

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره نهم، بهار ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹-۰۱۶۸۲

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## حل عددی معادله موج با استفاده از قاب‌های شرلت

مژگان امین خواه<sup>۱</sup>، عطاالله عسکری همت<sup>۲</sup>، ریحانه رئیسی طوسی<sup>۳\*</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم و فناوری‌های نوین، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته، کرمان، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۱۵

### چکیده

در این مقاله، با استفاده از قاب‌های شرلت<sup>۱</sup> یک روش عددی را برای حل معادله موج ارائه می‌دهیم. بدین منظور، ابتدا یک سیستم جدید را با بکارگیری شرلت می‌سازیم سپس با استفاده از قضیه پلانچرل<sup>۲</sup>، ضرایب قاب شرلت را محاسبه می‌نماییم.

**واژه‌های کلیدی:** قاب شرلت، معادله موج، قضیه پلانچرل، تبدیل فوریه.

E-mail: Raisi@um.ac.ir

1. Shearlet frames  
2. Plancherel Theorem

\*. عهده دار مکاتبات:

## ۱. مقدمه

شرط پذیرفتنی برای  $\psi$  به صورت زیر خواهد بود

$$C_\psi \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi_1|^n} d\xi_n \cdots d\xi_2 d\xi_1 < \infty.$$

در مورد خاص،  $n = 2$  داریم

$$\psi_{j,k,m}(0) = 2^{-\frac{3}{4}j} \psi \left( A_{2^j}^{-1} S_k^{-1} (0 - m) \right),$$

که در آن  $j, k \in \mathbb{Z}$ ،  $m \in \mathbb{Z}^2$  و

$$A_{2^j} = \begin{bmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 2^{\frac{j}{2}} \end{bmatrix},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

یک مثال از شرلت به شکل زیر ساخته می‌شود (رجوع کنید به [۱۳]).

**مثال ۱-۱.** فرض کنیم  $\psi_1$  یک موج پذیرفتنی با  $\text{supp } \hat{\psi}_1 \subseteq \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$  و  $\hat{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  و فرض کنیم  $\psi_2$  به صورتی باشد که  $\hat{\psi}_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  و  $\text{supp } \hat{\psi}_2 \subseteq [-1, 1]^{n-1}$  لذا با توجه به تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  شرلت گسسته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\psi}(\xi) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{1}{\xi_1} \xi'\right),$$

$$\xi_1 \in \mathbb{R}, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

بطور مثال، برای  $n = 2$  شرلت به صورت زیر بیان می‌شود.

تابع  $\psi_1 \in L^2(\mathbb{R})$  را یک موجک لیماری-میر<sup>۷</sup> در نظر می‌گیریم که در شرط کالدرون<sup>۸</sup> گسسته زیر صدق می‌کند

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}_1(2^{-j}\omega)|^2 = 1,$$

برخی مسائل در زمینه‌های الکترونیک، مکانیک و فیزیک، شامل مطالعه معادله موج در ابعاد گوناگون می‌باشند. انواع مختلفی از امواج- صوتی، کشسانی و الکترومغناطیس- و دیگر پدیده‌های نوسانی به معادله موج منتج می‌گردد. حالت کلی معادله موج دو بعدی بصورت زیر داده می‌شود

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (۱)$$

که در آن  $c$  سرعت انتشار موج در محیط داده شده است [۱]. در سال‌های اخیر، برای حل (۱) روش‌های متنوعی با استفاده از سیستم‌های موجک<sup>۱</sup>، کرولت<sup>۲</sup> و شرلت توسط کیسر<sup>۳</sup>، پرل<sup>۴</sup> و برخی دیگر از محققین [۴،۵] پیشنهاد شده‌اند. سیستم‌های موجک توسط ویس<sup>۵</sup> [۶]، برتولوزا<sup>۶</sup> [۷] و پژوهشگران دیگر [۸] در حل معادله موج مورد استفاده قرار گرفت. البته برای حل مسائل هذلولوی، سیستم‌های کرولت بسیار کاراتر از موجک‌ها بوده‌اند [۹،۱۰]. در عین حال برای حل معادلات مراتب بالا، کرولت‌ها چندان مناسب نمی‌باشند. برای غلبه بر این مشکل شرلت‌ها پیشنهاد گردیدند [۱۱]. شرلت‌ها به سبب داشتن ساختار ریاضی منسجم در ابعاد بالا، ابزار مناسبی در حل معادلات مراتب بالا به صورت تحلیلی و عددی می‌باشند (برای مشاهده جزئیات بیشتر به مراجع [۱۲]، [۱۳] مراجعه نمایید).

در این مقاله، ابتدا ساختار شرلت‌ها و برخی خواص آنها را توضیح می‌دهیم. پس از آن، با استفاده از قاب شرلت، یک تابع معرفی می‌کنیم که در ساخت آن ایده کیسر در [۲] را بکار می‌بریم. در نهایت با توجه به تابع مفروض، معادله موج را به صورت عددی حل می‌کنیم.

در اینجا، خانواده  $\{\psi_{j,k,m}(0)\}_{j,k,m}$  از شرلت‌های  $n$  بعدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi_{j,k,m}(0) = |\det A_{2^j}|^{-\frac{1}{2}} \psi \left( A_{2^j}^{-1} S_k^{-1} (0 - m) \right), \quad (۲)$$

که در آن  $j \in \mathbb{Z}$ ،  $k \in \mathbb{Z}^{n-1}$ ،  $m \in \mathbb{Z}^n$  و  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$A_{2^j} = \begin{bmatrix} 2^j & 0_{n-1}^T \\ 0_{n-1} & 2^{\frac{j}{2}} I_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & k^T \\ 0_{n-1} & I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. Wavelet
2. Curvelet
3. Kaiser
4. Perel
5. Weiss
6. Bertoluzza
7. Lemarie'-Meyer wavelet
8. Caldero'n condition

به دلیل اینکه  $\sum_{j,k} |\hat{\psi}_{j,k}(\xi)|^2 = 1$  (گزاره ۲ مرجع [۱۳])، پس داریم

$$\sum_{j,k,m} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m} \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

چون خانواده  $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$  یک قاب پارسوال برای فضای  $L^2(\mathbb{R}^3)$  است، بنابراین تابع  $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$  را می‌توان به صورت زیر بسط داد

$$f = \sum_{j,k,m} \langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m} \rangle \tilde{\psi}_{j,k,m}. \quad (۳)$$

ضرایب شرلت  $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m} \rangle$  را با نماد  $C_{j,k,m}$  نشان می‌دهیم. در ادامه با استفاده از (۳)، معادله موج (۱) را حل می‌کنیم.

### ۲. نتایج اصلی

ابتدا معادله موج مقدار اولیه همگن را در فضای  $\mathbb{R}^n$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) = 0, \\ r = (x_1, \dots, x_n), \\ u|_{t=0} = w(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v(r), \end{cases} \quad (۴)$$

که در آن  $C$  یک ضریب ثابت در  $\mathbb{R}$  است. در معادله (۴) با قرار دادن  $n = 2$  پس معادله موج دو بعدی زیر را خواهیم داشت

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = w(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v(x), \end{cases} \quad (۵)$$

که در آن  $x = (x_1, x_2)$  و  $\Delta$  عملگر لاپلاس  $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  است.

با قرار دادن (۳) در (۵) داریم

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{j,k,m} C_{j,k,m} \tilde{\psi}_{j,k,m}(x, t), \\ \Delta u(x, t) &= \sum_{j,k,m} C_{j,k,m}^\Delta \tilde{\psi}_{j,k,m}(x, t), \end{aligned} \quad (۶)$$

با  $\hat{\psi}_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$  و  $\text{supp } \hat{\psi}_1 \subseteq [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$  همچنین  $\psi_2 \in L^2(\mathbb{R})$  را برای هر  $\omega \in [-1, 1]$ ، یک تابع ضربه‌ای<sup>۱</sup> در نظر می‌گیریم که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\sum_{k=-1}^1 |\hat{\psi}_2(\omega + k)|^2 = 1,$$

که در آن  $\hat{\psi}_2 \in C^\infty(\mathbb{R})$  و  $\text{supp } \hat{\psi}_2 \subseteq [-1, 1]$  تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{\psi}(\xi_1, \xi_2) = \hat{\psi}_1(\xi_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right),$$

که آن را یک شرلت کلاسیک<sup>۲</sup> می‌نامیم.

با استفاده از گزاره ۲ مرجع [۱۳]، می‌توان نتیجه گرفت سیستم شرلت  $\{\psi_{j,k,m}\}_{j,k,m}$  یک قاب پارسوال<sup>۳</sup> برای فضای  $L^2(\mathbb{R}^2)$  است.

حال تابع جدید  $\tilde{\psi}_{j,k,m}$  را به شکل زیر تعریف می‌کنیم  $\tilde{\psi}_{j,k,m}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

بطوریکه  $\hat{\psi}_{j,k,m}(\xi, t) = \hat{\psi}_{j,k,m}(\xi, 0) e^{\pm i|\xi|ct}$  و  $\hat{\psi}_{j,k,m}(\xi, 0) = \hat{\psi}_{j,k,m}(\xi)$  یک شرلت کلاسیک می‌باشد. در ادامه ثابت می‌کنیم  $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$  یک قاب پارسوال است.

**قضیه ۱-۲.** برای تابع  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$  سیستم شرلت  $\{\tilde{\psi}_{j,k,m}(x, t)\}_{j,k,m}$  یک قاب پارسوال است. برهان.

$$\begin{aligned} \sum_{j,k,m} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k,m} \rangle|^2 &= \sum_{j,k,m} |\langle \hat{f}, \hat{\psi}_{j,k,m} \rangle|^2 \\ &= \sum_{j,k,m} \left| \int \hat{f}(\xi) e^{\pm i|\xi|ct} \tilde{\psi}_{j,k,m}(\xi) e^{\mp i|\xi|ct} d\xi \right|^2 \\ &= \sum_{j,k,m} \left| \int \hat{f}(\xi) \tilde{\psi}_{j,k}(\xi) e^{im\xi} d\xi \right|^2 \\ &= \int |\hat{f}(\xi)|^2 \sum_{j,k} |\hat{\psi}_{j,k}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

1. Bump function
2. Classical shearlet
3. Parseval frame

با بکار بردن تغییر متغیر  $S_{-k}^T A_{2-j} \xi$  به جای  $\xi$ ، خواهیم داشت

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int A_{2j} S_k^T (\hat{u}(\xi) \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi)) d\xi,$$

$$C_{j,k,m}^\Delta = \frac{-1}{(2\pi)^2} \int |A_{2j} S_k^T \xi|^2 A_{2j} S_k^T (\hat{u}(\xi) \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi)) d\xi,$$

برای سهولت، در نظر می‌گیریم  $\Gamma := A_{2j} S_k^T (\hat{u}(\xi) \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi))$  داریم

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \Gamma d\xi,$$

$$\begin{aligned} C_{j,k,m}^\Delta &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int (2^{2j} \xi_1^2 + 2^j (k\xi_1 + \xi_2)^2) \Gamma d\xi \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int (2^{2j} \xi_1^2 + 2^j k^2 \xi_1^2 + 2^{j+1} k \xi_1 \xi_2 + 2^j \xi_2^2) \Gamma d\xi \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^2} \int 2^j (2^j \xi_1^2 + k^2 \xi_1^2 + 2k \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \Gamma d\xi \\ &= -\frac{2^j}{(2\pi)^2} \int ((2^j + k^2) \xi_1^2 + 2k \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \Gamma d\xi. \end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم که  $C_{j,k,m}^\Delta$  از ترکیب سه قسمت زیر تشکیل شده است

$$C_{k_1}^\Delta = \frac{2^j}{(2\pi)^2} (2^j + k^2) \int -\xi_1^2 \Gamma d\xi, \quad (7)$$

$$C_{k_2}^\Delta = \frac{2^j}{(2\pi)^2} \int -\xi_2^2 \Gamma d\xi, \quad (8)$$

$$C_{k_1, k_2}^\Delta = -\frac{2^j}{(2\pi)^2} (2k) \int \xi_1 \xi_2 \Gamma d\xi. \quad (9)$$

اگر از روابط (7)، (8) و (9) تبدیل فوریه معکوس بگیریم، عبارات زیر را بدست می‌آوریم

$$C_{k_1}^\Delta = 2^j (2^j + k^2) \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1^2} \right),$$

که در آن  $C_{j,k,m} = \langle u, \bar{\psi}_{j,k,m} \rangle$  و  $C_{j,k,m}^\Delta = \langle \Delta u, \bar{\psi}_{j,k,m} \rangle$  اکنون، از (5) و (6) تبدیل فوریه می‌گیریم و بدست می‌آوریم.

$$\sum_{j,k,m} C_{j,k,m} (i\xi_3)^2 \hat{\psi}_{j,k,m} = c^2 \sum_{j,k,m} C_{j,k,m}^\Delta \hat{\psi}_{j,k,m},$$

که در آن  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

بنابراین، داریم

$$\sum_{j,k,m} [C_{j,k,m} (i\xi_3)^2 - c^2 C_{j,k,m}^\Delta] \hat{\psi}_{j,k,m} = 0,$$

و با توجه به تعریف  $C_{j,k,m}$ ،  $C_{j,k,m}^\Delta$  و برخی خواص ضرب داخلی، رابطه زیر حاصل می‌گردد

$$\sum_{j,k,m} [\langle u, (i\xi_3)^2 \rangle - c^2 \Delta u, \bar{\psi}_{j,k,m}] \hat{\psi}_{j,k,m} = 0,$$

به دلیل اینکه  $\{\bar{\psi}_{j,k,m}\}_{j,k,m}$  یک قاب پارسوال است، پس

$$\langle u (i\xi_3)^2 - c^2 \Delta u, \bar{\psi}_{j,k,m} \rangle = 0.$$

بنابراین

$$-\xi_3^2 C_{j,k,m} = c^2 C_{j,k,m}^\Delta.$$

با استفاده از تعریف  $C_{j,k,m}$ ،  $C_{j,k,m}^\Delta$  و فرمول پلانچرل، بدست می‌آوریم

$$C_{j,k,m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \hat{u}(\xi) \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi) e^{im\xi} d\xi,$$

$$C_{j,k,m}^\Delta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \widehat{\Delta u} \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi) e^{im\xi} d\xi.$$

اکنون از خاصیت تبدیل فوریه در مورد مشتق [۱۴]، داریم

$$\left( \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right)^\wedge = (i\omega)^n \hat{f}(\omega).$$

لذا

$$C_{j,k,m}^\Delta = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int (\xi_1^2 + \xi_2^2) \hat{u}(\xi) \cdot \bar{\psi}_{j,k,m}(\xi) d\xi.$$

$$C_{k_2}^\Delta = 2^j \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_2^2} \right),$$

$$C_{k_1, k_2}^\Delta = 2^j (2k) \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1 \partial m_2} \right).$$

حال، می‌توان با کمک ضرایب شرلت یک بسط برای معادله موج به صورت زیر نوشت

$$-\beta^2 C_{j,k,m} = c^2 2^j \left[ (2^j + k^2) \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_2^2} \right) + (2k) \left( \frac{\partial^2 C_{j,k,m}}{\partial m_1 \partial m_2} \right) \right], \quad (10)$$

که در آن  $|\xi|ct := \beta$ .

فرض کنیم  $C := 2^j$ ،  $B := k2^j$  و  $A := 2^j(2^j + k^2)$

در این صورت داریم

$$B^2 - AC = k^2 2^{2j} - 2^j (2^j + k^2) 2^{2j}$$

$$= -2^{3j} < 0,$$

بنابراین، معادله (۱۰) یک معادله مشتقات جزئی بیضوی دو بعدی می‌باشد. این معادله را می‌توان با استفاده از روش مشتق متناهی<sup>۱</sup> و یا روش شبه طیفی<sup>۲</sup> حل نمود [۱۵، ۱۶].

**توجه ۱-۲.** به طور مشابه، با استفاده از تعریف شرلت  $n$

بعدی (۲)، می‌توان معادله موج  $-n$  بعدی (۴) را نیز حل نمود.

## فهرست منابع

12. Dahlke, S., Gabriele, S. and Gerd, T. The continuous shearlet transform in arbitrary space dimensions, *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 16.3, (2010) 340-364.
13. Kutyniok, G. and Labate, D. *Shearlets: Multiscale Analysis for Multivariate Data*, Birkhauser, Basel, 2012.
14. Qian, S. and Weiss, J. Wavelets and the numerical solution of partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, 106(1), (1993) 155-175.
15. Pfeiffer, H. P., et al. A multidomain spectral method for solving elliptic equations, *Computer physics communications*, 152.3 (2003) 253-273.
16. Smith, G. D. *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Oxford University press, (1985).
1. Koshlyakov, N.S., Smirnov, M.M. and Gliner, E.B. *Differential equations of mathematical physics*, (1964).
2. Kaiser, G. *A Friendly Guide to Wavelets*, Boston: Birkhauser, (1994).
3. Perel, M. V., and Sidorenko, M. S. Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 42(37), (2009) 375211.
4. Bracewell, R. N. *The Fourier transform and its applications*, New York: McGraw-Hill, (1986).
5. Bagrov, V. G. and Gitman, D. M. *Exact solutions of relativistic wave equations*, Kluwer Acad. Publisher, Dordrecht Boston London, (1990).
6. Dong, Sh. H. *Wave equations in higher dimensions*, Springer Dordrecht Heidelberg, London, New York, (2011).
7. Bertoluzza, S., Russo, G., Falletta, S. and Shu, C. W. *Wavelets for Partial Differential Equations*, Numerical Solutions of Partial Differential Equations, (2009) 37-53.
8. Hsiao, C. H. Numerical inversion of Laplace transform via wavelet in partial differential equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(2), (2014) 536-549.
9. Demanet, L. *Curvelets, wave atoms, and wave equations*, Doctoral dissertation, California Institute of Technology, (2006).
10. Sun, B., et al., Solving wave equations in the curvelet domain: A multi-scale and multi-directional approach, *Journal of Seismic Exploration*, 18.4, (2009) 385-399.
11. Amin Khah, M., Askari Hemmat, A. and Raisi Tousi, R. Integral representation for solutions of the wave equation by shearlets, *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 127(22), (2016) 10554-10560.