

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دوم، شماره هفتم، پاییز ۱۳۹۵

شماره شاپا: ۱۹۶-۰۱۶۸۲



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی برای عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی در گراف‌ها

حسین عبدالله زاده آهانگر^{۱*}، زهرا قندعلی^۲^(۲۰۱) گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۴/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۸/۲۶

چکیده

تابع $f: V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\{1,2\})$ یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی (2RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس u با شرط $f(v) = \emptyset$ داشته باشیم $\{1,2\} = \bigcup_{u \in N(v)} f(u)$. وزن یک 2RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک 2RDF در گراف G است. تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی (M2RDF) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی f می‌باشد به طوری که مجموعه‌ی $\{w \in V(G) | f(w) = \emptyset\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک M2RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی گراف G را که با نماد $\gamma_{m2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک M2RDF در گراف G است. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی را ادامه می‌دهیم. ابتدا تمام گراف‌های G را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری که عدد احاطه‌گر آن‌ها برابر ۲ یا ۳ می‌باشد. در پایان تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۵ را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری که $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی، عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کمانی، تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی، عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی.

مقدمه

برای اصطلاحات و نمادهای نظریه گراف که در این جا ارایه نشده است، خواننده را به [۸، ۹، ۱۵] ارجاع می‌دهیم. در این مقاله، G گرافی است با مجموعه راس‌های $V = V(G)$ و مجموعه یال‌های $E = E(G)$. مرتبه گراف G را با $|V| = n$ و اندازه گراف G را با $|E| = m$ نشان می‌دهیم. برای راس v مجموعه‌ی همه راس‌هایی که با راس v مجاورند را همسایگی باز راس v نامیده و به صورت $N(v)$ نشان می‌دهیم و همسایگی بسته‌ی راس v را به صورت $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ تعریف می‌کنیم. همسایگی باز $S \subseteq V$ برابر است با مجموعه $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ و همسایگی بسته آن برابر است با مجموعه $N[S] = N(S) \cup S$. درجه‌ی راس $v \in V(G)$ برابر است با $deg_G(v) = deg(v) = |N(v)|$. همچنین مینیمم درجه و ماکسیمم درجه یک گراف به ترتیب با $\delta = \delta(G)$ و $\Delta = \Delta(G)$ معرفی می‌شوند. منظور از یک برگ یک راس از درجه یک می‌باشد و راس تکیه‌گاهی راسی مجاور به برگ است. منظور از K_n گراف کامل از مرتبه n ، C_n دور به طول n و P_n مسیر به طول $n - 1$ می‌باشد. جمع دو گراف G_1 و G_2 را با $G_1 + G_2$ نشان می‌دهیم و گرافی است که هر راس از گراف G_1 را به هر راس از گراف G_2 متصل می‌کنیم. زیرگراف القاء شده توسط یک مجموعه S در گراف G را با $G[S]$ نشان می‌دهند. فاصله‌ی دورترین راس گراف G نسبت به راس v را خروج از مرکز گراف G گوئیم و با نماد $e(v)$ نشان می‌دهیم. به بزرگترین خروج از مرکز راس‌ها در یک گراف قطر گراف گویند و با $diam(G)$ نشان می‌دهند. کمر گراف G ، طول کوتاهترین دور در آن گراف می‌باشد و با $girth(G)$ یا $g(G)$ نشان می‌دهند. اگر گراف G شامل دور نباشد، کمر آن را ∞ تعریف می‌کنیم. طول کوتاهترین مسیر از راس u به راس v در گراف G را فاصله‌ی u از v نامیده و با $d(u, v)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه $A \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه $N[A] = V(G)$. عدد احاطه‌گر گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک

مجموعه احاطه‌گر است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. هر مجموعه احاطه‌گر با مینیمم تعداد عضو را با $\gamma(G)$ - مجموعه نشان می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر $D \subseteq V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ماکسیمال (MDS) نامیده می‌شود هرگاه $V - D$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نباشد. عدد احاطه‌گر ماکسیمال گراف G که با $\gamma_m(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر ماکسیمال است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. مفهوم احاطه‌گر ماکسیمال در [۱۱] معرفی شده است. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۱۰، ۱۲] ارجاع می‌دهیم.

تابع $f: V(G) \rightarrow \mathcal{P}(\{1, 2\})$ یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کماتی (2RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه برای هر راس u با شرط $f(v) = \emptyset$ داشته باشیم $u \in N(v) \Rightarrow f(u) = \{1, 2\}$. وزن یک 2RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ۲-رنگین کماتی گراف G را که با نماد $\gamma_{2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک 2RDF در گراف G است. یک تابع احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کماتی (M2RDF) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر ۲-رنگین کماتی $f = (V_0, V_1, V_2, V_{12})$ می‌باشد به طوری که مجموعه‌ی $\{w \in V(G) | f(w) = \emptyset\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک M2RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} |f(v)|$. عدد احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کماتی گراف G را که با نماد $\gamma_{m2r}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک M2RDF در گراف G است. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۷، ۳، ۱۳، ۱۴، ۱۶] ارجاع می‌دهیم.

عبدالزهاده آهنگر و همکاران در [۱] پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کماتی را معرفی نمودند و در آن مقاله گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کماتی n را دسته‌بندی نموده‌اند. همچنین عبدالزهاده آهنگر و همکاران در [۲] گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کماتی $n - 1$ را دسته‌بندی نموده‌اند. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌گر ماکسیمال ۲-رنگین کماتی را ادامه می‌دهیم. ابتدا تمام گراف‌های G را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری

بررسی حالت (الف): با بررسی ساده به این نتیجه می‌رسیم که $G \in \{P_3, K_3\}$.

بررسی حالت (ب): فرض کنید $V_1 = \{u, v\}$ و $V_2 = \{w\}$ باشند. به‌وضوح هر رأس از $V(G) - \{u, v, w\}$ باید با w مجاور باشد. از طرف دیگر، دقیقاً فقط یکی از رأس‌های u و v باید با تمام رأس‌های در $V(G) - \{u, v, w\}$ مجاور باشد، مثلاً u . به‌علاوه رأس v با هیچ‌کدام از رأس‌های در $V(G) - \{u, v, w\}$ مجاور نیست. چون G گراف همبند است، پس رأس v باید حداقل با یکی از رأس‌های u یا w مجاور باشد. با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که G گرافی است که از $K_2 + H$ یا $\overline{K_2} + H$ که در آن H گرافی از مرتبه $n - 3$ می‌باشد، با افزودن یک رأس و مجاور کردن آن به بعضی از رأس‌های K_2 یا $\overline{K_2}$ به دست می‌آید.

بررسی حالت (ج): فرض کنید $V_1 = \{x\}$ و $V_{12} = \{y\}$ باشند. به وضوح هر رأس $V(G) - \{x, y\}$ با y مجاورند و x با هیچ‌کدام از رأس‌های $V(G) - \{x, y\}$ مجاور نمی‌باشد. چون G گراف همبند است پس $xy \in E(G)$. بنابراین G گرافی است که از $K_1 + F$ ، که در آن F گرافی از مرتبه $n - 2 \geq 1$ می‌باشد، با الصاق یک برگ در K_1 بدست می‌آید.

دسته بندی گراف‌های G با کمر حداقل ۵ و از مرتبه n با عدد احاطه‌گری ماکسیمال ۲-رنگین کمانی $n - 2$

لم ۳. اگر G یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 8$ و $diam(G) \geq 7$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$.

اثبات: فرض $P: x_1 - x_2 - \dots - x_{diam(G)+1}$ مسیر قطری برای گراف G باشد. واضح است که $f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset)$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$

که عدد احاطه گر آن‌ها برابر ۲ یا ۳ می‌باشد. در پایان تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۵ را دسته‌بندی می‌کنیم به طوری که $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد.

در این مقاله از نتیجه مفید زیر استفاده می‌کنیم:

گزاره الف: برای $n \geq 3$ اگر $n \equiv 2 \pmod{4}$ باشد،

$$\gamma_{m2r}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

و اگر $n \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$ باشد،

$$\gamma_{m2r}(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1.$$

دسته بندی گراف‌ها با عدد احاطه گر ماکسیمال ۲-رنگین کمانی کوچک

قضیه ۱. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این صورت $\gamma_{m2r}(G) = 2$ اگر و تنها اگر $K_2 \cong G$ باشد.

اثبات: اثبات یک طرف بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $\gamma_{m2r}(G) = 2$ باشد. به وضوح $|V_1| = 2$. لذا $V_0 \cup V_2 \cup V_{12} = \emptyset$ که در این صورت $G \cong K_2$ است.

قضیه ۲. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n باشد. در این صورت $\gamma_{m2r}(G) = 3$ اگر و تنها اگر $G \in \{P_3, K_3\}$ (الف)

(ب) G گرافی است که از $K_2 + H$ یا $\overline{K_2} + H$ که در آن H گرافی از مرتبه $n - 3$ می‌باشد، با افزودن یک رأس و مجاور کردن آن به بعضی از رأس‌های K_2 یا $\overline{K_2}$ به‌دست می‌آید.

(ج) G گرافی است که از $K_1 + F$ که در آن F گرافی از مرتبه $n - 3$ می‌باشد، با الصاق یک برگ در K_1 بدست می‌آید.

اثبات: اثبات یک طرف بدیهی است. برای اثبات طرف دیگر فرض کنید $\gamma_{m2r}(G) = 3$ باشد. در این صورت یکی از حالت‌های زیر اتفاق می‌افتد.

$$(الف) |V_1| = 3,$$

$$(ب) |V_1| = 2 \text{ و } |V_2| = 1,$$

$$(ج) |V_1| = |V_{12}| = 1.$$

باشند. چون $g(G) = 6$ است، بنابراین x_7 نمی‌تواند با هیچ راسی از $V(G_6) - \{x_1\}$ مجاور باشد. حال نشان می‌دهیم که x_7 برگ است و $\deg(x_1) = 3$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد.

اگر x_7 برگ نباشد، آن‌گاه راسی مانند x_8 وجود دارد که با x_7 مجاور می‌باشد. واضح است که

$$f = (\{x_1, x_3, x_5\}, V(G) - \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_2, x_6\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

حال برای قسمت دیگر ادعا فرض (خلف) کنید که $\deg(x_1) \geq 4$ باشد. در این صورت راسی مانند x_8 وجود دارد که با x_1 مجاور است. واضح است که

$$f = (\{x_2, x_6, x_7, x_8\}, V(G) - \{x_1, x_2, x_6, x_7, x_8\}, \emptyset, \{x_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

در پایان نشان می‌دهیم که دقیقاً یکی از راس‌های C_6 از درجه‌ی ۳ می‌باشد و بقیه‌ی راس‌هایش از درجه‌ی ۲ می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله، زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱-۱: $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 3$

فرض کنید x_8 مجاور راس x_2 باشد. به وضوح

$$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_4, x_5, x_6, x_8\}, \{x_5, x_8\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

حالت ۲-۱: $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 3$

فرض کنید x_8 مجاور راس x_3 باشد. چون $g(G) = 6$ است، بنابراین x_7 و x_8 نمی‌تواند مجاور باشند. در این صورت

$$f = (\{x_2, x_4, x_6, x_8\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}, \{x_3\}, \{x_5, x_7\})$$

نتیجه ۴. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 7$ و $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد. در این صورت $diam(G) \leq 6$ می‌باشد.

لم ۵. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 8$ و $g(G) \geq 8$ باشد. در این صورت $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$.

اثبات: فرض کنید $C_m = (x_1 x_2 \dots x_m)$ یک دور به طول $m \geq 8$ در گراف G باشد. در این صورت

$$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این‌رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$.

نتیجه ۶. اگر $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ باشد، آن‌گاه $g(G) \leq 7$ است.

فرض کنید برای $i = 1, 2, \dots, k$ گراف‌های متمایزی باشند که در آن $k \geq 2$ و $u_i \in V(G_i)$ گراف $G_1 \circ G_2 \circ \dots \circ G_k$ گرافی است که از اجتماع گراف‌های G_1, G_2, \dots, G_k با انطباق راس‌های u_1, u_2, \dots, u_k در راس u_1 به‌دست می‌آید.

قضیه ۷. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 6$ و $g(G) \in \{6, 7\}$ باشد. در این صورت $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ اگر و فقط اگر $G \in \{C_6, C_6 \circ K_2, C_7\}$.

اثبات: فرض کنید G یک گراف همبند باشد. فرض کنید $C_{g(G)} = (x_1 x_2 \dots x_{g(G)})$ یک دور به طول $g(G) \in \{6, 7\}$ در گراف G باشد. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱. $g(G) = 6$

اگر $n = 6$ باشد، آن‌گاه $G = C_6$ که نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید.

پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 7$ باشد. چون G یک گراف همبند است، لذا راسی مانند x_7 وجود دارد که به یکی از راس‌های C_6 مجاور است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که x_1 و x_7 مجاور

باشد. چون G یک گراف همبند است، لذا راسی مانند x_8 وجود دارد که به یکی از راس‌های C_7 مجاور است. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که x_1 و x_8 مجاور باشند. در این صورت

$$f = (\{x_2, x_4, x_6\}, V(G) - \{x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}, \{x_3, x_7\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

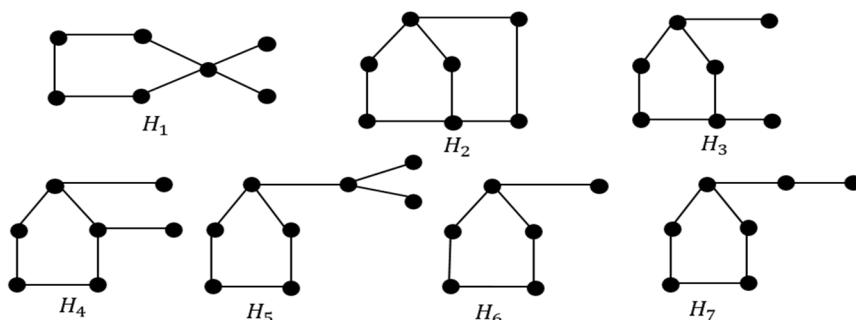
حالت ۱-۳: $\deg(x_1) = \deg(x_4) = 3$
فرض کنید x_8 مجاور راس x_4 باشد. به وضوح

$$f = (\{x_1, x_3, x_5\}, V(G) - \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6\}, \{x_2, x_6\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n - 3$ می‌باشد، که تناقض است.

حالت ۲: $g(G) = 7$

اگر $n = 7$ باشد، آن‌گاه $G = C_7$ که نتیجه مطلوب می‌باشد. پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 8$



خانواده گراف‌های C_5

راس‌های y_1, y_2 و y_3 با راس‌های در $V(C_5) - \{x_1\}$ مجاور نمی‌باشند. در این صورت

$$f = (y_1, y_2, y_3, x_2, V(G) - \{y_1, y_2, y_3, x_1, x_2\}, \emptyset, \{x_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ ، که تناقض است. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت ۱: برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$ ، $\deg(x_i) = 4$. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_1) = 4$. فرض کنید y_1 و y_2 مجاورهای راس x_1 باشند. نشان می‌دهیم هر راس $V(C_5) - \{x_1\}$ از درجه ۲ می‌باشد.

فرض کنید $\deg(x_3) \geq 3$ یا $\deg(x_4) \geq 3$ باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید

قضیه ۸. فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq 5$ و $g(G) = 5$ باشد. در این صورت $\gamma_{m2r}(G) = n - 2$ اگر و فقط اگر $G \in C_5$.

اثبات: فرض کنید $C_g(G) = (x_1 x_2 \dots x_5)$. اگر $n = 5$ باشد، آن‌گاه $G = C_5$ که با توجه به **گزاره الف** نتیجه می‌گیریم $\gamma_{m2r}(C_5) = 4 = n - 1$ که گراف دلخواه نمی‌باشد. پس در ادامه اثبات فرض می‌کنیم که $n \geq 6$ باشد.

ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر رأس x_i که $1 \leq i \leq 5$ ، $\deg(x_i) \leq 4$ ، فرض (خلف) کنید که برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$ ، داشته باشیم $\deg(x_i) \geq 5$. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\deg(x_1) \geq 5$ باشد. فرض کنید $\{y_1, y_2, y_3\} \subseteq N(x_1) - \{x_2, x_5\}$ باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین هیچ‌کدام از

متوالی C_5 از درجه‌ی ۳ باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید y_1, y_2 و y_3 به‌ترتیب مجاورهای x_1, x_2 و x_3 باشند. در این صورت

$$f = (\{x_1, x_2, x_4\}, V(G)) - (\{y_2, x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_5, y_2\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

حال در حالت دیگر، فرض (خلف) کنید که سه رأس نامتوالی از C_5 از درجه‌ی ۳ باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید y_1, y_2 و y_3 به‌ترتیب مجاورهای x_1, x_2 و x_4 باشند. اگر y_1 و y_3 مجاور نباشند، آن‌گاه

$$f = (\{x_2, x_3, x_5, y_3\}, V(G)) - (\{y_2, y_3, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_2\}, \{x_4\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

حال فرض کنید y_1 و y_3 مجاور باشند. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_1 با هیچ‌کدام از رأس‌های x_3, x_5 و x_2 مجاور نمی‌باشد. در این صورت

$$f = (\{y_2, x_3, x_5\}, V(G)) - (\{y_2, y_3, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4, y_3\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می‌دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

حال زیرحالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

زیر حالت ۱-۲: دو رأس نامجاور C_5 از درجه‌ی ۳ باشند.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که y_1 و y_2 به‌ترتیب مجاورهای x_1 و x_3 باشند. دو حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

(الف): y_1 و y_2 مجاور باشند.

فرض کنید $\deg(y_1) \geq 3$ یا $\deg(y_2) \geq 3$ باشد، مثلاً $\deg(y_2) \geq 3$ باشد. فرض کنید y_3 مجاور y_2 باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_3 با هیچ‌کدام از رأس‌های x_2, x_4 و x_1 مجاور نمی‌باشد. در این صورت

$\deg(x_3) \geq 3$ باشد. فرض کنید y_3 با x_3 مجاور باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین y_1 و y_2 نمی‌توانند با هم مجاور باشند و همچنین رأس y_3 حداکثر با یکی از رأس‌های y_1 و y_2 مجاور می‌باشد. در این صورت

$$f = (\{y_2, y_3, x_2, x_4, x_5\}, V(G)) - (V(C_5) \cup \{y_2, y_3\}, \emptyset, \{x_1, x_3\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

حال فرض کنید که $\deg(x_3) = \deg(x_4) = 2$ باشد. اگر یکی از رأس‌های x_2 یا x_5 از درجه حداقل ۳ باشد، فرض کنید $\deg(x_2) \geq 3$ و w با x_2 مجاور باشد. چون $g(G) = 5$ است، بنابراین رأس w با هیچ‌کدام از رأس‌های y_1 و y_2 مجاور نمی‌باشد. در این صورت

$$f = (\{y_1, y_2, x_3, x_5\}, V(G)) - (\{y_1, y_2, x_1, x_3, x_4, x_5\}, \{x_4\}, \{x_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

در پایان ادعا می‌کنیم که $n = 7$ فرض (خلف) کنید که $n \geq 8$ است. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید که $y_1 y_3 \in E(G)$ چون $g(G) = 5$ است، بنابراین $y_2 y_3 \notin E(G)$ در این صورت

$$f = (\{y_1, x_2, x_5\}, V(G)) - (\{y_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می‌باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

بنابراین با توجه به مفروضات بالا نتیجه می‌گیریم که $G \cong H_1$.

در ادامه اثبات فرض می‌کنیم هر رأس C_5 از درجه‌ی حداکثر ۳ باشد.

حالت ۲: برای بعضی از $1 \leq i \leq 5$ ، $\deg(x_i) = 3$ بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_1) = 3$. با توجه به **حالت ۱**، هر رأس C_5 از درجه‌ی حداکثر ۳ می‌باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که حداکثر دو رأس C_5 از درجه‌ی ۳ و بقیه‌ی رأس‌ها از درجه‌ی ۲ می‌باشند. فرض (خلف) کنید که سه رأس

(خلف) کنید که چنین نباشد. لذا راسی مانند y_3 وجود دارد که با y_1 یا y_2 مجاور است، مثلاً y_1 . در این صورت

$$f = (\{y_1, x_3, x_5\}, V(G) - \{y_1, y_3, x_3, x_4, x_5\}, \{y_3, x_4\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. به این ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می گیریم که $G \cong H_4$.

زیر حالت ۲-۳: دقیقاً یک راس C_5 از درجه ۳ باشد.

بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید که $\deg(x_1) = 3$ و بقیه ی راس های C_5 از درجه ۲ باشند. نشان می دهیم که یال آویزان در x_1 حداکثر یک بار زیرتقسیم می شود. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. لذا مسیری مانند $P: x_1 w_1 w_2 w_3$ در گراف G وجود دارد. در این صورت

$$f = (\{w_1, x_2, x_5\}, V(G) - \{w_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. حال نشان می دهیم $\deg(w_1) \leq 3$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. فرض کنید $\deg(w_1) \geq 4$ باشد. در این صورت

$$f = (N(w_1), V(G) - (N(w_1) \cup \{x_1\}), \emptyset, \{w_1\})$$

یک **M2RDF** برای گراف G با وزن حداکثر $n-3$ می باشد، که تناقض است. به این ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می گیریم که $G \in \{H_5, H_6, H_7\}$.

$$f = (\{y_1, x_2, x_4\}, V(G) - (\{y_1, x_1, x_2, x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}), \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. به این ترتیب نتیجه می گیریم که $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 2$. نشان می دهیم که برای هر $i = 2, 4, 5$ داریم $\deg(x_i) = 2$. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(x_2) \geq 3$. فرض کنید w مجاور x_2 باشد.

چون $g(G) = 5$ است، بنابراین w با هیچ کدام از راس های x_3, x_4, x_5 و y_1 مجاور نمی باشد. در این صورت

$$f = (\{y_1, x_3, x_5\}, V(G) - (\{y_1, y_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_2, x_4\}), \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G می باشد و از این رو $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

حال اگر $\deg(x_4) = 3$ یا $\deg(x_5) = 3$ باشد، آن گاه با توجه به بررسی قبل از **حالت ۲-۱** نتیجه می گیریم که یک **M2RDF** با وزن حداکثر $n - 3$ برای گراف G وجود دارد، که تناقض است.

با توجه به مفروضات بالا نتیجه می گیریم که $G \cong H_2$.

(ب): y_1 و y_2 مجاور نباشند. ابتدا نشان می دهیم y_1 و y_2 برگ هستند. فرض (خلف) کنید که چنین نباشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $\deg(y_1) \geq 2$ باشد. در این صورت

$$f = (\{y_1, x_2, x_5\}, V(G) - \{y_1, x_1, x_2, x_5\}, \{x_1\}, \emptyset)$$

یک **M2RDF** برای گراف G است که نتیجه می دهد $\gamma_{m2r}(G) \leq n - 3$ که تناقض است.

بنابراین برای هر $i = 1, 2$ داریم $\deg(y_i) = 1$ می باشد. به این ترتیب با توجه به مفروضات بالا نتیجه می گیریم که $G \cong H_3$.

زیر حالت ۲-۲: دو راس مجاور C_5 از درجه ۳ باشند.

فرض کنید y_1 و y_2 به ترتیب مجاورهای x_1 و x_2 باشند. نشان می دهیم y_1 و y_2 برگ هستند. فرض

York, vol. XXXIII, New York Academy of Sciences (1997), 11–13.

12. V.R. Kulli, B. Janakiram, A note on maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes of New York, vol. XXXIII, New York Academy of Sciences XXXIII (2000), 35–36.

13. D. Meierling, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, Nordhaus-Gaddum bounds on the k-rainbow domatic number of a graph, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 1758–1761.

14. S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, The k-rainbow domatic number of a graph, Discuss. Math. Graph Theory, 32 (2012), 129–140.

15. D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, Inc. (2000).

16. G. Xu, 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(n,3)$, Discrete Appl. Math., 157 (2009), 2570–2573.

فهرست منابع

1. H. Abdollahzadeh Ahangar, J. Amjadi, S.M. Sheikholeslami, D. Kuziak, Maximal 2-rainbow domination of a graph, AKCE Int. J. Graphs and combin., 13(2) (2016), 157–164.

2. H. Abdollahzadeh Ahangar, S.M. Sheikholeslami, D. Kuziak, On the maximal 2-rainbow domination of a graph, Submitted.

3. B. Brešar, M.A. Henning, D.F. Rall, Rainbow domination in graphs, Taiwanese J. Math., 12 (2008), 213–225.

4. B. Brešar, T.K. Šumenjak, On the 2-rainbow domination in graphs, Discrete Appl. Math., 155 (2007), 2394–2400.

5. G.J. Chang, J. Wu, X. Zhu, Rainbow domination on trees, Discrete Appl. Math., 158 (2010), 8–12.

6. N. Dehgardi, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, The rainbow domination subdivision numbers of graphs, Mat. Vesnik, 67 (2015), 102–114.

7. M. Falahat, S.M. Sheikholeslami, L. Volkmann, New bounds on the rainbow domination subdivision number, Filomat, 28 (2014), 615–622.

8. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater (Eds.), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc., New York (1998).

9. T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, Domination in Graphs: Advanced Topics, Marcel Dekker, Inc., New York (1998).

10. V.R. Kulli, Theory of Domination in Graphs, Vishwa International Publications (2010).

11. V.R. Kulli, B. Janakiram, The maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes of New