

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دوم، شماره ششم، تابستان ۱۳۹۵

شماره شاپا: ۱۹۶-۰۱۶۸۲



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## مقایسه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده با توزیع نرمال و چوله-نرمال به کمک تحلیل پوششی داده‌ها

علی نظری<sup>۱</sup>، محمد حسن بهزادی<sup>۲\*</sup>

<sup>(۱و۲)</sup> گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۲/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۵/۱۹

### چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی ناپارامتری برای تعیین کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) با بکارگیری برنامه ریزی ریاضی است. در اغلب تحقیقات گذشته در تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی و غیرقطعی، فرض بر این بوده که توزیع احتمالی متغیرهای ورودی و خروجی نرمال است اما در مسایل کاربردی ممکن است این فرض برقرار نباشد. بنابراین، بکارگیری توزیع نرمال منجر به نتیجه‌گیری غلط و تصمیم‌گیری اشتباه خواهد شد. توزیع چوله-نرمال یکی از توزیع‌های مهم در آمار و احتمال است. این توزیع تعمیم یافته توزیع نرمال است که نامتقارن بوده و خواص مشابه توزیع نرمال دارد. در این مقاله، مدل BCC تصادفی برای اندازه‌گیری کارایی تصادفی واحدهای تصمیم‌گیرنده با فرض چوله-نرمال بودن داده‌های ورودی و خروجی ارایه شده است. به علاوه نشان داده شده که مدل پیشنهادی در برگزیده‌ی مدلی با توزیع نرمال نیز است. در پایان، این مدل برای اندازه‌گیری کارایی ۲۵ شعبه از یک بانک به کار گرفته شده است.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، برنامه‌ریزی درجه دوم، توزیع چوله-نرمال، توزیع چوله-نرمال بسته

\*. Behzadi@srbiau.ac.ir

## ۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها<sup>۱</sup> (DEA) ابزاری توانمند برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده<sup>۲</sup> (DMU) با ورودی‌ها خروجی‌های چندگانه است. چارنز و همکاران<sup>۳</sup> [4] مدل CCR را که یکی از مدل‌های اساسی در DEA است برای اولین بار معرفی کردند. سپس بنکر و همکاران<sup>۴</sup> [2] با در نظر گرفتن مفروضات دیگری، مدل CCR را به مدل BCC بسط دادند. از آن زمان تاکنون به دلیل استفاده‌ی فراوان DEA در مسایل گوناگون، مدل‌های متعددی در این زمینه ارائه شده است.

با توجه به ضرورت استفاده از داده‌های تصادفی در مسایل کاربردی، کوپر و همکاران<sup>۵</sup> [5]، [6] و [7]، جس و همکاران<sup>۶</sup> [11]، هانگ<sup>۷</sup> [10]، خدابخشی [13]، خدابخشی و اصغریان [12] و حسین‌زاده لطفی و همکاران [9] مدل‌هایی را در DEA با داده‌های تصادفی ارائه کردند که تمامی این مدل‌ها با فرض نرمال بودن متغیرهای ورودی و خروجی پیشنهاد است.

توزیع نرمال یکی از توزیع‌های پیوسته است که به دلیل متقارن و خوش رفتار بودن آن از اهمیت ویژه‌ای در آمار برخوردار است. این توزیع خواص زیادی دارد که باعث افزایش کاربردهای آن شده است. در مدل‌های DEA با داده‌های تصادفی، در تحقیقات گذشته اغلب فرض شده است که متغیرهای ورودی و خروجی از توزیع نرمال پیروی می‌کنند اما در واقعیت ممکن است چنین فرضی برقرار نباشد و داده‌ها کمی چولگی داشته و نامتقارن باشند، لذا اگر توزیع نامتقارنی وجود داشته باشد که دارای خواص مشابه توزیع نرمال باشد، این توزیع می‌تواند نقشی اساسی در تحلیل چنین داده‌هایی داشته باشد. یکی از این توزیع‌ها که اخیراً معرفی شده و مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و همچنین خواصی مشابه توزیع نرمال دارد، به توزیع چوله-نرمال<sup>۸</sup> معروف شده است. این توزیع نامتقارن دارای پارامتر تنظیم چولگی (پارامتر شکل<sup>۹</sup>) است که اگر مقدار این پارامتر برابر صفر شود توزیع نرمال حاصل می‌شود. بنابراین توزیع نرمال یک حالت خاص از توزیع چوله-نرمال است. نظری و بهزادی [14] مدل BCC با ساختار خطای نامتقارن را ارائه کردند که در مدل پیشنهادی بردارهای ورودی و

خروجی بر حسب خطای نامتقارن نوشته شده که توزیع این خطاها چوله-نرمال است. در این مقاله، ما فرض کرده‌ایم که متغیرهای ورودی و خروجی دارای توزیع چوله-نرمال هستند. با در نظر گرفتن چنین فرضی، مدل BCC با قیود تصادفی را ارائه داده‌ایم. در مسایل کاربردی افزایش تعداد DMU امری طبیعی است، لذا مدل BCC تصادفی ارائه شده را بر مبنای توزیع مجانبی مجموع متغیرهای تصادفی چوله-نرمال پیشنهاد داده‌ایم. مدل پیشنهادی شامل مدل قطعی شده BCC با فرض نرمال بودن داده‌ها نیز هست. با یک مثال این مدل را برای یک مجموعه از داده‌های واقعی به کار برده و با حالت نرمال بودن ورودی و خروجی مقایسه نموده‌ایم.

سازماندهی مقاله به شرح زیر است: در بخش دوم، ضمن معرفی توزیع چوله-نرمال و خواص آن، توزیع حدی مجموع متغیرهای تصادفی آن را بدست آورده‌ایم. مدل قطعی شده‌ی BCC، با فرض توزیع چوله-نرمال بودن متغیرهای ورودی و خروجی، برای تعداد DMUهای زیاد در بخش سوم ارائه شده است. بخش چهارم شامل یک مثال کاربردی است که مدل پیشنهادی را برای آن بکار برده‌ایم و نتایج را برای مدل BCC با فرض نرمال بودن متغیرهای ورودی و خروجی مقایسه کرده‌ایم. بحث و نتیجه‌گیری در بخش پنجم آمده است.

## ۲- توزیع چوله-نرمال

ابتدا توزیع چوله-نرمال- بسته<sup>۱۰</sup> که اولین بار توسط گونزالس-فاریاس و همکاران<sup>۱۱</sup> [8] معرفی شده است را بیان می‌کنیم.

1. Data Envelopment Analysis
2. Decision Making Unit
3. Charnes et al
4. Banker et al
5. Cooper et al
6. Jess et al
7. Huang
8. Skew-Normal Distribution
9. Shape Parameter
10. Closed Skew-Normal
11. Gonzalez-Farias et al

۱-۲- توزیع چوله - نرمال بسته

**تعریف ۱:** بردار تصادفی  $W$  را توزیع چوله - نرمال  $p$ -متغیره گوئیم و با عبارت

$$W \sim CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$$

نشان می‌دهیم هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_W(w) = c \phi_p(W; \mu, \Sigma) \Phi_q(D(W - \mu); \nu, \Delta), \quad (1)$$

$$c^{-1} = \Phi_q(0; \nu, \Delta + D\Sigma D').$$

که در آن،  $\mu \in \mathbb{R}^p$ ،  $\nu \in \mathbb{R}^q$ ،  $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$ ،  $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$  و  $q \geq 1$ ،  $p \geq 1$  ماتریس واریانس-کواریانس و همچنین  $\phi_p(W; \mu, \Sigma)$  و  $\Phi_q(W; \mu, \Sigma)$  به ترتیب بیانگر تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال  $p$ -متغیره با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس واریانس-کواریانس  $\Sigma$  است.

بعضی از خواص مهم توزیع چوله-نرمال بسته به شرح زیر است:

- توزیع چوله - نرمال بسته نسبت به توزیع توام بسته است.
- توزیع چوله - نرمال بسته نسبت به مجموع متغیرهای مستقل، بسته است.
- اگر  $a$  یک بردار غیر صفر و  $W \sim CSN_{p,q}(\mu, \Sigma, D, \nu, \Delta)$ ، آن‌گاه:

$$a' W \sim CSN_{1,q}(\mu_a, \Sigma_a, D_a, \nu, \Delta_a), \quad (2)$$

که در آن:

$$\mu_a = a' \mu, \Sigma_a = a' \Sigma a, D_a = D \Sigma a' \Sigma_a^{-1}, \Delta_a = \Delta + D \Sigma D' - D \Sigma a a' \Sigma D' \Sigma_a^{-1}. \quad (3)$$

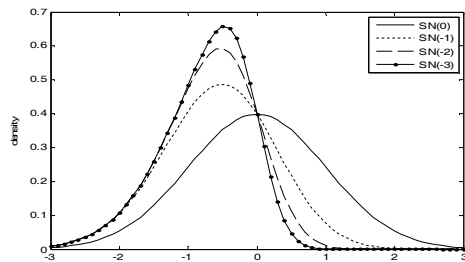
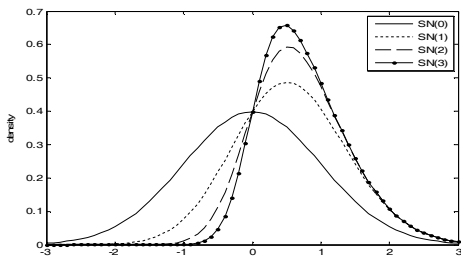
۲-۲- توزیع چوله نرمال

توزیع چوله-نرمال، معرفی شده توسط آزالینی [1]، که یک خانواده‌ی پرکاربرد از توزیع‌هاست به صورت زیر تعریف می‌شود:

**تعریف ۲:** گوئیم متغیر تصادفی  $Z$  دارای توزیع چوله-نرمال با پارامتر حقیقی  $\delta$  است هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد:

$$f_Z(z) = 2\phi(z)\Phi(\delta z). \quad (4)$$

که در آن  $\phi$  و  $\Phi$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی<sup>۳</sup> توزیع نرمال استاندارد است. این توزیع که با عبارت  $Z \sim SN(\delta)$  نمایش داده می‌شود، توزیع چوله-نرمال استاندارد با پارامتر شکل  $\delta$  نامیده می‌شود. پارامتر شکل  $\delta$  را می‌توان پارامتر کنترل چولگی<sup>۴</sup> نامید. تابع چگالی فوق به ازای مقادیر مثبت  $\delta$  چوله به راست، به ازای مقادیر منفی  $\delta$  چوله به چپ و به ازای  $\delta = 0$  متقارن و به چگالی نرمال استاندارد تبدیل می‌شود. شکل‌های ۱ و ۲ تابع چگالی چوله-نرمال استاندارد را به ازای مقادیر مختلف  $\delta$  نشان می‌دهد.



شکل ۱. تابع چگالی توزیع چوله - نرمال به ازای  $\delta$  های مختلف

1. Azzalini
2. Probability Density Function
3. Cumulative Density Function
4. Skewnees Control Parameter

که در آن عبارت " $\xrightarrow{d}$ " به معنای همگرایی در توزیع است.

**اثبات:** با به کارگیری شرط قضیه لیپانوف<sup>۲</sup> (بلینزی<sup>۳</sup> [3]) و قراردادن  $\rho = 2$ ، کافی است ثابت کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n E|W_j - E(W_j)|^4}{(\sum_{j=1}^n V(W_j))^4} = 0 \quad (۸)$$

آزایی [1] نشان داد که ضریب کشیدگی توزیع چوله-نرمال به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\gamma_1(W_j) = \frac{E|W_j - E(W_j)|^4}{(V(W_j))^2} - 3, \quad |\gamma_1(W_j)| < 1 \quad (۹)$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{E|W_j - E(W_j)|^4}{(V(W_j))^2} (\gamma_1(W_j) + 3) \leq 4(V(W_j))^2$$

با مجموع‌گیری از رابطه‌ی بالا و با فرض این‌که  $V(W_j)$  به سرعت به صفر میل نمی‌کنند (نزدیک صفر نمی‌باشند) داریم:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n E|W_j - E(W_j)|^4}{(\sum_{j=1}^n V(W_j))^4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \sum_{j=1}^n (V(W_j))^2}{(\sum_{j=1}^n V(W_j))^4} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 (\sum_{j=1}^n V(W_j))^2}{(\sum_{j=1}^n V(W_j))^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(\sum_{j=1}^n V(W_j))^2} = 0. \quad (۱۰)$$

بنابراین قضیه اثبات می‌شود.

اضافه کردن پارامترهای مکان و مقیاس به توزیع چوله-نرمال، انعطاف پذیری آن را بیشتر می‌کند و با تغییر مقدار پارامترها می‌توان کنترل بیشتری روی توزیع داشت. با در نظر گرفتن تبدیل  $X = \mu + \sigma Z$   $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع چوله-نرمال با تابع چگالی احتمال:

$$f_X(x) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\delta\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right) \quad (۵)$$

است که به صورت  $X \sim SN(\mu, \sigma^2, \delta)$  نشان داده می‌شود. امید ریاضی و واریانس توزیع  $X$  به صورت رابطه (۶) قابل محاسبه است:

$$E(X) = \mu + \sigma \mu_z, \quad V(X) = \sigma^2(1 - \mu_z^2), \quad (۶)$$

$$\text{که در آن } \mu_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma \text{ و } \gamma = \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}$$

**یادآوری ۱:** با جایگذاری  $p = q = 1, v = 0$  در رابطه (۱)، تابع چگالی (۵) حاصل می‌شود. بنابراین توزیع-چوله نرمال حالت خاص از توزیع چوله-نرمال بسته است.

### ۳-۲ - توزیع مجانبی<sup>۱</sup> مجموع متغیرهای تصادفی چوله-نرمال

در نظریه‌ی توزیع مجانبی، رفتار متغیرهای تصادفی با افزایش تعداد نمونه‌ها بررسی می‌شود. در این‌جا قصد داریم توزیع مجانبی مجموع متغیرهای تصادفی توزیع چوله-نرمال را با افزایش تعداد نمونه‌ها بدست آوریم. به قضیه‌ی زیر توجه کنید:

**قضیه ۱** فرض کنید  $X_1, X_2, X_3, \dots$  دنباله‌ی تصادفی مستقل (نه هم‌توزیع) از توزیع چوله-نرمال با پارامترهای  $\mu_j$ ،  $\sigma_j^2$  و  $\delta_j$  باشند. با فرض آن‌که  $V(W_j)$  به سرعت به صفر میل نکنند (نزدیک صفر نباشند) آن‌گاه:

$$\frac{\sum_{j=1}^n W_j - \sum_{j=1}^n E(W_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n V(W_j)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (۷)$$

1. Asymptotic Distribution
2. Lyapanove
3. Billingsley

$$\begin{aligned}
 s. t. \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{ij} + s_i^- - \Phi^{-1}(\alpha) v_i = \theta \mu_{io}, \\
 & i = 1, 2, \dots, m, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j \eta_{rj} - s_r^+ + \Phi^{-1}(\alpha) u_r = \eta_{ro}, \\
 & r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & s_i^- \geq 0, v_i \geq 0, \\
 & i = 1, 2, \dots, m, \\
 & s_r^+ \geq 0, u_r \geq 0, \\
 & r = 1, 2, \dots, s, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{۱۲}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
 v_i^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \lambda_k \text{cov}(X_{ij}, X_{ik}) + \\
 & 2(\lambda_o - \theta) \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{cov}(X_{ij}, X_{io}) + \\
 & (\lambda_o - \theta)^2 \text{cov}(X_{io}), \\
 u_r^2 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j \lambda_k \text{cov}(Y_{rj}, Y_{rk}) + \\
 & 2(\lambda_o - 1) \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{cov}(Y_{rj}, Y_{ro}) + \\
 & (\lambda_o - 1)^2 \text{cov}(Y_{ro}).
 \end{aligned}$$

و  $\Phi^{-1}(\alpha)$  چندک مرتبه‌ی  $\alpha$  ام توزیع نرمال استاندارد است. مدل (۱۲) یک مدل برنامه‌ریزی درجه دوم می‌باشد.

### ۳-۲- مدل تصادفی BCC در حضور توزیع چوله-نرمال

گیریم متغیرهای ورودی و خروجی از توزیع چوله-نرمال پیروی کنند یعنی  $X_{ij} \sim SN(\mu_i, \sigma_i^2, \delta_i)$  و  $Y_{ij} \sim SN(\eta_r, \tau_r^2, \varepsilon_r)$  همچنین فرض کنید ورودی‌های نام  $i = 1, 2, \dots, m$  و خروجی‌های نام  $r = 1, 2, \dots, s$  واحدهای تصمیم‌گیرنده از هم مستقل باشند. از آنجایی که توزیع چوله-نرمال یک حالت خاص از توزیع چوله-نرمال بسته است و همچنین این توزیع

### ۳- مدل تصادفی BCC

#### ۳-۱- مدل تصادفی BCC در حضور توزیع نرمال

فرض کنید  $DMU_j$ ،  $j = 1, 2, \dots, n$ ،  $m$  ورودی‌های  $X_{ij}$ ،  $i = 1, 2, \dots, m$  را برای تولید  $S$  خروجی‌های  $Y_{rj}$ ،  $r = 1, 2, \dots, S$  مصرف کنند. همچنین فرض کنید که تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها تصادفی هستند. فرم محدودیت احتمالی در ماهیت ورودی به صورت مدل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \theta \\
 s. t. \quad & p\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta x_{io}\right) \geq 1 - \alpha, \\
 & i = 1, 2, \dots, m, \\
 & p\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq y_{ro}\right) \geq 1 - \alpha, \\
 & r = 1, 2, \dots, S, \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\
 & \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,
 \end{aligned}
 \tag{۱۱}$$

که در آن  $p$  به معنای "احتمال" و  $\alpha$  سطح خطایی است که در ابتدا توسط مدیر مشخص شده و بین صفر و یک می‌باشد. برای ارزیابی یک DMU تصادفی به کمک مدل (۱۱) می‌توان براساس روش‌های برنامه‌ریزی تصادفی با قیود احتمالی این مدل را به فرم قطعی تبدیل کرد.

**تعریف ۳:**  $DMU_o$  کارایی تصادفی است اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر در جواب بهینه‌ی مدل (۱۱) برقرار باشد:

$$\theta^* = 1 \tag{۱}$$

(۲) تمامی متغیرهای کمبود و مازاد در جواب بهینه صفر باشد.

فرض کنید  $X_j = (X_{1j}, X_{2j}, \dots, X_{mj})'$  داده‌های ورودی و  $Y_j = (Y_{1j}, Y_{2j}, \dots, Y_{sj})'$  داده‌های خروجی دارای توزیع نرمال به ترتیب با بردارهای میانگین  $\mu_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j}, \dots, \mu_{mj})'$  و  $\eta_j = (\eta_{1j}, \eta_{2j}, \dots, \eta_{sj})'$  باشند. به پیروی از کوپر و همکاران [7] مدل قطعی شده (۱۱) به صورت مدل (۱۲) بدست می‌آید:

$$\min \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right)$$

$$\frac{(\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} - Y_{ro}) - (\sum_{j=1}^n \lambda_j E(Y_{rj}) - 1E(Y_{ro}))}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 V(Y_{rj}) + V(X_{ro})(1-2\lambda_o)}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad (15)$$

و استفاده از خواص توزیع نرمال استاندارد و همچنین یادآوری ۱ از حسین زاده لطفی و همکاران [9]، مدل قطعی شده BCC با داده‌های تصادفی از توزیع چوله-نرمال در حالت مجانبی به صورت مدل (۱۶) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- - \Phi^{-1}(\alpha) \sigma_i^l(\lambda, \theta) = \theta x_{io}, \\ i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ + \Phi^{-1}(\alpha) \tau_r^o(\lambda) = y_{ro}, \\ r = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ s_i^- \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ s_r^+ \geq 0, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} E(X_{ij}) = x_{ij} = \mu_{ij} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{ij} \gamma_{ij}, \\ E(X_{io}) = x_{io} = \mu_{io} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{io} \gamma_{io}, \\ E(Y_{rj}) = y_{rj} = \eta_{rj} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau_{rj} \beta_{rj}, \\ E(Y_{ro}) = y_{ro} = \eta_{ro} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tau_{ro} \beta_{ro}, \\ V(X_{ij}) = \sigma_{ij}^{*2} = \sigma_{ij} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \mu_z^2 \right), \\ V(X_{io}) = \sigma_{io}^{*2} = \sigma_{io} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \mu_z^2 \right), \\ V(Y_{rj}) = \tau_{rj}^{*2} = \tau_{rj} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \eta_z^2 \right), \\ V(Y_{ro}) = \tau_{ro}^{*2} = \tau_{ro} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \eta_z^2 \right), \end{aligned} \quad (17)$$

و همچنین  $\mu_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \beta_{rj}$  و  $\eta_z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \gamma_{ij}$

$$\beta_{rj} = \frac{\varepsilon_{rj}}{\sqrt{1+\varepsilon_{rj}^2}} \text{ و } \gamma_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{1+\delta_{ij}^2}}$$

نسبت به مجموع و توزیع توام بسته است، لذا با استفاده از یادآوری ۱ از گونزالس-فاریاس [8] و همچنین حسین-زاده لطفی و همکاران [9]، مدل قطعی (۱۱) در حضور توزیع چوله-نرمال به صورت مدل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \min \theta - \varepsilon (\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_{ij} + s_i^- + v_i \Psi_i^{-1}(1 - \alpha, \lambda, \theta) = \theta \mu_{io}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j \eta_{rj} - s_r^+ + u_r \Psi_r^{-1}(\alpha, \lambda) = \eta_{ro}, \quad r = 1, 2, \dots, s, \\ v_i^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \sigma_{ij}^2 + \theta \sigma_{io}^2 (\theta - 2\lambda_o), \\ i = 1, 2, \dots, m \\ u_r^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \tau_{rj}^2 + \tau_{ro}^2 (1 - 2\lambda_o), \\ r = 1, 2, \dots, s, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ s_i^- \geq 0, v_i \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, m, \\ s_r^+ \geq 0, u_r \geq 0, \\ r = 1, 2, \dots, s, \\ \lambda_j \geq 0, \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن  $\Psi_i^{-1}(1 - \alpha, \lambda, \theta)$  و  $\Psi_r^{-1}(\alpha, \lambda)$  چندک‌های توزیع چوله-نرمال هستند. **یادآوری ۲:** اگر در مدل (۱۳) ضرایب چولگی تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها برابر صفر باشد آن‌گاه مدل (۱۲) (با فرض مستقل بودن ورودی‌ها نام و خروجی‌های نام) حاصل می‌شود.

به دلیل آن که چندک‌های  $\Psi_i^{-1}(1 - \alpha, \lambda, \theta)$  و  $\Psi_r^{-1}(\alpha, \lambda)$  توابعی از  $\lambda$  و  $\theta$  هستند و به صورت انتگرالی بدست می‌آیند، لذا محاسبه‌ی جواب بهینه در مدل (۱۳) پیچیده خواهد بود. بنابراین ما مدل (۱۳) را برای حالتی که در آن تعداد DMUها افزایش می‌یابد را به یک مدل کاربردی‌تری تبدیل می‌کنیم. با بکارگیری خواص توزیع چوله-نرمال و چوله-نرمال بسته، کافی است در قضیه ۱ برای متغیرهای ورودی و خروجی قرار

دهیم:

$$\frac{(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} - \theta X_{io}) - (\sum_{j=1}^n \lambda_j E(X_{ij}) - \theta E(X_{io}))}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 V(X_{ij}) + \theta V(X_{io})(\theta - 2\lambda_o)}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad (14)$$

## ۴- مثال کاربردی

در این بخش قصد داریم با استفاده از یک مثال کاربردی، نتایج کارایی تصادفی در حضور توزیع چوله-نرمال را بدست آورده و این نتایج را در حالتی که به اشتباه توزیع داده‌ها نرمال فرض شده است را مقایسه کنیم. بیست و پنج شعبه از یک بانک ایرانی با ورودی‌ها و خروجی‌های تصادفی را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیرهای ورودی این مثال "سود پرداختی" و "مطالبات

معوقه" و متغیرهای خروجی آنها، "مجموع سپرده‌ها"، "سود دریافتی" و "کارمزد دریافتی" باشد. پس از جمع آوری داده‌ها در سی ماه متوالی و بکارگیری آزمون نیکویی برازش<sup>۱</sup> در می‌یابیم که این داده‌های از توزیع چوله-نرمال تبعیت می‌کنند. برآورد درست‌نمایی ماکزیمم<sup>۲</sup> پارامترها با استفاده از نرم افزار R در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است.

جدول ۱. برآورد پارامترهای ورودی توزیع چوله-نرمال

DMUs		
DMU1	SN(14.448, 5.052, -10.455)	SN(7.056, 0.044, 0.683)
DMU2	SN(39.081, 19.211, -17.716)	SN(0.915, 0.019, -.009)
DMU3	SN(24.192, 10.702, 17.971)	SN(18.145, 0.0551, -0.594)
DMU4	SN(12.822, 5.954, -11.5)	SN(58.486, 0.067, -0.177)
DMU5	SN(7.827, 1.367, -5.832)	SN(9.505, 2.893, -6.97)
DMU6	SN(18.687, 1.444, 3.413)	SN(565.63, 33.937, -17.255)
DMU7	SN(24.588, 9.758, -16.394)	SN(548.45, 16.506, -17.566)
DMU8	SN(119.557, 61.342, -18.595)	SN(13.956, 0.031, 0.599)
DMU9	SN(31.479, 13.745, -15.666)	SN(358.35, 30.974, -18.32)
DMU10	SN(41.726, 17.995, -10.568)	SN(10.573, 0.092, -1)
DMU11	SN(40.652, 17.838, 18.858)	SN(23.984, 0.014, 1.599)
DMU12	SN(95.136, 51.122, -16.125)	SN(120.344, 33.828, 16.314)
DMU13	SN(16.239, 5.581, -10.948)	SN(74.813, 1.548, -6.773)
DMU14	SN(29.417, 11.234, -15.63)	SN(112.443, 1.128, -4.938)
DMU15	SN(48.254, 26.871, 18.853)	SN(56.218, 0.336, -1.798)
DMU16	SN(47.9, 46.122, 3.882)	SN(38.15, 19.963, -18.574)
DMU17	SN(26.67, 13.721, -16.834)	SN(167.43, 1.587, -6.582)
DMU18	SN(35.42, 16.786, -17.244)	SN(6.637, 0.126, -0.979)
DMU19	SN(21.759, 10.996, -15.647)	SN(30.914, 0.016, -0.4)
DMU20	SN(13.198, 5.102, -10.354)	SN(10.559, 0.733, -9.191)
DMU21	SN(25.305, 1.525, 1.341)	SN(60.16, 3.918, 1.65)
DMU22	SN(60.543, 272.308, 5.761)	SN(160.897, 4.127, 3.045)
DMU23	SN(20.971, 316.476, -10.361)	SN(8.231, 1.0838, -1.231)
DMU24	SN(18.402, 630.893, -6.219)	SN(160.874, 4.66, 2.075)
DMU25	SN(25.86, 137.986, 10.671)	SN(175.16, 44.856, -5.821)

1. Goodness of Fit

2. Maximum Likelihood Estimation

جدول ۲. برآورد پارامترهای خروجی توزیع چوله- نرمال

DMUs			
DMU1	SN(47.491,3.122,-8.1)	SN(3.706,0.0523,-0.2)	SN(3.812,0.0519,-1.1)
DMU2	SN(72.59,0.203,-1.27)	SN(2.06,0.011,-0.657)	SN(1.72,0.096,-1.577)
DMU3	SN(101.9,9.54,-14.38)	SN(5.923,0.009,-0.12)	SN(11.355,0.105,1.36)
DMU4	SN(43.975,0.192,1.46)	SN(3.673,0.09,-0.245)	SN(3.941,0.072,-0.18)
DMU5	SN(30.8,0.258,-0.662)	SN(1.69,0.049,-0.419)	SN(8.441,0.161,-1.63)
DMU6	SN(86.673,11.988,18)	SN(9.801,1.151,-5.35)	SN(39.703,0.561,-2.8)
DMU7	SN(74.5,7.98,-12.201)	SN(5.457,0.315,-2.57)	SN(14,0.182,-1.805)
DMU8	SN(213,12.96,-16.403)	SN(31.98,1.799,-6.14)	SN(12.526,0.591,-3.3)
DMU9	SN(82.521,2.456,-7.8)	SN(19.639,0.34,3.038)	SN(82.954,1.4,-5.569)
DMU10	SN(200.4,36.5,27.192)	SN(23.049,1.067,-5.3)	SN(82.8,3.038,-8.399)
DMU11	SN(158.139,43.63,-19)	SN(1657,6.988,-11.21)	SN(6.179,2.723,-7.64)
DMU12	SN(244,10.306,-12.74)	SN(46.5,0.271,-0.973)	SN(28.52,1.95,-6.006)
DMU13	SN(99.534,11.317,-15)	SN(7.987,0.724,-4.31)	SN(27.084,2.705,-7.5)
DMU14	SN(82.8,8.609,-12.75)	SN(7.825,0.082,0.973)	SN(5.769,0.085,-1.24)
DMU15	SN(162.884,5.8,-9.77)	SN(65.34,1.753,-6.31)	SN(129,6.603,-9.228)
DMU16	SN(154.7,13.2,-15.66)	SN(35.188,0.296,-1.6)	SN(8.583,1.531,-6.61)
DMU17	SN(103,17.26,-15.295)	SN(10.7,0.068,-0.856)	SN(9.833,1.84,-7.743)
DMU18	SN(77.96,3.592,-9.22)	SN(7.706,1.172,6.048)	SN(7.222,0.152,-1.82)
DMU19	SN(68.519,3.968,-10)	SN(4.582,0.067,-0.97)	SN(46.87,3.242,-8.04)
DMU20	SN(37.93,1.855,-6.98)	SN(11.95,0.108,1.581)	SN(3.628,0.432,-3.26)
DMU21	SN(60.693,5.27,3.129)	SN(3.304,0.002,0.127)	SN(16.223,0.0016,1.5)
DMU22	SN(73.04,69.677,-2.2)	SN(1440,16.2,4.832)	SN(12.4,0.037,-1.581)
DMU23	SN(80.5,36.296,5.123)	SN(175.147,17.1,-2.9)	SN(1.119,1.606,0.328)
DMU24	SN(22.799,0.159,3.19)	SN(38.326,0.367,1.73)	SN(1.99,0.388,2.11)
DMU25	SN(25.6,1.247,-4.289)	SN(4.95,0.002,-0.842)	SN(25.73,0.03,-3.129)

اطلاعات جدول ۴ نشان می‌دهد که شعبات ۲، ۳، ۵، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۶، ۱۹، ۲۱، ۲۳ و ۲۴ کارای تصادفی هستند. با مقایسه نتایج جداول ۳ و ۴ ملاحظه می‌کنیم که شعبات ۱۳، ۲۰ و ۲۲ کارا هستند اما با فرض توزیع اشتباه، این شعبات ناکارا تشخیص داده شده است و بالعکس شعبات ۲، ۶، ۸، ۱۶، ۲۱ و ۲۳ به غلط کارا تشخیص داده شده است اما در واقعیت آنها ناکارا هستند.

با حل مدل (۱۷) به وسیله نرم‌افزار LINGO به ازای  $\alpha = 0.05$  نتایج کارای تصادفی در جدول ۳ نشان داده شده است. نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد که شعبات ۳، ۵، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۹، ۲۰، ۲۲ و ۲۴ کارای تصادفی هستند. حال به اشتباه فرض کنید که توزیع ورودی‌ها و خروجی‌ها نرمال باشند. با این فرض، مدل (۱۲) را به ازای  $\alpha = 0.05$  اجرا می‌کنیم. نتایج کارای تصادفی شعبات بانک برای ورودی‌ها و خروجی‌های توزیع نرمال در جدول ۴ آمده است.



جدول ۳. کارایی تصادفی در حضور توزیع چوله - نرمال

DMUs						
DMU1	0.9505	0	0	0	2.2751	4.8596
DMU2	1	0.9504	0	0	0.1482	1.8962
DMU3	1	0	0	0	0	0
DMU4	0.7336	0	0	0	0.935	4.4232
DMU5	1	0	0	0	0	0
DMU6	0.994	0	7.0095	0	0.0913	0
DMU7	0.652	0	32.4793	0	2.9351	7.8881
DMU8	0.7407	0	0	0	3.9869	5.4395
DMU9	1	0	0	0	0	0
DMU10	1	0	0	0	0	0
DMU11	1	0	0	0	0	0
DMU12	0.6841	0	0	0	7.3245	0
DMU13	1	0	0	0	0	0
DMU14	0.9992	0	0.2197	0	0.0007	0.0156
DMU15	1	0	0	0	0	0
DMU16	0.9907	0	0	0	0	0.4674
DMU17	0.9851	0	0	0	0	0.4937
DMU18	0.7539	0	0	0	2.3261	1.7615
DMU19	1	0	0	0	0	0
DMU20	1	0	0	0	0	0
DMU21	0.7305	0	1.2318	0	1.2541	0
DMU22	1	0	0	0	0	0
DMU23	0.9898	1.8891	0	0	0	1.5098
DMU24	1	0	0	0	0	0
DMU25	0.9115	0	1.1899	2.7196	3.8807	0

جدول ۴. کارایی تصادفی در حضور توزیع نرمال

DMUs						
DMU1	1	0	0	0.0121	3.6406	0.0285
DMU2	1	0	0	0	0	0
DMU3	1	0	0	0	0	0
DMU4	0.7791	0	0	0	2.845	0.7203
DMU5	1	0	0	0	0	0
DMU6	1	0	0	0	0	0
DMU7	0.7855	0	0	0	0	0
DMU8	1	0	0	0	0	0
DMU9	1	0	0	0	0	0
DMU10	1	0	0	0	0	0
DMU11	1	0	0	0	0	0
DMU12	1	0	0	0	3.6007	0
DMU13	0.9987	0	0	0	0.0294	0.0077
DMU14	0.9724	0	1.7895	0	0.5076	0.2426
DMU15	1	0	0	0	0	0
DMU16	1	0	0	0	0	0
DMU17	1	0	0	0	0.2926	1.0022
DMU18	0.92	0	0	0	0.8734	0.8541
DMU19	1	0	0	0	0	0
DMU20	0.9972	0	0	0	0.7577	0.0894
DMU21	1	0	0	0	0	0
DMU22	0.9962	0	0	1.7625	2.0857	0.089
DMU23	1	0	0	0	0	0
DMU24	1	0	0	0	0	0
DMU25	1	0	1.1933	0.5341	0.0435	0.194

### نتیجه‌گیری

تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های تصادفی از روش‌های منشعب از علم پژوهش‌های عملیاتی است که پیشرفت و کاربردهای زیادی در دو دهه‌ی اخیر پیدا کرده است. این شاخه روشی احتمالی برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس است که برای داده‌هایی به کار می‌رود که قطعی نبوده بلکه تصادفی هستند. در این میان توزیع‌های احتمال نقشی کلیدی ایفا می‌کنند و انتخاب صحیح این توزیع‌ها می‌تواند نتایج را به‌طور واقعی گزارش دهد.

اغلب در آمار، برای سادگی تحلیل توزیع داده‌ها را نرمال فرض می‌کنند اما در مسایل کاربردی به‌ویژه داده‌های اقتصادی، مالی، بیمه و... فرض نرمال بودن داده‌ها یک فرض ایده آل بشمار می‌رود و کمتر اتفاق می‌افتد که بر واقعیت منطبق باشد. تحلیل پوششی داده‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیست و در بیشتر تحقیقات گذشته فرض

شده است که داده‌ها دارای توزیع نرمال است ولی در عمل امکان دارد که توزیع داده‌ها نامتقارن باشد. ما در این مقاله، فرض کردیم که توزیع داده‌ها نامتقارن بوده و از چوله-نرمال پیروی می‌کنند و با این فرض مدل قطعی شده BCC را بنا نهادیم. با افزایش تعداد DMUها این مدل پیشنهادی را به فرم ساده‌تری تبدیل کرده و نشان دادیم که این مدل شامل مدل‌های با فرض نرمال نیز هست. در پایان مدل ارائه شده را برای داده‌های واقعی مربوط به بیست و پنج شعبه از یک بانک ایرانی اجرا نموده و نتایج را برای زمانی که به اشتباه توزیع داده‌ها نرمال فرض شده است مقایسه کردیم. نتیجه مهم این بود که ممکن است بعضی از شعبات که در واقعیت کارا بودند با در نظر گرفتن توزیع اشتباه داده‌ها ناکارا تشخیص داده شوند و بالعکس.

**Referenc:**

- [1] Azzalini, A. (1985). "A Class of Distribution Which Includes the Normal Ones". *Scandinavia Journal of statistics*, 12, 171-178.
- [2] Banker, R.D., Charnes, A. and Cooper, W.W. (1984). "Some models for estimating technical and scale inefficiency in data envelopment analysis". *Management Science*, 39, 1078-1092.
- [3] Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure*. John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. (1978). "Measuring the efficiency of decision making unit"s. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.
- [5] Cooper, W.W., Huang, Z. and Li, S.X. (1996a). "Satisficing DEA model under chance constraints". *The Annals of Operational Research*, 66, 259-279.
- [6] Cooper, W.W., Thompson, R.G. and Thrall, R. (1996b). "Extensions and new development in DEA". *The Annals of Operational Research*, 66, 3-46.
- [7] Cooper, W.W., Deng, H., Huang, Z. and Li, S.X. (2004). "Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis". *European Journal of Operational Research*, 155, 487-591.
- [8] Gonzalez-Farias, G., Dominguez-Molina, A. and Gupta, A.K. 2004. "Additive properties of skew-normal random vectors". *Journal of Stat Plan Inference*, 126, 521-534.
- [9] Hosseinzadeh-Lotfi, F., Nematollahi, N., Behzadi, M.H., Mirbolouki, M. and Moghadas, Z. (2012). "Centralized resource allocation with stochastic data". *Journal of computation and Applied Mathematics*, 236, 1783-1788
- [10] Huang, Z & Li, S.X. (2001). "Stochastic DEA model with different types of input-output disturbance". *Journal of Productivity Analysis*, 15, 95-113.
- [11] Jess, A. Jongen, H.Th. Neralic', L. and Stein, O. A. (2001), "Semi-infinite programming model in data envelopment analysis". *Optimization* 49 (4) 369-385.
- [12] Khodabakhshi, M., Asgharian, M. (2009). "An input relaxation measure of efficiency in stochastic data in data envelopment analysis". *Applied Mathematical modelling*, 33, 2010-2023.
- [13] Khodabakhshi, M. (2009). "Estimating most productive scale size with stochastic data in data envelopment analysis". *Economic modelling*, 26, 68-973.
- [14] Nazari, A., Behzadi, M.h. (2015) "Comparing the Efficiency of DMUs with Normal and Skew-Normal Distribution using Data Envelopment Analysis". *Journal of New Researches in Mathematics*, 1(1), 67-77.