دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دوم، شماره هشتم، زمستان ۱۳۹۵
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۹۶

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# برآورد نیمه‌پارامتری کالاهای استراتژیک (قیمت نفت اوپک)

رحمان فرنوش[۱*]، مهتاب حاجبی[۲]

(۱) دانشیار دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده‌ی ریاضی، تهران، ایران
(۲) دانشجوی دکترای دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده‌ی ریاضی، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۰۸/۰۱    تاریخ پذیرش مقاله: ۹۵/۱۱/۲۸

**چکیده**

در اقتصاد جهانی، نفت خام از جمله مهم‌ترین کالاهای استراتژیکی محسوب می‌شود که تاثیر به سزایی بر عملکرد بازارهای منطقه‌ای و بین‌المللی دارد. پیش‌بینی قیمت نفت در جهان همواره بحث مهم و چالش برانگیزی در اقتصاد جهانی بوده است و تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان آن همواره در تلاش بوده‌اند نقش خود را در تغییر قیمت نفت افزایش دهند و اوپک نیز سال‌هاست که یکی از بازیگران این عرصه‌ی اقتصادی شده است. نفت به‌عنوان یکی از مهمترین منابع تأمین مالی بودجه‌ی کشورهای عضو اوپک محسوب مـی‌شـود. نوسانات قیمت نفت، یکی از عوامل اصلی بسیاری از بحران‌های اقتصادی در میان این کشـورها می‌باشد. با استفاده از مدل‌های آماری می‌توان عملکرد پیش‌بینی قیمت نفت را به صورت چشم‌گیری بهبود بخشید و نتایجی با خطای کم‌تر و دقت بیش‌تر به‌دست آورد. از این‌رو، در این مقاله از مدل اتورگرسیو خطی جزئی با روش براورد نیمه‌پارامتری، برای پیش‌بینی قیمت نفت استفاده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** روش نیمه‌پارامتری، مدل اتورگرسیو خطی جزئی، براورد حداکثر درستنمایی، قیمت نفت اوپک.

عهده‌دار مکاتبات:
*. Email: rfarnoosh@iust.ac.ir

## ۱. مقدمه

در دهه ۸۰ میلادی، قیمت‌گذاری نفت خام که از جمله مهم‌ترین متغیرهای کلیدی است، توسط اوپک (سازمان کشورهای صادرکننده نفت) انجام می‌گرفت. در این سال‌ها، اکثر کشورهای عضو اوپک که تولیدکنندگان عمده‌ی نفت خام جهان بودند، بر بالا رفتن قیمت نفت اصرار داشتند، در حالی‌که بالا رفتن قیمت نفت به ضرر اکثریت کشورهای غربی بود و با توجه به عدم امکان جایگزینی نفت به‌عنوان یک کالای استراتژیک و وابسته بودن اقتصاد این کشورها به نفت، استراتژی عملکرد بازارهای مالی بین المللی این کشورها همواره توسط قیمت نفت تهدید می‌شد. بی‌ثباتی قیمت‌های نفت عکس‌العمل منفی بر اقتصاد کلان کشورهای واردکننده‌ی نفت دارد و یک شوک افزایش قیمت نفت به‌عنوان یک شوک منفی عرضه، منحنی عرضه‌ی کل اقتصاد را به سمت عقب و چپ شیفت می‌دهد. بنابراین، هم افزایش در سطح قیمت‌ها و هم یک کاهش در محصول و اشتغال را به‌وجود می‌آورد[۲].

در پی شوک نفتی در دهه‌ی ۱۹۷۰، مطالعات بسیاری در زمینه‌ی ارتباط قیمت نفت و فعالیت‌های اقتصادی صورت گرفته است. نخستین مطالعه در این زمینه توسط[۸] انجام شده است. وی اظهار داشت که شوک قیمت نفت یکی از عوامل رکود اقتصادی در کشورها بوده است، به طوری‌که افزایش قیمت نفت باعث کاهش تولید ناخالص ملی در کشور می‌شود. این مطالعه مبنای بسیاری از مطالعات در رابطه با تاثیر شوک نفتی بر متغیرهای کلان اقتصادی قرار گرفت[۱۴]. شوک‌های نفتی ناشی از تغییرات قیمت نفت می‌تواند اثرات متفاوتی بر اقتصاد کشورهای عضو اوپک داشته باشند و علت آن‌را می‌توان در تفاوت زیرساخت‌های بخش‌های اقتصادی، سیاسی هر جامعه و یا در درجه‌ی وابستگی بودجه‌ی آن کشور به درآمدهای ارزی حاصل از فروش نفت و یا در سیستم پرداخت مالیاتی آن کشورها جستجو نمود[۱].

به‌دلیل این‌که نفت یک عامل تولید در بیشتر بخش‌ها و صنایع است، افزایش در قیمت‌های نفت، هزینه‌ی تولید شرکت‌ها را افزایش داده و در نتیجه باعث کاهش در محصول کشورهای واردکننده‌ی نفت می‌شود[۱۰]. با افزایش قیمت نفت، یک انتقال درآمد از کشورهای واردکننده‌ی نفت به کشورهای صادرکننده صورت می‌گیرد. بنابراین، مصرف در کشورهای واردکننده‌ی نفت کاهش می‌یابد. از طرفی، هرگونه کاهش در قیمت نفت تبعاتی منفی بر اقتصاد کشورهای صادرکننده‌ی نفت ازجمله کشور ما به‌عنوان دومین تولیدکننده‌ی اوپک دارد. همچنین، علاوه بر تأثیراتی که تغییر در قیمت نفت خام از طریق عرضه و تقاضا به همراه دارد، به واسطه‌ی تورم و نرخ ارز نیز بر اقتصاد تأثیر می‌گذارد. تجزیه و تحلیل ارتباط میان تغییر در قیمت انرژی و اقتصاد تا حدی پیچیده است. انرژی به ویژه نفت، نیروی محرکه‌ی هر فعالیت اقتصادی و تولیدی است، بنابراین جایگاه ویژه‌ای در رشد و توسعه‌ی اقتصادی دارد[۳]. از این‌رو، پیش بینی قیمت نفت نه تنها نقش مهمی در سیاست دولت‌ها ایفا می‌کند، بلکه بر بهینه‌سازی میزان تولید و بهبود اقتصاد در کشور نیز بسیار موثر است. کشورهای عضو اوپک اغلب جزء کشورهای در حال توسعه می‌باشند. بنابراین، شاخص‌های اقتصادی استفاده شده در مدل‌های پیش‌بینی در این کشورها حتی در شرایط بلندمدت نیز به علت ساختار اقتصادی ناپایدار این کشورها با نوسانات زیادی همراه است و این بی‌ثباتی اقتصادی از دقت پیش بینی قیمت نفت توسط این مدل‌ها می‌کاهد و همین امر در بلندمدت منجر به بروز بی‌ثباتی در سیاست‌گذاری‌های اقتصادی این کشورها می‌گردد. لذا، پیش‌بینی قیمت نفت در کوتاه‌مدت در صورت صحیح بودن، می‌تواند تاثیرات نامطلوب وقوع رویدادهای سیاسی و اقتصادی را در سطح بین‌الملل بکاهد[۱].

با استفاده از مدل‌های آماری می‌توان عملکرد پیش‌بینی قیمت نفت را به صورت چشم‌گیری بهبود بخشید و نتایجی با خطای کم‌تر و دقت بیش‌تر به‌دست آورد. از این‌رو، در این مقاله از مدل اتورگرسیو خطی جزئی با استفاده از روش براورد نیمه‌پارامتری، برای پیش‌بینی قیمت نفت اوپک استفاده شده است. روش‌های نیمه پارامتری برای براورد توابع مجهول در مدل‌های اتورگرسیو با خطای مستقل و یا خطای وابسته می‌باشند که موجب افزایش دقت در پیش‌بینی داده‌های زمانی غیرخطی می‌شود. همچنین، روش نیمه‌پارامتری

پیشنهادی در این پژوهش، که از ترکیب برآورد پارامترها و تابع تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری به‌وجود می‌آید، براوردگر کاراتری را ارائه خواهد نمود. [۱۱] یک رویکرد نیمه پارامتری برای پیش‌بینی کوتاه مدت قیمت نفت پیشنهاد کرد و نشان داد که چگونه می‌توان از خاصیت ناهمگنی مشروط خودرگرسیو تعمیم‌یافته از تغییرات قیمت نفت، برای پیش‌بینی توزیع قیمت نفت در افق‌های کوتاه‌مدت بهره گرفت. [۷] نیز با استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی به پیش‌بینی قیمت نفت پرداخته‌اند. با توجه به وجود پدیده‌ی غیرخطی بودن فرآیند حاکم بر سری زمانی قیمت، می‌توان انتظار داشت که مدل‌های غیرخطی و یا خطی جزئی (نظیر مدل‌های اتورگرسیو) به پیش‌بینی بهتری منجر شود. الگوی امروزه‌ی بازارهای مالی جهانی اغلب الگوها و مدل‌های غیرخطی هستند و اقتصاددانان به‌طور چشمگیری از این روش‌ها استفاده می‌کنند[۴]. [۵]، مدل‌های سری زمانی اتورگرسیو با خطای وابسته را مورد بررسی قرار داده‌اند. [۱۲]، یک روش نیمه‌پارامتری برای مدل سری زمانی اتورگرسیو غیرخطی را ارائه داده‌اند. همچنین، مدل‌های سری زمانی اتورگرسیو با خطای مستقل از مقادیر اولیه‌ی مشاهدات زمانی، در سال ۲۰۱۴ در مقاله‌ی[۶] مورد مطالعه قرار گرفته است.

هدف از این تحقیق نیز پیش‌بینی قیمت نفت اوپک به عنوان یک کالای استراتژیک با استفاده از روش برآورد نیمه‌پارامتری در مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل می‌باشد. در راستای هدف مزبور بر مبنای داده‌های ماهیانه (دوره زمانی ۲۰۱۶– ۲۰۱۰) پارامترهای یک مدل سری زمانی خطی جزئی با خطاهای مستقل براورد شده‌اند.

ساختار مقاله‌ی حاضر بدین صورت شکل می‌گیرد: در بخش دوم، به براورد پارامترها با استفاده از روش حداکثر درستنمایی پرداخته و سپس با استفاده از کرنل ناپارامتری، تابع رگرسیونی غیرخطی مدل براورد می‌شود. همچنین، در این بخش از تعدیل کننده‌ی ناپارامتری برای بهبود مدل استفاده و سپس با استفاده از روش برازش درجه‌ی دوم، تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برآورد می‌شود. بخش سوم، مطالعه‌ی شبیه‌سازی عملکرد برآورد نیمه‌پارامتری مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس در این بخش، کاربردی تجربی به منظور نشان دادن کفایت متدولوژی این پژوهش، برای پیش‌بینی قیمت نفت اوپک از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶ مورد بررسی قرار گرفته شده است. در نهایت، بخش چهارم به خلاصه و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

## ۲. براورد نیمه‌پارامتری در مدل اتورگرسیو غیرخطی با خطای مستقل

در این قسمت، براوردگر نیمه‌پارامتری که ترکیبی از روش پارامتری (روش حداکثر درستنمایی برای براورد پارامترهای تابع رگرسیون مدل سری زمانی) وروش ناپارامتری (روش براورد هسته هموار) می‌باشد، مطرح می‌گردد.

در ابتدا، مدل اتورگرسیو جزئی خطی مرتبه‌ی اول با خطای مستقل به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$y_t = \alpha y_{t-1} + f(y_{t-2}) + \varepsilon_t, \quad t = 2,3,\dots,n, |\alpha| < 1, \qquad (۱-۱)$$

به‌طوریکه، تابع رگرسیون $f(0)$ یک تابع اتورگرسیو غیرخطی نامعلوم و خطاهای $\varepsilon_t$ متغیرهای تصادفی از هم مستقل، هم توزیع و دارای میانگین صفر و واریانس $\sigma^2$ می‌باشند. همچنین $\varepsilon_t$ و $y_{t-1}$، $y_{t-2}$ برای هر $t$ مستقل می‌باشند. .همچنین $\alpha$ پارامتر نامعلوم می‌باشد.

به‌طور سنتی، رویکردی پارامتری و ناپارامتری برای براورد تابع اتورگرسیو $f(0)$ می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بدین منظور که اگر اطلاعاتی از تجربیات قبلی وجود داشته باشد و تحلیل تحت ساختار قبلی شکل گیرد، می‌توان فرض کرد که تابع رگرسیونی مربوط به مدل اتورگرسیو غیرخطی یک چارچوب پارامتری به‌صورت مدل پارامتری زیر دارد:

$$f(x)\epsilon\{g(x,\gamma),\ \ \gamma\epsilon\Gamma\}$$

در صورتی‌که $\Gamma\epsilon R^p$ فضای پارامتری است.

در این پژوهش، $g(x,\gamma)$ را بسط تیلور تابع نامعلوم $f(x)$ حول نقطه‌ی $c_0$ به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$g(y_{t-1},\gamma) = f(c_0) + f'(c_0)(y_{t-1} - c_0) + \frac{1}{2} f''(c_0)(y_{t-1} - c_0)^2, \qquad (۱-۲)$$

که در آن $\gamma$ برداری از پارامترهای نامعلوم با بعد $(3 \times 1)$

به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma=\left(f(c_0),f'(c_0),\tfrac{1}{2}f''(c_0)\right). \qquad (۱-۳)$$

فرض کنید مشاهدات $y_1,y_2,\dots,y_n$ از مدل (۱-۱) تولید می‌شوند. به‌منظور سادگی و قرار دادن تمام مشاهدات در یک مدل فشرده، ابتدا متغیرهای تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$Y_{(n-1)\times 1}=(y_2,y_3,\dots,y_n)^T, \qquad (۱-۴)$$

$$\Theta=(\gamma,\alpha)^T=\left(f(c_0),f'(c_0),\tfrac{1}{2}f''(c_0),\alpha\right)^T, \qquad (۱-۵)$$

$$X_{t-1}=(1,(y_{t-2}-c_0),(y_{t-2}-c_0)^2,y_{t-1})^T, \qquad (۱-۶)$$

$$X_{(n-1)\times 4}=(X_1,\dots,X_{n-1})^T, \qquad (۱-۷)$$

$$E_{(n-1)\times 1}=(\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n)^T \qquad (۱-۸)$$

با استفاده از متغیرهای تعریف شده، تابع اتورگرسیو خطی جزئی در رابطه‌ی (۱-۱) را می‌توان به‌صورت مدل خطی زیر در نظر گرفت:

$$Y=X\Theta+E. \qquad (۱-۹)$$

بردار پارامتر $\Theta$ در مدل (۹-۱)، با استفاده از روش حداکثر درستنمایی به‌صورت زیر براورد می‌شود:

فرض کنید $E$ در مدل (۹-۱) دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $\Sigma$ می‌باشد. بنابراین، $Y$ در رابطه‌ی (۹-۱) دارای توزیع نرمال با میانگین $X\Theta$ و واریانس $\Sigma$ می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $Y\sim N(X\Theta,\Sigma)$:

بنابراین، تابع لگ-درست نمایی مدل (۹-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ln L(\Theta,\Sigma\,|X,Y)=-\frac{n}{2}\ln(2\Pi)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma| -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,[\Sigma^{-1}(Y-X\Theta)^T(Y-X\Theta)]= -\frac{n}{2}\ln(2\Pi)-\frac{n}{2}\ln|\Sigma|-\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma^{-1}Y^TY]+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma^{-1}Y^TX\Theta]+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma^{-1}\Theta'X'Y]- \frac{1}{2}\mathrm{tr}[\Sigma^{-1}\Theta'X'X\Theta] \qquad (۱-۱۰)$$

مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع لگ-درستنمایی نسبت به پارامترهای مدل یعنی $\Theta,\Sigma$، به‌ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial\ln L(\Theta,\Sigma\,|x,Y)}{\partial\Theta}=\Sigma^{-1}\mathbf{X}^TY-\Sigma^{-1}X'X\Theta,$$

$$\frac{\partial\ln L(\Theta,\Sigma\,|x,Y)}{\partial\Sigma}=-\frac{1}{2}[n\Sigma-(Y-X\Theta)^T(Y-X\Theta)].$$

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع لگ-درستنمایی نسبت به پارامترهای مدل یعنی $\Theta,\Sigma$، برآوردهای حداکثر درستنمایی به‌ترتیب، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\widehat{\Theta}=(X'X)^{-1}X'Y, \qquad (۱-۱۱)$$

$$\widehat{\Sigma}=\frac{1}{n}(Y-X\widehat{\Theta})^T(Y-X\widehat{\Theta}).$$

[۵]، پیشنهاد یک فرم نیمه‌پارامتری به‌صورت $g(x,\gamma)\xi(x)$ برای تابع اتورگرسیو نامعلوم $f(0)$ داده‌اند که به‌منظور بهبود براورد از عامل تعدیل‌کننده‌ی $\xi(x)$ در آن استفاده شده است. بنابراین، یک روش ترکیبی پارامتری و تعدیل‌کننده‌ی ناپارامتری برای براورد تابع رگرسیون مدل (۱-۱) پیشنهاد داده شده که به براورد نیمه‌پارامتری معروف است.

بنابراین، در این قسمت به براورد عامل تعدیل‌کننده‌ی $\xi(x)$ در رابطه‌ی $f\,(x)=g(x,\hat{\gamma})\xi(x)$ می‌پردازیم.

با استفاده از ایده‌ی مشابه[۵]، [۹] و [۱۳] معیار برازش چند جمله‌ای درجه‌ی دوم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x,\xi)= 1/h_n\sum_{j=1}^{n}k\left(\frac{y_{j-1}-x}{h_n}\right)\{f(y_{j-1})-g(y_{j-1},\hat{\gamma}_n)\xi\}^2,$$

چنانچه $k(0)$ یک تابع کرنل و $h_n$ پهنای باند می‌باشد که بستگی به تعداد حجم نمونه ($n$) دارد.

برآوردگر$\hat{\xi}(x)$ از$\xi(x)$ به‌وسیله‌ی حداقل کردن معیار برازش درجه‌ی دوم فوق نسبت به$\xi(x)$ به‌دست می‌آید. بنابراین یک براوردگر ناپارامتری$\xi(x)$ به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$\hat{\xi}(x)=\frac{\sum_{j=1}^{n}[k\left(\frac{y_{j-1}-x}{h_n}\right)g(y_{j-1},\hat{\gamma}_n)f(y_{j-1})]}{\sum_{j=1}^{n}[k\left(\frac{y_{j-1}-x}{h_n}\right)g^2(y_{j-1},\hat{\gamma}_n)]}.$$

آنگاه براوردگر $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{f}(x) = g(x, \hat{\gamma})\hat{\xi}(x). \quad (۱-۱۲)$$

فرمول $\hat{\xi}(x)$ شامل تابع نامعلوم $f(0)$ می‌باشد. بنابراین در شبیه‌سازی کاربرد عملی ندارد. لذا، بااستفاده از رابطه‌ی

$$\varepsilon_t = y_t - \alpha y_{t-1} - f(y_{t-2}),$$

و با توجه به این مطلب که خطاهای مدل مقادیر کوچکی هستند[۵] و [۶]، می‌توان رابطه‌ی زیر را در نظر گرفت:

$$\sum_{j=2}^{n}[k\left(\frac{y_{j-2}-x}{h_n}\right)g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n)f(y_{j-2})] \approx \sum_{j=2}^{n}[k\left(\frac{y_{j-2}-x}{h_n}\right)g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n)(y_j - \hat{\alpha}y_{j-1})],$$

و در نتیجه رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{\xi}(x) = \frac{\sum_{j=2}^{n}[k\left(\frac{y_{j-2}-x}{h_n}\right)g(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n)(y_j - \hat{\alpha}y_{j-1})]}{\sum_{j=2}^{n}[k\left(\frac{y_{j-2}-x}{h_n}\right)g^2(y_{j-2}, \hat{\gamma}_n)]},$$

و در نهایت، براوردگر نیمه‌پارامتری تابع رگرسیون به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\tilde{f}(x) = g(x, \hat{\gamma})\tilde{\xi}(x), \quad (۱-۱۳)$$

در رابطه‌ی فوق، هیچ مقدار نامعلوم در براورد تابع $f(x)$ که به‌صورت $\tilde{f}(x)$ معرفی شده است وجود ندارد. بنابراین، برای براورد تابع اتورگرسیون خطی جزئی که می‌توان آن‌را با استفاده از اطلاعات نمونه‌ای و شبیه‌سازی داده‌ها به‌دست آورد، روی $\tilde{f}(x)$ متمرکز می‌شویم.

[۶]، خواص سازگاری براوردگر نیمه‌پارامتری را با استفاده از قضایا اثبات کرده‌اند. آن‌ها در مقاله‌ی خود نشان داده‌اند که اگر $\hat{f}(x)$ براوردگر نیمه‌پارامتری تعریف شده در رابطه‌ی (۱-۱۲) و $\tilde{f}(x)$ نیز براوردگر نیمه‌پارامتری تعریف شده در رابطه‌ی (۱-۱۳) باشد، آنگاه وقتی $n$ به سمت بی‌نهایت میل کند، روابط زیر برقرار می‌باشند:

$$\hat{f}(x) \xrightarrow{p} f(x),$$
$$\tilde{f}(x) - \hat{f}(x) \xrightarrow{p} 0.$$

## ۳. مطالعات شبیه‌سازی و کاربرد تجربی

کارایی براورد نیمه‌پارامتری در مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل، با دو دیدگاه در این پژوهش مورد توجه واقع شده است. در ابتدا، با استفاده از شبیه‌سازی توابع غیرخطی معلوم، به بررسی خطای براورد نیمه پارامتری توابع غیرخطی مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی پرداخته شده است. سپس، در مطالعات کاربردی، با استفاده از داده‌های واقعی که شامل داده‌های تعیین قیمت نفت اوپک بوده است، به‌کار گرفته شده است.

### ۳-۱. مطالعات شبیه‌سازی

در این قسمت، عملکرد برآورد نیمه‌پارامتری برای مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با خطاهای مستقل، با استفاده از محیط نرم‌افزار متلب، مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، با استفاده از مدل اتورگرسیو خطی جزئی زیر به تعداد ۴۰۰ مشاهده به‌صورت $y_0, y_1, \dots, y_{399}$ تولید می‌شود:

$$y_t = 0.43y_{t-1} + f(y_{t-2}) + \varepsilon_t,$$

به‌طوریکه خطاهای $\varepsilon_t$ مستقل و هم توزیع و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(0.125)^2$ می‌باشند.

در این مطالعه، شبیه‌سازی عملکرد براورد نیمه‌پارامتری برای مدل‌های اتورگرسیو خطی جزئی با در نظر گرفتن دو تابع زیر، برای اندازه نمونه‌ی $n$=400,600,800 مورد ارزیابی قرار می‌گیرند:

$$f_1(x) = 5e^{-x},$$
$$f_2(x) = e^{-3x^2} + \cos(2x).$$

به‌منظور ارزیابی کارایی مدل اتورگرسیو خطی جزئی با خطای مستقل، میانگین مربعات خطا (MSE) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\tilde{f}(x_i) - f(x_i)\}^2.$$

ریشه‌ی MSE، به‌صورت RMSE نامگذاری می‌شود.

در این‌جا، تابع کرنل به‌صورت تابع گوسی و پهنای باند ($h_n$) نیز به نسبت $\lambda n^{-0.2}$ (رجوع شود به[۶]) در نظر گرفته می‌شوند. لذا مقدار $\tilde{f}(x_i)$ در $x_i$ با توجه به انتخاب $h_n$، محاسبه می‌شود.

جدول‌های ۱- ۱ و ۲-۱، نشان دهنده‌ی شاخص‌های توصیفی برای داده‌های شبیه‌سازی شده و خطاها در مدل‌های ذکر شده‌ی فوق می‌باشند. همچنین، در این جدول‌ها، آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برای آزمون نرمالیتی خطاهای مدل اتورگرسیو محاسبه شده است. آماره‌ی آزمون سطح معنی داری یا به عبارتی دیگر، نرمالیتی خطاهای مدل را تایید می‌کنند. همچنین، MSE و RMSE دو مدل فوق در جدول‌های ۳-۱ و ۴-۱ آورده شده است. شبیه‌سازی داده‌ها با ۵۰۰ تکرار انجام شده است.

**جدول ۱-۱. شاخص‌های توصیفی شبیه‌سازی خطای تابع $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ ، λ =۰،۴.**

| var | n | Min | Max | Mean | std | K-Smirnov |
|---|---|---|---|---|---|---|
| data | 400 | 0.0161 | 3.9285 | 1.8576 | 0.9791 | 0.9823 |
| data | 600 | -0.0675 | 3.9595 | 1.8434 | 0.9382 | 0.9878 |
| data | 800 | -0.0782 | 4.0594 | 1.8219 | 0.9431 | 0.9789 |
| error | 400 | -0.3673 | 0.4417 | -0.0084 | 0.1336 | 0.0704 |
| error | 600 | -0.3347 | 0.4776 | 0.0005 | 0.1254 | 0.0275 |
| error | 800 | -0.3586 | 0.4776 | 0.0028 | 0.1284 | 0.0214 |

**جدول ۲-۱. شاخص‌های توصیفی شبیه‌سازی خطای تابع $f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ ، λ =۰،۴.**

| var | N | Min | Max | Mean | std | K-Smirnov |
|---|---|---|---|---|---|---|
| data | 400 | -0.1766 | 10.9998 | 1.2342 | 1.2570 | 0.8666 |
| data | 600 | -0.1283 | 8.7010 | 1.1645 | 1.1293 | 0.8830 |
| data | 800 | -0.1723 | 10.7472 | 1.1734 | 1.1395 | 0.8643 |
| error | 400 | -0.2976 | 0.3682 | -0.0038 | 0.1250 | 0.0486 |
| error | 600 | -0.3673 | 0.4417 | -0.0075 | 0.1312 | 0.0659 |
| error | 800 | -0.3673 | 0.4417 | -0.0045 | 0.1301 | 0.0427 |

**جدول ۳-۱. MSE(RMSE) برآورد تابع $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ ، λ =۰،۴.**

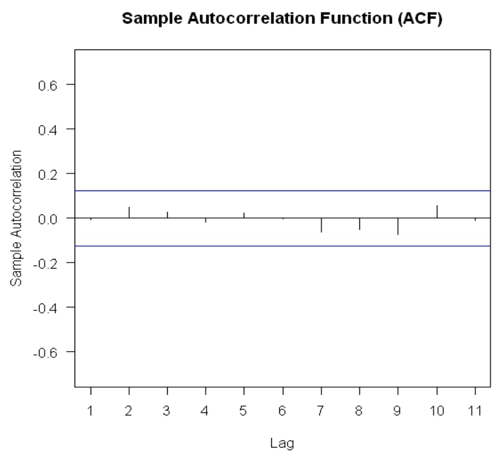
| n | $\hat{\gamma}$ | $\hat{\alpha}$ | MSE (std) | RMSE |
|---|---|---|---|---|
| 400 | (1.35,-0.76,-0.11) | 0.32 | 0.1226 (0.0606) | 0.3501 |
| 600 | (1.35,-0.79,-0.07) | 0.3 | 0.1499 (0.0537) | 0.3872 |
| 800 | (1.35,-0.81,-0.05) | 0.29 | 0.1729 (0.0495) | 0.4159 |

**جدول ۴-۱. MSE(RMSE) برآورد تابع $f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ ، λ =۰،۴.**

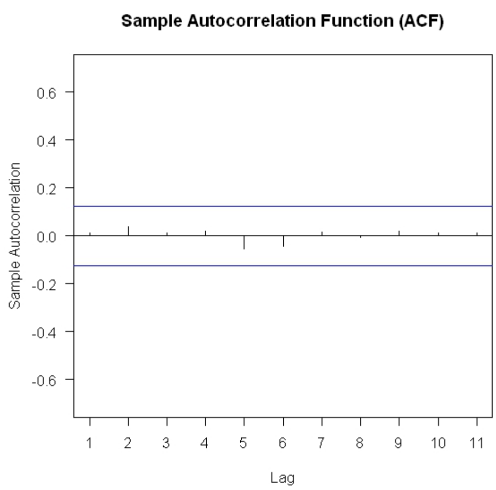
| n | $\hat{\gamma}$ | $\hat{\alpha}$ | MSE (std) | RMSE |
|---|---|---|---|---|
| 400 | (0.42, -0.90,0.14) | 0.47 | 0.1266 (0.0605) | 0.3559 |
| 600 | (0.44, -0.88,0.14) | 0.46 | 0.1069(0.0513) | 0.3270 |
| 800 | (0.45, -0.87,0.13) | 0.46 | 0.0993 (0.0505) | 0.3151 |

شکل‌های(۶-۱)- (۱-۱)، نمودار تابع خودهمبستگی (ACF) خطاهای دو مدل فوق الذکر را تحت $\lambda$های مختلف نشان می‌دهند. با توجه به شکل‌ها، خطاهای هر دو مدل در تاخیرهای مختلف از یک تا ۱۵، دارای ناهمبستگی هستند و این مطلب یکی از گام‌های مهم کفایت مدل را تایید می‌کند. همچنین، منحنی تابع $f(x)$ و براورد نیمه‌پارامتری آن با خطای مستقل درنمودار های (۴-۱) و (۵-۱) آمده است. خط آبی تابع رگرسیون $f(x)$ و خط قرمز تابع براورد نیمه‌پارامتری آن را نشان می‌دهد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که مدل پیشنهادی از دقت و کارایی بیشتری برخوردار است.

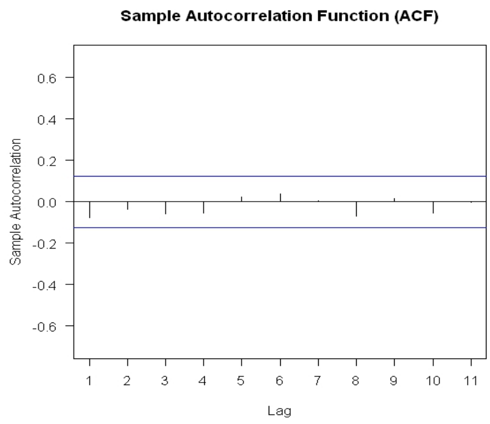
**نمودار ۱-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی $f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ و n=60, $\lambda$=0.13**



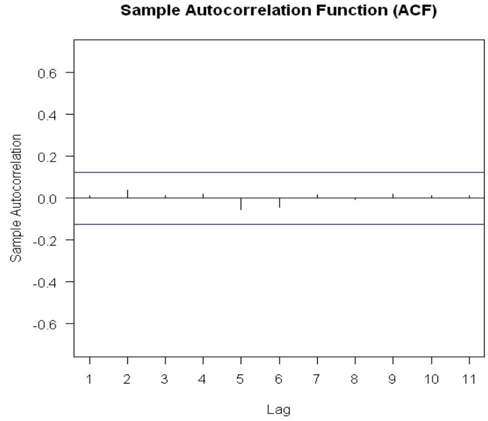

**نمودار ۲-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی $f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ و n=600, $\lambda$=0.26.**



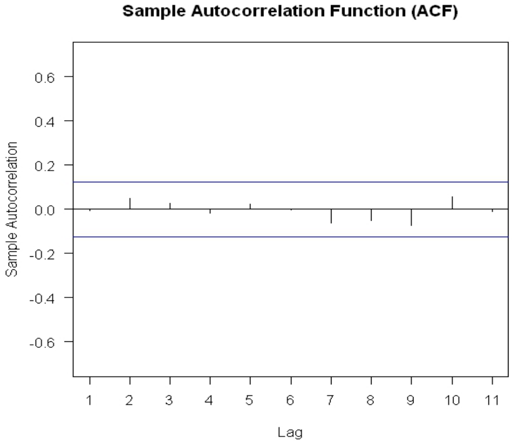
نمودار ۳-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی $f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ و n=600, $\lambda =$۰،۴.




نمودار ۴-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ و n=600, $\lambda =0.13$.

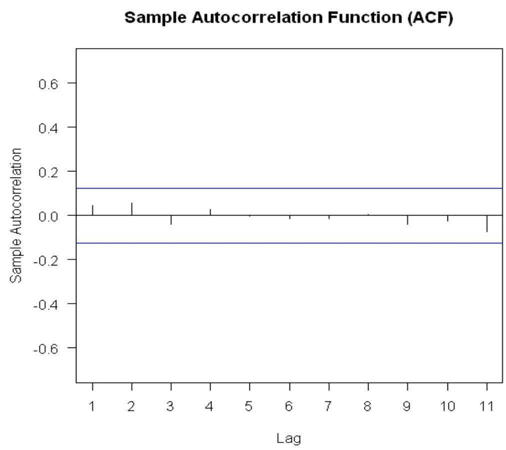



نمودار ۵-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به برآورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی $f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ و n=600, $\lambda =0.26$.

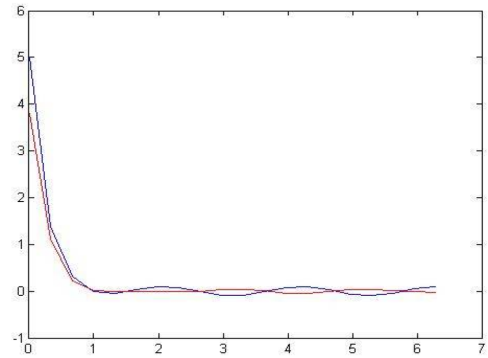


نمودارهای (۷-۱) و (۸-۱)، منحنی تابع $f(x)$ و برآوردگر نیمه‌پارامتری آنرا نشان می‌دهند. هر دو نمودار بیانگر کفایت براورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی، بر اساس مدل شبیه‌سازی شده می‌باشند.

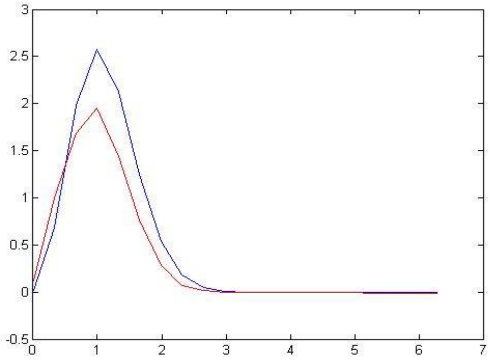
**نمودار ۶-۱. ACF خطاهای مدل اتورگرسیو مربوط به براورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی**
**$f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ و n=600, λ =0.4**




**نمودار ۷-۱. نمودار منحنی $f(x)$ و براورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی**
**$f(x) = 5e^{-4x}+0.1\cos(3x)$ درمدل اتورگرسیو با خطای مستقل, n=600, λ =0.4**



**نمودار ۸-۱. نمودار منحنی $f(x)$ و براورد نیمه‌پارامتری تابع غیرخطی**
**$f(x) = 7x^2e^{-x^2}$ در مدل اتورگرسیو با خطای مستقل, n=600, λ =0.4.**



## ۲-۳. کاربرد تجربی

به‌منظور بررسی کفایت روش این پژوهش، از مدل اتورگرسیو خطی جزئی برای پیش بینی سالانه‌ی قیمت نفت اوپک از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶ استفاده شده است. در این راستا، مشاهدات به‌صورت $y_t^* = (y_t - y_{t-1})/y_{t-1}$ در نظر گرفته شده‌اند، به‌طوری‌که $y_t$ قیمت نفت اوپک در زمان $t$ است. با استفاده از روش نیمه‌پارامتری ارائه شده، تابع رگرسیون در مدل اتورگرسیو با خطای مستقل جهت پیش‌بینی قیمت نفت اوپک در زمان $t$ براورد شده است. مجموعه‌ی داده‌ها از سایت رسمی www.opec.org استخراج شده‌اند. نتایج این بررسی در جدول ۵-۱، آورده شده است. جدول ۶-۱، شاخص‌های توصیفی خطاهای قیمت نفت اوپک را نشان می‌دهند که در آن خطاهای مدل مستقل می‌باشند.

نمودار ۹-۱، ACF خطاهای براورد مدل اتورگرسیو خطی جزئی را نشان می‌دهد. در نهایت، نمودار ۱۰-۱، منحنی مشاهدات و برآورد آن‌ها به روش نیمه‌پارامتری را نشان می‌دهد.

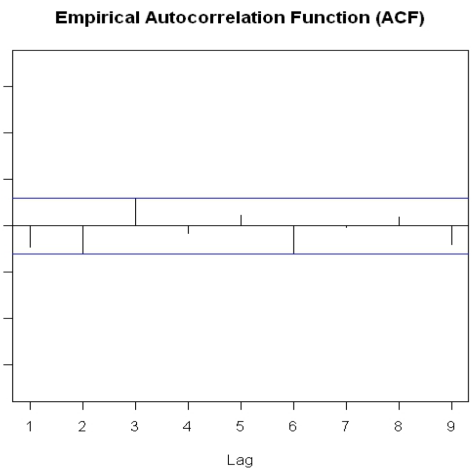
**جدول ۵-۱. MSE(RMSE) برآورد تابع رگرسیون برای داده‌های قیمت نفت اوپک، از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶.**

| n | $\hat{\gamma}$ | $\hat{\alpha}$ | MSE | RMSE |
|---|---|---|---|---|
| 71 | (-0.017,0.069,1.695) | 0.26 | 0.013 | 0.115 |

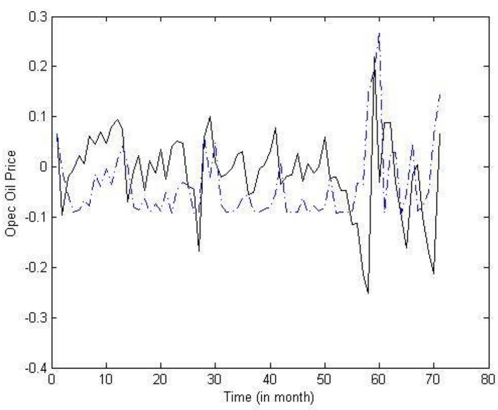
**جدول ۶-۱. شاخص‌های توصیفی خطاهای قیمت نفت اوپک، از سال ۲۰۱۰ تا سال ۲۰۱۶.**

| var | n | Min | Max | Mean | std | Sum |
|---|---|---|---|---|---|---|
| data | 71 | -0.25 | 0.21 | -0.010 | 0.08 | -0.75 |
| error | ۷۱ | -0.35 | 0.11 | 0.004 | 0.07 | 0.28 |

**نمودار ۹-۱. ACF خطاهای برآورد قیمت نفت اوپک.**




**نمودار ۱۰-۱. منحنی مشاهدات واقعی و برآورد آن‌ها.**



## نتیجه‌گیری

مدل اتورگرسیو خطی جزئی در اقتصاد سنجی، مطالعات مالی، علوم آماری و مدل‌های زیست محیطی کاربرد فراوان دارد. دراین پژوهش، یک روش جدید نیمه پارامتری برای براورد تابع اتورگرسیو غیرخطی در یک مدل اتورگرسیو خطی جزئی ارائه شده است. از آنجا که روش‌های پارامتری در برآورد تابع رگرسیون نمی‌توانند در این‌گونه مدل‌ها خیلی کارا باشند، ترکیبی از فرم پارامتری با به‌کارگیری بسط تیلور و توابع غیرخطی استفاده شده است. به‌منظور بررسی دقت مدل پیشنهادی از معیار میانگین مربعات خطاها (MSE) و جذر آن (RMSE) استفاده شده است. همچنین، تابع خودهمبستگی (ACF) خطاهای مدل اتورگرسیو خطی جزئی در مدل تجربی بیانگر این مطلب هستند که خطاهای مدل ناهمبسته می‌باشند. نتایج این مطالعه نشان می‌دهد که براورد نیمه پارامتری در مدل اتورگرسیو خطی جزئی با خطاهای مستقل بهتر عمل می‌کند و دارای دقت و کارایی نسبتاً بالایی می‌باشد.

## فهرست منابع


[۱] جوانمرد، حبیب اله و فقیدیان، سیده فاطمه (۱۳۹۳). پیش‌بینی قیمت نفت خام اوپک با به‌کارگیری مدل پیش‌بینی خاکستری. فصلنامه‌ی مدلسازی اقتصادی، ۸ (۲۷): ۱۱۴-۹۱.

[۲] رودیگر، دورنبوش و استانلی، فیشر (۱۳۷۸)، اقتصاد کلان، ترجمه‌ی محمدحسین تیزهوش تابان، تهران: انتشارات سروش، چاپ سوم.

[۳] شهبازی، کیومرث، اصغرپور، حسین و محرم زاده، کریم (۱۳۹۱) تاثیر فرآورده‌های نفتی بر رشد اقتصادی در استان‌های کشور. فصلنامه‌ی مدلسازی اقتصادی، ۶ (۱۷): ۴۴-۲۵.

[۴] مکیان، سیدنظام الدین و موسوی، سید فاطمه السادات (۱۳۹۱). پیش‌بینی قیمت سهام شرکت فرآورده‌های نفتی پارس با استفاده ازشبکه‌ی عصبی و روش رگرسیونی. فصلنامه‌ی مدلسازی اقتصادی، ۶ (۱۸): ۱۲۱-۱۰۵

[5] Farnoosh, R. and Mortazavi, S.J. (2011), "A semiparametric method for estimating nonlinear autoregressive model with dependent errors", Nonlinear Analysis, 6358-6370.

[6] Farnoosh, R., Hajebi, M. and Mortazavi, S.J. (2014), "A semiparametric estimation for regression functions in the partially linear autoregressive time series model", Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 573-591.

[7] Farnoosh, R., Nabati, P. and Azizi, M. (2016), "Simulating and Forecasting OPEC Oil Price Using Stochastic Differential Equations", Journal of New Researches in Mathematics, 2 (7), 21-30.

[8] Hamilton, J., (1983), "Oil and the Macroeconomy since World War ii", Journal of Political Economy, Vol. 91, 228-248.

[9] Hjort, N.L. and Jones, M.C. (1996), "Locally parametric nonparametric density estimation", Ann. Stat, 24, 1647-1619

[10] Jimenez-Rodriguez, R. and Marcelo, S. (2004), "Oil Price Shocks and Real Growth: Empirical Evidence for Some OECD Countries", Working Paper, European Central Bank.

[11] Morana, C. (2001), "A Semiparametric Approach to Short-Term Oil Price Forecasting", Energy Economics,23, 325-338.

[12] Mortazavi, S. J. and Farnoosh, R. (2013), "The prediction nonlinear-autoregressive model for annual ring width of pinus eldarica with semi-parametric approach", Vol. 26, No.6, World Applied Sciences Journal, 783-787.

[13] Naito, K. (2004), "Semiparametric density estimation by local L2-fitting", Ann. Stat, 32,1662-1191.

[14]Park, J. and Ratti, R. A., (2008), "Oil Price Shock Markets in the U.S. and 13 European Countries," Energy Economics, 30, 2587-2608.