{1,2}} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{2\omega_{1,3}}\right)^{\omega_{1,3}} \times\\
&(\omega_{1,1} + \omega_{1,2} + \omega_{1,3})^{(\omega_{1,1}+\omega_{1,2}+\omega_{1,3})} \times\\
&\left(\frac{1.5}{2.5\omega_{1,1}}\right)^{\omega_{1,1}} \times \left(\frac{2}{2.5\omega_{1,2}}\right)^{\omega_{1,2}} \times \left(\frac{\Phi^{-1}(\gamma)}{2.5\omega_{1,3}}\right)^{\omega_{1,3}} \times\\
&(\omega_{2,1} + \omega_{2,2} + \omega_{2,3})^{(\omega_{2,1}+\omega_{2,2}+\omega_{2,3})} \times\\
&\left(\frac{1}{\theta_{1,1}}\right)^{\theta_{1,1}} \times \left(\frac{0.01}{\theta_{1,2}}\right)^{\theta_{1,2}} \times \left(\frac{1}{\theta_{1,3}}\right)^{\theta_{1,3}} \times\\
&(\theta_{1,1} + \theta_{1,2} + \theta_{1,3})^{(\theta_{1,1}+\theta_{1,2}+\theta_{1,3})} \times\\
&\left(\frac{1.5}{2.5\theta_{2,1}}\right)^{\theta_{2,1}} \times \left(\frac{2.5}{2.5\theta_{2,2}}\right)^{\theta_{2,2}} \times \left(\frac{1}{2.5\theta_{2,3}}\right)^{\theta_{2,3}} \times\\
&(\theta_{2,1} + \theta_{2,2} + \theta_{2,3})^{(\theta_{2,1}+\theta_{2,2}+\theta_{2,3})} \times\\
&\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \times \left(\frac{0.01}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \times (\delta_1 + \delta_2)^{(\delta_1+\delta_2)}\\
&s.t.\\
&\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1,\\
&-0.11\omega_1 - 1.1\omega_2 - 2\omega_{1,1} + \omega_{1,2} + 2\omega_{2,1} + 2.2\omega_{2,2} -\\
&0.22\delta_1 - 2.2\delta_2 - 4\theta_{1,1} + 2\theta_{1,2} + 4\theta_{2,1} + 4\theta_{2,2} = 0,\\
&1.35\omega_1 - 0.1\omega_2 - \omega_{1,1} + 1.4\omega_{2,1} +\\
&2.7\delta_1 - 2\delta_2 - 2\theta_{1,1} + 2.8\theta_{2,1} = 0,\\
&-\omega_1 - 0.1\omega_2 + 2\omega_{1,1} + \omega_{1,2} + \omega_{2,1} -\\
&2\delta_1 - 0.2\delta_2 + 4\theta_{1,1} + 2\theta_{2,1} = 0,\\
&1.3\omega_1 - \omega_2 + \omega_{1,1} + 2\omega_{1,2} + \omega_{2,1} + \omega_{2,2} +\\
&2.6\delta_1 - 2\delta_2 + 2\theta_{1,1} + 4\theta_{1,2} + \theta_{2,1} + 2\theta_{2,2} = 0,
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\frac{1}{2}\omega_3 - \delta_1 - \delta_2 = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}\omega_{1,3} - \theta_{1,1} - \theta_{1,2} - \theta_{1,3} = 0 ,$$

$$\frac{1}{2}\omega_{2,3} - \theta_{2,1} - \theta_{2,2} - \theta_{2,3} = 0 ,$$

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0, \omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \omega_{1,3}, \theta_{1,1}, \theta_{1,2}, \theta_{1,3}, \delta_1, \delta_2 \ge 0$$

همانند مثال قبل مقادیر بهینه متغیرهای تصمیم و تابع هدف را می‌توان بدست آورد. جواب بهینه متغیرها و مقادیر تابع هدف برای حالت‌های $\gamma = 0.90$، $\gamma = 0.95$ و $\gamma = 0.97$ مدل (۱۴) در جدول ۲ آمده است.

نتیجه‌گیری

همانطور که گفته شد برنامه‌ریزی هندسی روش کارایی برای حل رده‌ای از مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است. برنامه‌ریزی هندسی معمولاً با پارامترهای معلوم و مشخص به کار برده شده است. اما واقعیت امر این است که عمدتاً در مسایل واقعی، دسترسی به داده‌های قطعی برای تصمیم‌گیرنده امکان‌پذیر نیست و داده‌ها به صورت قطعی و دقیق مشخص نیستند. این داده‌ها ممکن است به صورت‌های مختلف از قبیل کران‌دار، بازه‌ای، فازی و تصادفی باشند. در این مقاله برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای تصادفی در نظر گرفته شد. با استفاده از محدودیت‌های، مدل برنامه‌ریزی هندسی تصادفی به یک مساله بهینه‌سازی هندسی با پارامترهای قطعی تبدیل شد. برای حل مساله برنامه‌ریزی هندسی با پارامترهای قطعی، با استفاده از مدل دوگان مساله برنامه‌ریزی هندسی قطعی شده، جواب بهینه مساله بهینه‌سازی تصادفی هندسی بدست آمد. همچنین برای توصیف و کارایی مدل ارایه شده به شرح مثال‌هایی پرداخته شد.

جدول۲. مقادیر تابع هدف و متغیرهای تصمیم مدل (۱۴)

γ	0.90	0.95	0.97
Z	$x_1 = 0.95080, x_2 = 1.7179,$ $x_3 = 1.3049, x_4 = 0.2651,$ $\rho = 0.1322, u_1 = 0.0846,$ $u_2 = 0.5013, z = 9.2391.$	$x_1 = 0.9266, x_2 = 1.6880,$ $x_3 = 1.2273, x_4 = 0.2627,$ $\rho = 0.1436, u_1 = 0.0746,$ $u_2 = 0.3812, z = 9.9226.$	$x_1 = 0.9166, x_2 = 1.6793,$ $x_3 = 1.1980, x_4 = 0.2612,$ $\rho = 0.1485, u_1 = 0.0708,$ $u_2 = 0.3417, z = 10.2205.$

Referenc:

[1] Duffin, R.J., Peterson, E.L., Zener, C., (1967). Geometric Programming Theory and Applications, John Wiley & Sons, New York.

[2] Cheng, T., (1991). An Economic Order Quantity Model with Demand Dependent Unit Production Cost and Imperfect Production Process, IIE Transactions, 23, 23-28.

[3] Roy, T.K., Maiti, M., (1997). A fuzzy EOQ model with demand-dependent unit cost under limited storage capacity, European Journal of Operational Research, 99 (1997) 425–432.

[4] Lee, W., (1993). Determining Order Quality and Selling Price by Geometric Programming: Optimal Solution and Sensitivity, Decision Science, 24, 76-87.

[5] Kortanek, K.O., Xu, X., Ye, Y., (1997). An infeasible interior-point algorithm for solving primal and dual geometric programs, Mathematical Programming, 76 (1997) 155–181.

[6] Kortanek, K.O., H. No, (1992). A second order affine scaling algorithm for the geometric programming dual with logarithmic barrier, Optimization, 23, 303–322.

[7] Boyd, S., Vandenberghe, L., (2004). Convex optimization. Cambridge University press, Cambridge.

[8] Boyd, S-J., Patil, D., Horowitz, M., (2005). Digital circuit sizing via geometric programming, Operations research, 53 (6), 899–932.

[9] Boyd, S.J., Vandenberghe, L., Hossib, A., (2007). A tutorial on geometric programming, Optimization Engineering, 8 (1), 67–127.

[10] Liu, S.T., (2006). A geometric programming approach to profit maximization. Applied Mathematics & Computation, 182, 1093–1097.

[11] Liu, S.T., (2007a). Profit maximization with quantity discount: an application of geometric program. Applied Mathematics & Computation, 190, 1723–1729.

[12] Liu, S.T., (2007b). Geometric programming with fuzzy parameters in engineering optimization. International Journal of Approximate Reasoning, 46, 484–498.

[13] Liu, S.T., (2008). Posynomial geometric programming with interval exponents and coefficients. European Journal of Operational Research, 186, 17–27.

[14] Charnes, A., Cooper, W.W., (1959). Deterministic equivalents for optimizing and satisfying under chance constraints, Operations Research, 11 (1959), 18-39.

[15] Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. Management science, 1, 197–206.