

یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه نقطه ضدایده‌آل

جواد وکیلی^{۱*}، حلیمه دهقانی^۲

^(۱) استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

^(۲) دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۶/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۰۸/۲۸

چکیده

محاسبه مقادیر دقیق معیار ایده‌آل و ضدایده‌آل موضوع مهمی در مسائل برنامه‌ریزی خطی چندمعیاره (MOLP) است. در واقع این مقادیر به‌عنوان کران‌های پایین و بالا روی مجموعه نقاط نامغلوب تعریف می‌شوند. هرچند تعیین نقطه ایده‌آل یک کار آسانی است، چون آن معادل با بهینه‌سازی یک تابع محدب (تابع خطی) روی یک مجموعه محدب است که یک مساله بهینه‌سازی محدب است، اما محاسبه نقطه ضدایده‌آل در MOLP با یک مساله بهینه‌سازی نامحدب معادل می‌باشد که حل آن در حالت کلی کار خیلی سختی است. در این مقاله یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای به‌دست آوردن نقطه ضدایده‌آل در مسائل MOLP ارائه می‌شود که در حالت کلی می‌تواند برای بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نقاط نامغلوب نیز به کار رود. در نهایت، به‌عنوان یک روش حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، یک مساله برنامه‌ریزی خطی مختلط- صحیح ارائه می‌شود که مقادیر دقیق ضدایده‌آل را در یک مرحله به‌دست می‌آورد.

واژه‌های کلیدی: مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، نقطه ضدایده‌آل.

۱. مقدمه

برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) یکی از مهم‌ترین و مشهورترین مسائل مورد استفاده در تصمیم‌گیری چندمعیاره است که با مساله مینیمم سازی یا ماکزیمم سازی چندین تابع خطی با حضور قیدهای مساوی و/ یا نامساوی خطی سروکار دارد. مطالعات و کاربردهای بسیاری مرتبط با این نوع مسائل وجود دارند (برای نمونه مراجع [۱، ۴، ۹، ۱۰، ۱۴، ۱۸، ۲۱، ۲۶، ۲۸] را ببینید).

جواب کارآی یک مساله MOLP جوابی است که در این جواب‌ها نمی‌توان مقدار یک تابع هدف را بدون بدتر کردن بقیه بهبود بخشید و نقاط نامغلوب نیز به‌عنوان تصویر مجموعه جواب‌های کارآ در فضای معیار تحت نگاشت تابع معیار تعریف می‌شود.

مولفه‌های نقاط ایده‌آل و ضدایده‌آل به‌عنوان کران‌های پایین و بالای نقاط نامغلوب تعریف می‌شوند و دامنه مقادیری را تعیین می‌کنند که نقاط نامغلوب می‌توانند به‌دست آورند. در واقع آنها برای نمایش تصویری نقاط نامغلوب و شرح نسبی موقعیت آنها در ناحیه شدنی مناسب هستند. همچنین از آنها می‌توان به‌عنوان نقاط مرجع در برنامه‌ریزی سازش یا در روش‌های محاوره‌ای استفاده کرد که هدف آنها پیدا کردن مرجح‌ترین جواب برای تصمیم‌گیرنده است. بنابراین، همان‌طور که ارگت و تنفلد- پودهل [۱۲] نشان دادند، در حالت کلی بهینه سازی یک تابع خطی روی مجموعه کارآ و مخصوصاً به‌دست آوردن مقادیر دقیق ایده‌آل و ضدایده‌آل می‌تواند موضوع مهمی در MOLP باشد. به‌دست آوردن مقادیر نقطه ایده‌آل کار آسانی است، چون آن معادل با بهینه سازی تعدادی مسائل برنامه‌ریزی محدب است که معمولاً جواب‌های بهینه آنها به‌راحتی به‌دست می‌آیند. با این حال به‌دست آوردن مقادیر ضدایده‌آل در حالت کلی کار خیلی مشکلی است (در واقع این مقادیر تنها در مسائل دوهدفه به‌راحتی به‌دست می‌آیند) زیرا مجموعه نقاط کارآ به‌طور صریح مشخص نیست و اغلب یک مجموعه نامحدب است. بنابراین عمل پیدا کردن نقطه ضدایده‌آل در گروه حل تعدادی مسائل برنامه‌ریزی نامحدب است و در واقع این کار در اکثر موارد به‌جای بهینه سراسری به بهینه موضعی منجر می‌شود (کورهنون و همکاران [۱۷]).

روش‌های بسیاری برای تعیین نقطه ضدایده‌آل در MOLP وجود دارد (به‌عنوان مثال مراجع [۸۶، ۲۰، ۳] را ببینید). یکی از آنها روش ریوز و رید [۲۲] است که برای به‌دست آوردن این نقطه از مقادیر جدول دادوستد استفاده می‌کند. اما به‌دلیل وجود مشکلات محاسبه مقادیر دقیق ضدایده‌آل، مقادیر به‌دست آمده از جدول دادوستد، اغلب تخمینی از مقادیر ضدایده‌آل هستند و در واقع این مقادیر ممکن است نامفهوم باشند و مقادیر ضدایده‌آل را زیاد یا کم برآورد کنند [۱۱].

همچنین به‌عنوان یک روش دیگر، می‌توان به مقاله ایزرمن و استور [۱۵] اشاره کرد که ایشان سه روش را برای محاسبه مقادیر دقیق ضدایده‌آل یک مساله MOLP ارائه کردند. روش اول از کدنویسی یک مساله ماکزیمم- بردار برای محاسبه همه نقاط کارآی راسی استفاده می‌کند که محاسبات سختی دارد. روش دوم یک مساله برنامه‌ریزی شدنی دوگان- اولیه بزرگ را با قیدهای غیرخطی حل می‌کند. روش سوم یک روند مبتنی بر روش سیمپلکس است که از این موضوع که همه نقاط کارآی راسی توسط مسیرهای یال‌های کارآ به‌هم وصل هستند، بهره گرفته است. با توجه به‌نظر محققان نتیجه گرفته می‌شود که روش سوم علی‌رغم به‌صرفه نبودن از نظر اقتصادی، تنها روش کارآ از نظر عملی می‌باشد.

پیدا کردن مقادیر معیار ضدایده‌آل یک حالت خاصی از مسائل بهینه‌سازی یک تابع روی مجموعه جواب‌های کارآ می‌باشد. روش‌هایی وجود دارند که یک تابع را روی مجموعه کارآ بهینه می‌کنند که این روش‌ها برای تعیین نقاط ضدایده‌آل نیز قابل استفاده می‌باشند (برای نمونه مراجع [۴، ۱۳، ۱۶، ۲۷، ۲] را مشاهده فرمایید). اگرچه این روش‌ها نیز فقط از نظر علمی (ارگت و تنفلد- پودهل [۱۲]) برای محاسبه مقادیر ضدایده‌آل مناسب هستند و معمولاً آنها نیز ساختار پیچیده‌ای دارند (کورهنون و همکاران [۱۷]). بنابراین اکثر روش‌های بالا که برای به‌دست آوردن نقاط ضدایده‌آل در نظر گرفته می‌شوند، اغلب دو مشکل اساسی دارند. ۱) آنها معمولاً مقادیر ضدایده‌آل را تخمین می‌زنند و می‌توانند مقدار دقیق آنها را به‌دست آورند. ۲) اغلب روش‌ها محاسبات سختی دارند.

سلسله مراتبی هستند در جهتی که قسمتی از قیدهای آن توسط یک مساله برنامه‌ریزی خطی دیگر تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی به صورت مسایل بهینه‌سازی ریاضی هستند که مجموعه همه متغیرها بین دو بردار γ و x افزاز می‌شوند و γ یک جواب بهینه انتخابی از مساله بهینه‌سازی دوم برای پارامتر x می‌باشد. در حالت کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی می‌تواند به صورت زیر تعریف شود.

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} c^t x + d^t y \\ & \text{s.t. } A_1 x + B_1 y \leq b_1 \\ & \max_y e^t y \\ & \text{s.t. } A_2 x + B_2 y \leq b_2, \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $c, x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $d, e, y \in \mathbb{R}^{n_2}$, A_1 یک ماتریس $m_1 \times n_1$, B_1 یک ماتریس $m_1 \times n_2$, A_2 یک ماتریس $m_2 \times n_1$ و B_2 یک ماتریس $m_2 \times n_2$ هستند. در مساله (۱)، مساله

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} c^t x + d^t y \\ & \text{s.t. } A_1 x + B_1 y \leq b_1 \\ & \max_y e^t y \\ & \text{s.t. } A_2 x + B_2 y \leq b_2 \end{aligned}$$

مساله سطح بالایی یا مساله رهبر نامیده می‌شود و مساله بهینه‌سازی دوم

بخش‌های بعدی مورد نیاز خواهید شد. به عنوان مساله سطح پایینی یا مساله پیرو در نظر گرفته می‌شود. حال تعریف زیر را برای جواب‌های شدنی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی بیان می‌کنیم که در بخش‌های بعدی مورد نیاز خواهید شد.

تعریف ۱. (x, y) یک جواب شدنی برای مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۱) است هرگاه اگر γ یک جواب بهینه برای مساله سطح پایینی متناظر با پارامتر x باشد به طوری که

$$A_1 x + B_1 y \leq b_1.$$

همچنین باید ذکر شود که الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی وجود دارد، برای

در این مقاله، در حالت کلی یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب ارائه می‌شود که در حالت خاص مقادیر دقیق ضدايده‌آل را نیز در یک مرحله می‌تواند به دست آورد. این روش از چند نظر حایز اهمیت هست. (۱) این روش مشکل اشاره شده اول بالا را ندارد و مقادیر ضدايده‌آل را به صورت دقیق به دست می‌آورد. (۲) ارتباطی بین مباحث برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برقرار می‌کند. (۳) ممکن است بتوان از بعضی روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای حل مساله استفاده کرد که در زمان کمتری منجر به جواب می‌شود. (۴) این روش در حالت کلی می‌تواند برای بهینه‌سازی یک تابع هدف کلی روی مجموعه نقاط نیز به کار برده شود. (۵) مساله برنامه‌ریزی دو سطحی ارائه شده در این مقاله با اندکی تغییر می‌تواند نقطه ضدايده‌آل را برای هر نوع تابع هدف و قیود نیز به دست آورد. معمولاً حل این مسائل در حالت خطی‌پذیری تابع هدف و قیود ساده است که به عنوان مثال، در آخر این مقاله به عنوان یکی از روش‌های حل مسایل بهینه‌سازی خطی دو سطحی در جهت خطی‌سازی، یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط ارائه می‌شود که مقادیر دقیق ضدايده‌آل را در یک مرحله به دست می‌آورد.

این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است:

بخش ۲ شامل بعضی مفاهیم مورد استفاده در این مقاله در مورد MOLP و برنامه‌ریزی خطی دوسطحی است. بخش ۳ شامل بحث اصلی و نتایج مقاله است و در آخر این بخش برای واضح‌تر شدن بحث مثالی ارائه خواهد شد. بخش ۴ هم که شامل نتیجه‌گیری این مطالب است.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش، ابتدا مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی معرفی می‌شود و سپس بعضی تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد استفاده در این مقاله بازنویسی می‌شوند.

۲-۱- مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی

در این زیربخش مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی بحث می‌شود. این نوع از مسائل بهینه‌سازی به صورت

داده می‌شود و تصویر آن در فضای معیار مجموعه نامغلوب نامیده می‌شود و با Y_N نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر،

$$X_E = \{\bar{x} \in X \mid \exists x \in X; Cx \leq \bar{C}x, Cx \neq \bar{C}x\}$$

9

$$Y_N = \{Cx \mid x \in X_E\}.$$

حال جواب‌های کارا و نامغلوب ضعیف به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۳. $\bar{x} \in X$ یک جواب کارای مساله (۲) نامیده می‌شود هرگاه اگر هیچ $x \in X$ ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Cx < \bar{C}x$$

اگر \bar{x} یک جواب کارای ضعیف باشد، آنگاه $\bar{y} = C\bar{x}$ یک نقطه نامغلوب ضعیف نامیده می‌شود. مجموعه همه جواب‌های کارای ضعیف مساله (۲) مجموعه کارای ضعیف نامیده می‌شود و با X_{WE} نمایش داده می‌شود و تصویر آن در فضای معیار مجموعه نامغلوب ضعیف نامیده می‌شود و با Y_{WN} نمایش داده می‌شود. به عبارت دیگر،

$$X_{WE} = \{\bar{x} \in X \mid \exists x \in X; Cx < \bar{C}x\}$$

9

$$Y_{WN} = \{Cx \mid x \in X_{WE}\}.$$

با در نظر گرفتن تعاریف بالا واضح است که $X_E \subseteq X_{WE}$ و $Y_N \subseteq Y_{WN}$ با توجه به تعاریف ۲ و ۳، قضیه‌های زیر بدیهی هستند و بنابراین آنها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

در واقع دو قضیه زیر مشخصاتی را برای نقاط نامغلوب و نقاط نامغلوب ضعیف ارائه می‌دهند و در بخش بعدی برای ارائه مسائل دوسطحی برای بهینه‌سازی یک تابع روی نقاط کارا (نامغلوب) موردنیاز خواهند بود.

قضیه ۱. نقطه $\bar{y} \in Y$ یک نقطه نامغلوب است اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله (۳) صفر باشد.

$$\max 1^t s$$

$$\text{s.t. } \bar{y} - s \in Y \quad (3)$$

$$s \geq 0,$$

نمونه: الگوریتم‌های شمارشی (جستجو در رئوس مجموعه شدنی، جستجوی نامساوی‌های فعال)، الگوریتم کاهش، روش‌های تابع جریمه و بهینه‌سازی سراسری ([۲۵، ۲۴، ۲۳، ۱۹، ۷، ۵]).

۲-۲- مسائل برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP)

مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه (MOLP) در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \min c_1^t x \\ \min c_2^t x \\ \vdots \\ \min c_p^t x \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

$$x \geq 0,$$

که $b \in \mathbb{R}^m$ و $x \in \mathbb{R}^n$ ، $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}^n$ توجه کنید که در این مقاله همه بردارها به صورت بردار ستونی فرض می‌شوند و با حروف کوچک انگلیسی و به صورت پررنگ نوشته می‌شوند.

با فرض اینکه $X = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ ناحیه شدنی (مجموعه شدنی) مساله MOLP (۲) در فضای تصمیم باشد، $Y = \{Cx \mid x \in X\}$ به عنوان مجموعه شدنی مساله MOLP (۲) در فضای معیار در نظر گرفته می‌شود که تصویر مجموعه شدنی x تحت نگاشت تابع هدف در فضای معیار است و C یک ماتریس $p \times n$ است که سطر i ام آن بردار سطری c_i^t است. جواب‌های کارا و کارای ضعیف و نقاط نامغلوب و نقاط نامغلوب ضعیف برای مساله (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲. $\bar{x} \in X$ یک جواب کارای مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود هرگاه اگر هیچ $x \in X$ ای وجود نداشته باشد به طوری که

$$Cx \leq \bar{C}x, Cx \neq \bar{C}x$$

اگر \bar{x} یک جواب کارا باشد، آنگاه $\bar{y} = C\bar{x}$ یک نقطه نامغلوب نامیده می‌شود. مجموعه همه جواب‌های کارای مساله (۲) مجموعه کارا نامیده می‌شود و با X_E نمایش

$$y_k^N = \max y_k$$

$$\text{s.t. } y \in Y_N$$

برای $k=1,2,\dots,p$ ، نقطه ضدایده‌ال مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود.

همان‌طور که به راحتی می‌توان نشان داد، برای به دست آوردن مولفه k ام نقطه ایده‌ال، می‌توان مساله برنامه‌ریزی خطی

$$y_k^I = \min y_k$$

$$\text{s.t. } y \in Y$$

را حل کرد که یک مساله برنامه‌ریزی خطی است. ولی این بحث برای نقطه ضدایده‌ال درست نیست. یعنی، درست نیست که

$$y_k^N = \max y_k$$

$$\text{s.t. } y \in Y.$$

واضح است که

$$y_k^I \leq y_k \leq y_k^N, k=1,2,\dots,p$$

برای هر $y \in Y_N$.

چون نقطه ایده‌ال از حل p مساله بهینه‌سازی خطی به دست می‌آید، لذا محاسبات آن آسان می‌باشد. با این حال، چون برای محاسبه y^N با ماکزیم‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه کاراً سر و کار داریم که به طور صریح مشخص نیست و معمولاً یک مجموعه نامحدب می‌باشد، لذا محاسبه نقطه ضدایده‌ال یک مساله سختی است و معمولاً هیچ روش کارآیی برای تعیین y^N در MOLP شناخته شده نیست و به دلیل وجود مشکلات ناشی از محاسبه y^N ، اغلب روش‌های ابتکاری مورد استفاده قرار می‌گیرد یا روش‌های موجود معمولاً به صورت دقیق این نقطه را نمی‌توانند به دست بیاورند و فقط تقریبی از آن را ارائه می‌دهند. در ادامه سعی می‌کنیم یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی را برای محاسبه مولفه‌های نقطه ضدایده‌ال ارائه کنیم. بنابراین، هر چند همه روش‌های حل این نوع مسائل می‌تواند در به دست آوردن نقطه ضدایده‌ال مورد استفاده قرار گیرند، ولی به عنوان یکی از روش‌های حل این مسائل، تبدیل آن به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط، در جهت

که در آن $1_p \in \mathbb{R}^p$ یک بردار ستونی با همه مولفه‌های

$$\text{مساوی ۱ است و } s \text{ بردار ستونی } s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{pmatrix} \text{ می‌باشد.}$$

برهان. با در نظر گرفتن تعاریف نقاط نامغلوب اثبات بدیهی است.

برای نقاط نامغلوب ضعیف، قضیه مشابه زیر را داریم.

قضیه ۲. نقطه $\bar{y} \in Y$ یک نقطه نامغلوب ضعیف است اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله (۴) صفر باشد.

$$\max s$$

$$\text{s.t. } \bar{y} - s1_p \in Y \quad (۴)$$

$$s \geq 0,$$

که در آن s یک اسکالر می‌باشد.

برهان. مشابه با قضیه قبل اثبات این نیز بدیهی می‌باشد.

در بخش بعدی نتایج اصلی مقاله را ارائه خواهیم کرد، به عبارت دیگر مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به منظور بهینه‌سازی یک تابع خطی کلی روی مجموعه نامغلوب (ضعیف) پیشنهاد داده خواهد شد و بنابراین با استفاده از این مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، در حالت خاص، نقاط ضدایده‌ال نیز به راحتی می‌توانند به دست آیند.

حال، نقاط ایده‌ال و ضدایده‌ال را به عنوان کران‌های پایین و بالا روی نقاط نامغلوب به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.

۱. نقطه $y^I = (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)$ که در آن

$$y_k^I = \min y_k$$

$$\text{s.t. } y \in Y_N$$

برای $k=1,2,\dots,p$ ، نقطه ایده‌ال مساله MOLP (۲) نامیده می‌شود (توجه کنید که y_k مولفه k ام y می‌باشد).

۲. نقطه $y^N = (y_1^N, y_2^N, \dots, y_p^N)$ که در آن

گرفته می‌شود. برای این منظور قضیه زیر را در نظر بگیرید.

قضیه ۳. فرض کنید M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ باشد. در این صورت مقدار بهینه مساله (۵) با مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر برابر است.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}, \mathbf{s}} \quad & \mathbf{c}'\mathbf{y} - M\mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \\ & \max_{\mathbf{s}} \quad \mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{y} - \mathbf{s} \in \mathbf{Y} \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6)$$

توجه کنید که در مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۶)، مجموعه همه متغیرها بین بردارهای \mathbf{s} و \mathbf{y} افزاز شده‌اند به طوری که \mathbf{s} به عنوان جواب بهینه مساله بهینه‌سازی سطح پایینی پارامترسازی شده در \mathbf{y} انتخاب می‌شود. به عبارت دیگر، (\mathbf{y}, \mathbf{s}) یک جواب شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۶) است هرگاه اگر \mathbf{s} جواب بهینه مساله سطح پایینی متناظر با پارامتر $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ باشد.

اثبات: فرض کنید که

$$\begin{aligned} Z_1 = \max_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}'\mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_N \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} Z_2 = \max_{\mathbf{y}, \mathbf{s}} \quad & \mathbf{c}'\mathbf{y} - M\mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \\ & \max_{\mathbf{s}} \quad \mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{y} - \mathbf{s} \in \mathbf{Y} \\ & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

اولاً واضح است که اگر مساله (۷) نشدنی باشد، آنگاه مساله (۸) نیز نشدنی است و برعکس. همچنین به راحتی می‌توان نشان داد که اگر مساله (۷) مقدار بهینه نامتناهی داشته باشد، آنگاه مساله (۸) نیز مقدار بهینه نامتناهی دارد و بالعکس.

خطی‌پذیری قیود و تابع هدف می‌باشد که در انتها به آن اشاره می‌شود.

۳. مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه نقطه ضدایده‌آل

بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب یک موضوع خیلی مهمی در MOLP می‌باشد که معمولاً کار ساده‌ای نیست، چون آن معادل با یک یا چند مساله بهینه‌سازی غیرمحدب است. در این بخش، ابتدا در حالت کلی در مورد بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب یک مساله MOLP بحث می‌شود و سپس این بحث در حالت خاص برای پیدا کردن نقاط نامغلوب مطرح می‌شود. در واقع به منظور انجام این، ابتدا یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی ارائه می‌شود که هرچند همه الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی در حالت کلی می‌توانند برای حل مسائل بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب مورد استفاده قرار گیرند، با این حال در ادامه، به عنوان یک روش حل، چگونگی تبدیل این مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط برای تعیین نقطه ضدایده‌آل بررسی می‌شود.

برای این منظور مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید که هدف از حل آن بهینه‌سازی یک تابع خطی روی مجموعه نامغلوب می‌باشد.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{c}'\mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_N \end{aligned} \quad (5)$$

همان‌طور که در قضیه ۱ بیان شد، برای چک کردن $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_N$ می‌توانیم مدل (۳) را به عنوان مساله سطح پایینی به جای قید $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_N$ در مساله (۵) درج کنیم و یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی به وجود آوریم. البته شایان ذکر است برای اینکه مساله سطح پایینی تنها نقاط کارا را برای مساله سطح بالایی برگرداند، باید شرایطی اعمال شود که به ازای نقاطی که از مساله سطح بالایی برای چک کردن کارایی به مساله سطح پایینی داده می‌شود مقدار $s=0$ لحاظ شود، که بدین منظور یک جریمه خیلی بزرگ در تابع هدف سطح بالایی در نظر

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^t \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{WN} \end{aligned} \quad (9)$$

همان‌طور که در قضیه ۳ بیان شد، برای چک کردن $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{WN}$ می‌توانیم مدل (۴) را به‌عنوان مساله سطح پایینی به‌جای قید $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}_{WN}$ در مساله (۹) درج کنیم که مجدداً یک مساله برنامه‌ریزی خطی دو سطحی به‌وجود می‌آید. به‌عبارت دیگر، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۴. فرض کنید M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ باشد. در این‌صورت مقدار بهینه مساله (۹) با مقدار بهینه مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی زیر برابر است.

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}, s} \quad & \mathbf{c}^t \mathbf{y} - M(s) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{y} \in \mathbf{Y} \\ & \max_s s \\ & \text{s.t. } \mathbf{y} - \mathbf{1}_p s \in \mathbf{Y} \\ & s \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

توجه کنید که در مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی (۱۰)، s یک اسکالر است.

با در نظر گرفتن قضیه ۳، در حالت کلی می‌توانیم مدل (۸)، که یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی است را برای بهینه کردن تابع $\mathbf{c}^t \mathbf{y}$ روی مجموعه نامغلوب مساله MOLP (۲) حل کنیم. حال اگر بخواهیم مقدار i امین مولفه نقطه ضدایده‌ال (y_i^N) را به‌دست آوریم، در مساله (۶)، $\mathbf{c} = \mathbf{e}_i$ را در نظر می‌گیریم که \mathbf{e}_i ، i امین بردار مختصات (یک بردار که همه مولفه‌های آن صفر می‌باشد به‌جز مولفه i ام که یک است) می‌باشد. بنابراین داریم،

چون \mathbf{Y}_N یک مجموعه بسته می‌باشد و تابع هدف مساله (۷) پیوسته است، لذا اگر این مساله جواب بهینه داشته باشد، آنگاه آن به \mathbf{Y}_N متعلق است. فرض کنید که \mathbf{y}^* یک جواب بهینه مساله (۷) باشد. به خاطر نامغلوب بودن نقطه \mathbf{y}^* ، $\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}$ و مقدار بهینه مساله سطح پایینی مساله (۸) صفر است. لذا $(\mathbf{y}^*, \mathbf{0})$ یک جواب شدنی برای مساله (۸) است که مقدار هدف آن برابر است با

$$Z_2(\mathbf{y}^*, \mathbf{0}) = \mathbf{c}^t \mathbf{y}^*.$$

آنگاه،

$$Z_1 = Z_2(\mathbf{y}^*, \mathbf{0}) \leq Z_2.$$

حال کافی است ثابت کنیم که $1 \leq Z_2$ به‌منظور اثبات این، ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*)$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد، آنگاه $\mathbf{s}^* = \mathbf{0}$. برای این منظور، فرض کنید که $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*)$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد، ولی $\mathbf{s}^* \neq \mathbf{0}$. واضح است که $\mathbf{y}^* \in \mathbf{Y}$ و $(\mathbf{y}^* + \mathbf{s}^*, \mathbf{0})$ یک جواب شدنی دیگر برای مساله (۸) است. از سوی دیگر، چون M یک عدد حقیقی مثبت خیلی بزرگ می‌باشد، آنگاه

$$Z_2(\mathbf{y}^* + \mathbf{s}^*, \mathbf{0}) > Z_2(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*),$$

که با بهینگی $(\mathbf{y}^*, \mathbf{s}^*)$ در تناقض است. حال برای کامل کردن اثبات، باید نشان داده شود $1 \leq Z_2$. به‌منظور انجام این، فرض کنید که $(\mathbf{y}^*, \mathbf{0})$ یک جواب بهینه مساله (۸) باشد. چون مقدار بهینه متغیر \mathbf{s}^* صفر است، لذا \mathbf{y}^* یک نقطه نامغلوب است که متعلق به \mathbf{Y}_N است. بنابراین، \mathbf{y}^* یک نقطه شدنی مساله (۷) است، که نتیجه می‌دهد

$$Z_2 = \mathbf{c}^t \mathbf{y}^* = Z_2(\mathbf{y}^*, \mathbf{0}) = Z_1(\mathbf{y}^*) \leq Z_1.$$

با توجه به اینکه قبلاً نشان داده شد که $1 \leq Z_2$ ، لذا هر دو مساله (۷) و (۸) مقدار بهینه یکسان دارند و بدین‌صورت اثبات کامل می‌شود.

حال اگر بحث بالا را برای نقاط نامغلوب ضعیف در نظر بگیریم، به‌عبارت دیگر اگر مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیریم،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^t &\geq \mathbf{1}_p^t \\ (\mathbf{v}^t \mathbf{C} + \mathbf{w}^t \mathbf{A}) \mathbf{x}' &= 0 \\ (\mathbf{v}^t - \mathbf{1}_p^t) \mathbf{s} &= 0 \\ \mathbf{w}^t (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}') &= 0 \\ \mathbf{x}' \geq 0, \mathbf{s} \geq 0, \mathbf{w} &\geq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

چندین روش برای رفتار با شرایط مکمل زاید وجود دارد که یکی از آنها روش استفاده از متغیرهای ۱-۰ برای تبدیل آنها به شرایط خطی است که در زیر خلاصه خواهد شد.

فرض کنید $K > 0$ یک عدد ثابت به اندازه کافی بزرگ باشد. بنابراین شرایط

$$\mathbf{v}^t \mathbf{C} + \mathbf{w}^t \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{x}' \geq 0, (\mathbf{v}^t \mathbf{C} + \mathbf{w}^t \mathbf{A}) \mathbf{x}' = 0$$

و

$$\mathbf{v}^t \geq \mathbf{1}_p^t, \mathbf{s} \geq 0, (\mathbf{v}^t - \mathbf{1}_p^t) \mathbf{s} = 0$$

و

$$\mathbf{w} \geq 0, \mathbf{A} \mathbf{x}' \leq \mathbf{b}, \mathbf{w}^t (\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}') = 0$$

به ترتیب با

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{v}^t \mathbf{C} + \mathbf{w}^t \mathbf{A} \leq K \mathbf{p}, \mathbf{0} \leq \mathbf{x}' \leq K (\mathbf{1}_n - \mathbf{p}),$$

$$p_j \in \{0,1\}, j = 1, 2, \dots, n$$

و

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{v}^t - \mathbf{1}_p^t \leq K \mathbf{q}, \mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq K (\mathbf{1}_p - \mathbf{q}),$$

$$q_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, p$$

و

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{w} \leq K \mathbf{t}, \mathbf{0} \leq \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}' \leq K (\mathbf{1}_m - \mathbf{t}),$$

$$t_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, m$$

معادل هستند. همچنین با در نظر گرفتن اثبات قضیه ۳، در بهینگی مساله (۱۲) $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ می‌باشند. بنابراین با توجه به تغییر متغیرهای بالا، مساله (۱۲) معادل با یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط ۱-۰ است. در ادامه، به منظور واضح شدن بحث، مثالی را ارائه می‌دهیم.

مثال: مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید (صفحه ۳۵ مرجع [۱۱] را ببینید).

$$\begin{aligned} y_i^N &= \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{s}} y_i - M \mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ \text{s.t. } \mathbf{C} \mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \max_{\mathbf{x}', \mathbf{s}} \mathbf{1}_p^t \mathbf{s} & \\ \text{s.t. } \mathbf{C} \mathbf{x}' &= \mathbf{y} - \mathbf{s} \\ \mathbf{A} \mathbf{x}' &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x}' &\geq 0, \mathbf{s} \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد مسائل برنامه‌ریزی دوسطحی ارتباط نزدیکی با مسائل دیگر در برنامه‌ریزی ریاضی دارد. همانند: برنامه‌ریزی خطی چندمعیاره (چندهدفه)، برنامه‌ریزی صحیح-مختلط ۱-۰ و مساله تابع جریمه. بنابراین الگوریتم‌های مختلفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی دو سطحی وجود دارد، برای نمونه: الگوریتم شمارشی (جستجو با بردارهای مجموعه شدنی و جستجو برای فعال کردن نامساوی‌ها)، الگوریتم کاهشی، روش‌های تابع جریمه و بهینه‌سازی سراسری ([۱۹، ۷۵]). در این بخش به‌عنوان یکی از روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی، چگونگی تبدیل مساله (۱۱) به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین‌صورت که اگر متغیرهای \mathbf{y} را برای مساله سطح پایین ثابت در نظر بگیریم و دوگان مساله سطح پایین را بنویسیم و همچنین شرایط KKT را برای هر دو مساله سطح پایینی و دوگان آن بنویسیم، در این‌صورت مساله برنامه‌ریزی خطی (۱۱) با مساله تک سطحی زیر در حضور قیدهای مکمل معادل است.

$$\begin{aligned} y_i^N &= \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{s}} y_i - M \mathbf{1}_p^t \mathbf{s} \\ \text{s.t. } \mathbf{C} \mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{x}' &= \mathbf{y} - \mathbf{s} \\ \mathbf{A} \mathbf{x}' &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{v}^t \mathbf{C} + \mathbf{w}^t \mathbf{A} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
 &y_1 = -11x_2' - 11x_3' - 12x_4' - 9x_5' - 9x_6' + 9x_7' + s_1 \\
 &y_2 = -11x_1' - 11x_3' - 9x_4' - 12x_5' - 9x_6' + 9x_7' + s_2 \\
 &y_3 = -11x_1' - 11x_2' - 9x_4' - 9x_5' - 12x_6' - 12x_7' + s_3 \\
 &x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' = 1 \\
 &0 \leq -11v_2 - 11v_3 + w \leq K p_1 \\
 &0 \leq -11v_1 - 11v_3 + w \leq K p_2 \\
 &0 \leq -11v_1 - 11v_2 + w \leq K p_3 \\
 &0 \leq -12v_1 - 9v_2 - 9v_3 + w \leq K p_4 \\
 &0 \leq -9v_1 - 12v_2 - 9v_3 + w \leq K p_5 \\
 &0 \leq -9v_1 - 9v_2 - 12v_3 + w \leq K p_6 \\
 &0 \leq 9v_1 + 9v_2 - 12v_3 + w \leq K p_7 \\
 &v_1 \geq 1, v_2 \geq 1, v_3 \geq 1 \\
 &0 \leq x_1' \leq K(1-p_1) \\
 &0 \leq x_2' \leq K(1-p_2) \\
 &0 \leq x_3' \leq K(1-p_3) \\
 &0 \leq x_4' \leq K(1-p_4) \\
 &0 \leq x_5' \leq K(1-p_5) \\
 &0 \leq x_6' \leq K(1-p_6) \\
 &0 \leq x_7' \leq K(1-p_7) \\
 &p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 \in (0,1).
 \end{aligned}$$

با حل مساله برنامه‌ریزی خطی بالا، مولفه اول دقیق نقطه ضدایده‌آل به دست می‌آید که مقدار عددی آن صفر می‌باشد. برای مولفه‌های بعدی هم با در نظر گرفتن بحث مشابه، مقدار عددی صفر به دست می‌آید. به عبارت دیگر، با روش ارایه شده در این مقاله مقادیر دقیق نقطه ضدایده‌آل به دست می‌آید.

نتیجه گیری

در حالی که محاسبه مقادیر دقیق نقاط ضدایده‌آل کارآسانی نیست، ولی یک موضوع خیلی مهمی در مسائل MOLP است. در این مقاله یک مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه مقادیر نقاط ضدایده‌آل ارائه شد

$$\begin{aligned}
 &\text{Min } -11x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 9x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &\text{Min } -11x_1 - 11x_3 - 9x_4 - 12x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &\text{Min } -11x_1 - 11x_2 - 9x_4 - 9x_5 - 12x_6 - 12x_7 \quad (13) \\
 &\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
 \end{aligned}$$

با توجه به این مثال، همان‌طور که در صفحه ۳۵ مرجع [۱۱] نشان داده شده است، نقطه ضد ایده‌آل برای این مساله عبارت است از

$$\begin{aligned}
 &N \\
 &y = (0, 0, 0).
 \end{aligned}$$

حال با در نظر گرفتن مباحث بالا، مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای به دست آوردن نقطه ضد ایده‌آل مساله (۱۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned}
 &\text{Max } y_1 - M(s_1 + s_2 + s_3) \\
 &\text{s.t. } y_1 = -11x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 9x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &y_2 = -11x_1 - 11x_3 - 9x_4 - 12x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &y_3 = -11x_1 - 11x_2 - 9x_4 - 9x_5 - 12x_6 - 12x_7 \\
 &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \\
 &\text{Max } s_1 + s_2 + s_3 \\
 &\text{s.t. } y_1 - s_1 = -11x_2' - 11x_3' - 12x_4' - 9x_5' - 9x_6' + 9x_7' \\
 &y_2 - s_2 = -11x_1' - 11x_3' - 9x_4' - 12x_5' - 9x_6' + 9x_7' \\
 &y_3 - s_3 = -11x_1' - 11x_2' - 9x_4' - 9x_5' - 12x_6' - 12x_7' \\
 &x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' + x_6' + x_7' = 1 \\
 &x_1', x_2', x_3', x_4', x_5', x_6', x_7' \geq 0
 \end{aligned}$$

به عنوان یکی از روش‌های حل مساله برنامه‌ریزی خطی دو سطحی، آن می‌تواند به یک مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح-مختلط به صورت زیر تبدیل شود که در آن K یک عدد حقیقی بسیار بزرگ می‌باشد.

$$\begin{aligned}
 &\text{Max } y_1 \\
 &\text{s.t. } y_1 = -11x_2 - 11x_3 - 12x_4 - 9x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &y_2 = -11x_1 - 11x_3 - 9x_4 - 12x_5 - 9x_6 + 9x_7 \\
 &y_3 = -11x_1 - 11x_2 - 9x_4 - 9x_5 - 12x_6 - 12x_7
 \end{aligned}$$

که می‌تواند در هر دو حالت مجموعه شدنی محدب و نامحدب به کار گرفته شود. بنابراین همه الگوریتم‌ها و روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی دوسطحی می‌تواند در به دست آوردن مقادیر دقیق نقاط ضدایده‌آل در MOLP مورد استفاده قرار گیرد.

- [8] Dessouky, M. I., Ghiassi, M., Davis, W. J., (1986). Estimates of the minimum nondominated criterion values in multiple-criteria decision-making. *Engineering Costs and Production Economics*, 10, 95-104.
- [9] Dyer, J.S., Fishburn, P. C., Steuer, R. E., Wallenius, J., Zionts, S., (1992). Multiple criterion decision making, multi attribute utility theory: The next ten years. *Management Science*, 38, 645-654.
- [10] Ecker, J. G., Hegner, N. S., Kouada, I. A., (1980). Generating all maximal efficient faces for multiple objective linear programs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 30, 353-381.
- [11] Ehrgott, M., (2005). *Multicriteria optimization*. Springer, Second Edition, Berlin, Germany.
- [12] Ehrgott, M., Tenfelde-Podehl, D., (2003). Computation of ideal and nadir values and implications for their use in MCDM methods. *European Journal of Operational Research*, 151, 119-139.
- [13] Horst, R., Thoai, N. V., Yamamoto, Y., Zenke, D., (2007). On optimization over the efficient set in linear multi criteria programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 134, 433-443.
- [14] Isermann, H., (1977). The enumeration of the set of all efficient solutions for a linear multiple objective program. *Operational Research Quarterly*, 28, 711-725.
- [15] Isermann, H., Steuer, R. E., (1987). Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion
- [1] Armand, P., Malivert, C., (1991). Determination of the efficient set in multiobjective linear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 70, 467-489.
- [2] Benson, H. P., (1984). Optimization over the efficient set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98, 562-580.
- [3] Benson, H. P., Lee, D., McClure, J. P., (1998). Global optimization in practice: An application to interactive multiple objective linear programming. *Journal of Global Optimization*, 12, 353-372.
- [4] Benson, H. P., Sun, E., (2002). A weight set decomposition algorithm for finding all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear program. *European Journal of Operational Research*, 139, 26-41.
- [5] Calvete, H. I., Gale', C., Mateo, P. M., (2008). A new approach for solving linear bilevel problems using genetic algorithms. *European Journal of Operational Research*, 188, 14-28.
- [6] Deb, K., Chaudhuri, S., Miettinen, K., (2006). Towards estimating nadir objective vector using evolutionary approaches. In: Keijzer, M. et al. (Eds.), 2006 Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO2006), Seattle, Washington, USA, 1, 643-650.
- [7] Dempe, S., (2002). *Foundations of Bilevel Programming*. Kluwer Academic Publishers.

European Journal of Operational Research, 36, 334-338.

[23] Shi, C., Lu, J., Zhang, G., (2005). An extended Kuhn-Tucker approach for linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 162, 51-63.

[24] Shi, C., Lu, J., Zhang, G., Zhou, H., (2006). An extended branch and bound algorithm for linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 180, 529-537.

[25] Shi, C., Zhou, H., Lu, J., Zhang, G., Zhang, Z., (2007). The Kth-best approach for linear bilevel multi follower programming with partial shared variables among followers. Applied Mathematics and Computation, 188, 1686-1698.

[26] Tu, T. V., (2000). Optimization over the efficient set of a parametric multiple objective linear programming problem. European Journal of Operational Research, 122, 570-583.

[27] Yamamoto, Y., (2002). Optimization over the efficient set: Overview. Journal of Global Optimization, 22, 285-317.

[28] Yan, H., Wei, J., (2005). Constructing efficient solutions structure of multiobjective linear programming. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 307, 504-523.

values over the efficient set. European Journal of Operational Research, 33, 91-97.

[16] Jorge, J. M., (2005). A bilinear algorithm for optimizing a linear function over the efficient set of a multiple objective linear programming problem. Journal of Global Optimization, 31, 1-6.

[17] Korhonen, P., Salo, S., Steuer, R. E., (1997). A heuristic method for estimating nadir criterion values in multiple objective linear programming. Operations Research, 45, 751-757.

[18] Leschine, T. M., Wallenius, H., Verdini, W. A. (1992). Interactive multiobjective analysis and assimilative capacity based ocean disposal decision. European Journal of Operational Research, 56, 278-289.

[19] Lv, Y., Hu, T., Wang, G., Wan, Z., (2007). A penalty function method based on Kuhn-Tucker condition for solving linear bilevel programming. Applied Mathematics and Computation, 188, 808-813.

[20] Metev, B., Vassilev, V., (2003). A Method for Nadir Point Estimation in MOLP Problems. Cybernetics and Information Technologies, 3, 15-24.

[21] Pourkarimi, L., Zarepisheh, M., (2007). A dual-based algorithm for solving lexicographic multiple objective programs. European Journal of Operational Research, 176, 1348-1356.

[22] Reeves, G. R., Reid, R. C., (1988). Minimum values over the efficient set in multiple objective decision making.