دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۰۱۶۹-۱۶۸۲

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نوشتاری پیرامون نگاشت‌های مرتبه دوم برای عملگرهای فضای هیلبرت

حمیدرضا مرادی[۱]، محسن عرفانیان امیدوار[۲] *

[۱و۲] گروه ریاضیات، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۰۱

چکیده

در این مقاله ما ابتدا نگاشت یک‌ونیم‌خطی را معرفی کرده سپس با کمک نگاشت یک‌ونیم‌خطی، نگاشت مرتبه دوم را تعریف می‌کنیم که در حقیقت این نگاشت تعمیمی از نگاشت‌های خطی مثبت است. با کمک این مفهوم، چندین تساوی و نامساوی عملگری شناخته‌شده را در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ اثبات می‌کنیم. بخصوص نشان می‌دهیم اگر Φ یک نگاشت خطی مرتبه دوم، $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $p, q > 1$ به قسمی که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $p \le q$، آنگاه

$$\Phi(A-B)+\Phi\big((1-p)A-B\big) \le p\Phi(A)+q\Phi(B).$$

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های خطی مثبت، نگاشت یک و نیم خطی، نگاشت مرتبه دوم، نابرابری‌های عملگری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: erfanian@mshdiau.ac.ir

۱. مقدمات و پیش‌نیازها

فرض کنید $\mathbb{B}(\mathcal{H})$، C^*-جبر تمام عملگرهای خطی در کران‌دار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در سرتاسر این مقاله $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و حروف بزرگ نمایان گر عملگر در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ می‌باشند. قدر مطلق عملگر A، به‌صورت $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ که در آن A^* الحاق A است تعریف می‌شود. عملگر A مثبت نامیده می‌شود (می‌نویسیم $A \geq 0$) هرگاه به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Ax, x\rangle \geq 0$.

نگاشت خطی $\phi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$ مثبت نامیده می‌شود هرگاه $A \geq 0$ ایجاب کند $\phi(A) \geq 0$.

مطالعه نگاشت‌های خطی مثبت در $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ موضوعی جذاب برای متخصصین نظریه نامساوی‌ها است [۱-۸]. واضح است که خاصیت خطی بودن این نگاشت‌ها، نقش اساسی در به دست آوردن این نتایج ایفا می‌کند. انگیزه‌ی اصلی این مقاله نوشتن برخی نامساوی‌های مهم عملگری با کمک نگاشت‌های مثبت بدون فرض خطی بودن آن‌هاست. برای به دست آوردن نتایج اصلی ابتدا یک تعریف کلیدی بیان می‌کنیم.

تعریف ۱-۱. نگاشت $\varphi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \times \mathbb{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$، یک نگاشت یک‌ونیم‌خطی است هرگاه برای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ داشته باشیم:

۱) $\varphi(\alpha A_1 + \beta A_2, B) = \alpha\varphi(A_1, B) + \beta\varphi(A_2, B)$،

۲) $\varphi(A, \alpha B_1 + \beta B_2) = \overline{\alpha}\varphi(A, B_1) + \overline{\beta}\varphi(A, B_2)$،

یک نگاشت یک‌ونیم‌خطی مثبت است هرگاه برای هر $A \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، $\varphi(A, A) \geq 0$.

تعریف ۱-۲. نگاشت $\Phi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H})$، با ضابطه $\Phi(A) = \varphi(A, A)$ یک نگاشت مرتبه دوم نامیده می‌شود.

به‌راحتی می‌توان بررسی کرد نگاشت مرتبه دوم با نگاشت خطی مثبت متمایز است. در حقیقت نگاشت مرتبه دوم، با کمک یک نگاشت یک‌ونیم‌خطی ساخته شد که لزوماً خاصیت خطی بودن و مثبت بودن را ندارد.

در فصل دوم این مقاله چند تساوی عملگری را با کمک تعریف ۱-۲ بیان می‌کنیم. بخصوص قانون متوازی الاضلاع را با کمک نگاشت مرتبه دوم اثبات می‌کنیم. سپس در فصل سوم چند تعمیم از نامساوی‌های مهم عملگری مانند نامساوی مثلث، نامساوی کوشی شوراتز و همچنین نامساوی بُهر را ارائه خواهیم داد. در فصل پایانی یک حالت خاص را موردبررسی قرار داده و نتایج به‌دست‌آمده در فصول قبلی را با نتایج سایر نویسندگان مقایسه می‌کنیم. نشان می‌دهیم نتایج ما تعمیمی از نتایج فوجی [۹] و هیرزاله [۱۰] است.

۲. چند تساوی عملگری

این فصل را با اثبات تساوی متوازی‌الاضلاع برای نگاشت‌های مرتبه دوم شروع می‌کنیم:

قضیه ۲-۱. فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$. در این صورت

$$\Phi(A+B) + \Phi(A-B) = 2\left(\Phi(A) + \Phi(B)\right).$$

اثبات. مشاهده می‌شود

$$\begin{aligned}\varphi(A+B, A+B) &= \varphi(A,A) + \varphi(A,B) \\ &\quad + \varphi(B,A) + \varphi(B,B)\end{aligned}$$

با جایگزینی B با $-B$ در تساوی بالا، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned}\varphi(A-B, A-B) &= \varphi(A,A) - \varphi(A,B) \\ &\quad - \varphi(B,A) + \varphi(B,B)\end{aligned}$$

اکنون با جمع‌کردن دو تساوی قبل، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. می‌توان قانون متوازی‌الاضلاع را به‌صورت زیر تعمیم داد.

قضیه ۲-۲. فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $t \neq 0$، در این صورت

$$\begin{aligned}\Phi(A+B) + \frac{1}{t}\Phi(tA-B) &= (1+t)\Phi(A) \\ &\quad + \left(1+\frac{1}{t}\right)\Phi(B).\end{aligned}$$

اثبات. می‌توان نوشت

$$(A+B)+\frac{1}{t}\Phi(tA-B)=\Phi\Phi(A)+\Phi(B)+\varphi(A,B)+\varphi(B,A)+t\Phi(A)+\frac{1}{t}\Phi(B)-\varphi(A,B)-\varphi(B,A)=(1+t)\Phi(A)+\left(1+\frac{1}{t}\right)\Phi(B).$$

نتیجه ۲-۱. فرض کنید φ یک نگاشت یک و نیم‌خطی مثبت باشد. اگر در قضیه قبل $0<t\leq 1$ آنگاه $\frac{1}{t}\geq 1$، بنابراین $\frac{1}{t}\Phi(tA-B)$ بزرگ‌تر از $\Phi(tA-B)$ خواهد بود. ازاین‌رو

$$\Phi(A\mp B)+\Phi(tA\pm B)\leq(1+t)\Phi(A)+\left(1+\frac{1}{t}\right)\Phi(B).$$

به‌طور مشابه، اگر یا $t\geq 1$ یا $t<0$ آنگاه

$$\Phi(A\mp B)+\Phi(tA\pm B)\geq(1+t)\Phi(A)+\left(1+\frac{1}{t}\right)\Phi(B).$$

قضیه زیر تعمیمی از تساوی آپولونیوس است:

قضیه ۲-۳. فرض کنید $A,B,C\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$. در این صورت

$$\Phi(A-B)=2\Phi(C-A)+2\Phi(C-B)-4\Phi\left(C-\frac{A+B}{2}\right).$$

اثبات. بنا به قضیه ۲-۱،

$$\Phi\left(C-\frac{A+B}{2}\right)=\Phi\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}+\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right)=2\left[\Phi\left(\frac{C}{2}-\frac{A}{2}\right)+\Phi\left(\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right)\right]-\Phi\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}[\Phi(C-A)+\Phi(C-B)]-\frac{1}{4}\Phi(B-A).$$

قضیه ۲-۴. فرض کنید $A,B\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$. اگر φ یک نگاشت یک و نیم‌خطی متقارن و $\Phi(A)=\Phi(B)$، در این صورت $\alpha\neq 0,\pm1$ موجود است که

$$\Phi(A+\alpha B)=\Phi(A-\alpha B).$$

اثبات. طبق فرض

$$\Phi(A)=\Phi(B),$$

بنابراین

$$\Phi(A+\alpha B)=\Phi(A)+2\alpha\varphi(A,B)+\alpha^2\Phi(B)=\Phi(B)+2\alpha\varphi(A,B)+\alpha^2\Phi(A)=\Phi(B+\alpha A).$$

قضیه ۲-۵. فرض کنید $A,B,C\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با شرط اینکه $A+B+C=0$ و $\Phi(A)=\Phi(B)$، در این صورت

$$\Phi(A-B)=\Phi(B-A).$$

اثبات. با آسانی می‌توان دید

$$\begin{aligned}\Phi(A-C)+\Phi(A-B)&=2\Phi(A)+\Phi(C)\\&+\Phi(B)-2\varphi(A,B+C)\\&=4\Phi(A)+\Phi(C)\\&+\Phi(B).\end{aligned}$$

همچنین

$$\Phi(B-A)+\Phi(A-B)=4\Phi(B)+\Phi(C)+\Phi(A).$$

بنابراین

$$\Phi(A-B)=\Phi(B-A).$$

نتیجه زیر تعمیمی از قضیه ۲-۵ است.

قضیه ۲-۶. فرض کنید $A,B,C,D\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ با شرط اینکه $A+B+C+D=0$، $\Phi(A)=\Phi(B)$ و $\Phi(C)=\Phi(D)$، در این صورت

$$\Phi(A-C)=\Phi(B-D),$$

و

$$\Phi(B-C)+\Phi(A-D).$$

اثبات. مشاهده می‌شود

$$\Phi(A-C)+\Phi(A-B)=2\Phi(A)+\Phi(C)+\Phi(B)-2\varphi(A,C+B),$$

و

$$\Phi(B-D)+\Phi(A-B)=2\Phi(B)+\Phi(C)+\Phi(A)-2\varphi(B,A+D).$$

با کم کردن روابط قبل از یکدیگر داریم

$$\Phi(A-C)-\Phi(B-D)=2\varphi(B,A+D)-2\varphi(A,C+B)=2\varphi(B,A+D)-2\varphi(A,A+D)=2\varphi(A+B,A+D).$$

همچنین

$$\varphi(A+B,A)=\Phi(A)+\varphi(B,A)=\Phi(B)+\varphi(A,B)=\varphi(A+B,B),$$

و

$$\varphi(A+B,D)=-\varphi(C+D,D)=-\varphi(C+D,C)=\varphi(A+B,C).$$

بنابراین

$$\varphi(A+B,A+D)=\varphi(A+B,B+C)=-\varphi(A+B,A+D)=0,$$

که نتیجه می‌دهد

$$\Phi(A-C)=\Phi(B-D).$$

مشابه قبل می‌توان تساوی زیر را نیز اثبات کرد.

$$\Phi(B-C)=\Phi(A-D).$$

۳. برخی نامساوی‌ها

قضیه ۳-۱. فرض کنید $A,B\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و Φ نگاشت خطی مرتبه دوم مثبت، در این صورت

$$4\mathrm{Re}\varphi(A,B)\le\Phi(A+B)\le 2\big(\Phi(A)+\Phi(B)\big).$$

اثبات. چون $\Phi(A-B)\ge 0$، داریم

$$\Phi(A)+2\mathrm{Re}\varphi(A,B)+\Phi(B)\ge 4\mathrm{Re}\varphi(A,B).$$

لذا

$$\Phi(A+B)\ge 4\mathrm{Re}\varphi(A,B).$$

از سویی دیگر

$$\Phi(A)+\Phi(B)\ge 2\mathrm{Re}\varphi(A,B),$$

بنابراین

$$2\big(\Phi(A)+\Phi(B)\big)\ge\Phi(A)+\Phi(B)+2\mathrm{Re}\varphi(A,B).$$

درنتیجه

$$2\big(\Phi(A)+\Phi(B)\big)\ge\Phi(A+B).$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

تذکر ۳-۱. توجه شود که نامساوی دوم قضیه قبل، تعمیمی از نامساوی مثلث است. همچنین اگر $\Phi(A)\Phi(B)=\Phi(B)\Phi(A)$ و φ یک نگاشت یک و نیم‌خطی مثبت باشد، داریم

$$\Phi(A)^{\frac{1}{2}}\Phi(B)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Phi(A)^2+\Phi(B)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

قضیه ۳-۲. فرض کنید $A,B,C\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و Φ نگاشت خطی مرتبه دوم مثبت، در این صورت

$$\Phi(A-C)\le 2\big(\Phi(A-B)+\Phi(B-C)\big).$$

اثبات. می‌توان دید

$$\Phi(A)-2\mathrm{Re}\varphi(A,C)+\Phi(C)\le 2\big(\Phi(A)-2\mathrm{Re}\varphi(A,B)+\Phi(B)+\Phi(B)-2\mathrm{Re}\varphi(B,C)+\Phi(C)\big).$$

به‌راحتی مشاهده می‌شود

$$\Phi(A+C-2B)\ge 0.$$

لذا اثبات تمام است.

قضیه زیر کران بالایی برای $\Phi(A+B)$ می‌دهد.

قضیه ۳-۳. فرض کنید $A,B\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$. اگر $\Phi(A)=\Phi(B)$. آنگاه برای هر $\alpha\neq 0$،

$$\Phi(A+B)\le\Phi(\alpha A+\alpha^{-1}B).$$

اثبات. می‌دانیم برای هر $\alpha\neq 0$، $(\alpha-\alpha^{-1})^2\ge 0$؛ بنابراین $\alpha^2+\alpha^{-2}\ge 2$.

با استفاده از فرض $\Phi(A)=\Phi(B)$ داریم

$$\Phi(\alpha A+\alpha^{-1}B)=\alpha^2\Phi(A)+2\varphi(A,B)+\alpha^{-2}\Phi(B)=(\alpha^2+\alpha^{-2})\left(\frac{\Phi(A)+\Phi(B)}{2}\right)+2\varphi(A,B)\ge\Phi(A)+\Phi(B)+2\varphi(A,B)=\Phi(A+B).$$

قضیه ۳-۴. فرض کنید $A,B\in\mathbb{B}(\mathcal{H})$ و φ نگاشت یک‌ونیم‌خطی مثبت. در این صورت

$$\big(\mathrm{Re}\varphi(A,B)\big)^2\le\Phi(A)\Phi(B).$$

اثبات. فرض کنید $f(\alpha)=\varphi(\alpha A+B,\alpha A+B)$،
چون φ نگاشت یک‌ونیم‌خطی مثبت است لذا $f(\alpha)$ برای هر $\alpha\in\mathbb{C}$ مثبت است. از سویی دیگر

$$f(\alpha)=\alpha^2\varphi(A,A)+2\alpha\mathrm{Re}\varphi(A,B)+\varphi(B,B).$$

بنابراین

$$\Delta:=f(\alpha)=\big(2\mathrm{Re}\varphi(A,B)\big)^2-4\varphi(A,A)\varphi(B,B)<0.$$

و این اثبات را تکمیل می‌کند.

تذکر ۳-۲. در قضیه قبل اگر نامساوی میانگین حسابی-هندسی را به کار ببریم خواهیم داشت

$$\big(\mathrm{Re}\varphi(A,B)\big)^2\le\left(\frac{\Phi^2(A)+\Phi^2(B)}{2}\right).$$

تاکنون نتایج بسیاری پیرامون نامساوی بهر به‌دست‌آمده است [۹-۱۱]. در ادامه ما تعمیمی برای نامساوی عملگری بهر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳-۵. فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $p, q > 1$ به قسمی که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $p \leq q$، در این صورت

$$\Phi(A-B)+\Phi\big((1-p)A-B\big) \leq p\Phi(A)+q\Phi(B).$$

اثبات. با محاسبه مستقیم خواهیم داشت

$$p\Phi(A)+q\Phi(B)-\Phi(A-B)-\Phi\big((1-p)A-B\big)=(2-p)(p-1)\Phi(A)+(q-2)\Phi(B)-(p-2)\big(\varphi(A,B)+\varphi(B,A)\big)=(2-p)(p-1)\Phi(A)+\left(\frac{2-p}{p-1}\right)\Phi(B)+(2-p)\big(\varphi(A,B)+\varphi(B,A)\big)=(2-p)\Phi\left(\sqrt{p-1}A+\frac{1}{\sqrt{p-1}}B\right) \geq 0.$$

نتیجه ۳-۱. فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $p, q > 1$ به قسمی که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ و $p \leq q$، در این صورت

$$\Phi(A-B) \leq p\Phi(A)+q\Phi(B).$$

اثبات. اگر $p \leq q$، آنگاه از قضیه ۳-۵ حکم ثابت می‌شود. اگر $q \leq p$، بنا به قضیه ۳-۵ داریم

$$\Phi(A-B)+\Phi\big((1-q)B-A\big) \leq p\Phi(A)+q\Phi(B).$$

بنابراین

$$\Phi(A-B) \leq p\Phi(A)+q\Phi(B),$$

و تساوی زمانی برقرار است که $A=(1-q)B$.

درنتیجه $B=(1-p)A$، زیرا $(1-p)=\frac{1}{1-q}$.

اگر نتیجه قبل را ابتدا برای A و B سپس برای A و $-B$ به کار ببریم خواهیم داشت:

نتیجه ۳-۲. فرض کنید $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ و $p > 1$، در این صورت

$$\pm\big(\varphi(A,B)+\varphi(B,A)\big) \leq (p-1)\Phi(A)+\frac{1}{p-1}\Phi(B).$$

۴. حالت خاص

برای دو عملگر $A, B \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$، تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} \varphi: \mathbb{B}(\mathcal{H}) \times \mathbb{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{B}(\mathcal{H}) \\ \qquad \varphi(A,B)=B^*A \end{cases},$$

در نتیجه $\varphi(A,A)=|A|^2$. به‌آسانی می‌توان بررسی که این نگاشت متقارن، نسبت به مؤلفه اول خطی و نسبت به مؤلفه دوم مزدوج خطی است.

با توجه به این تعریف،

- از قضیه ۲-۱ داریم

$$|A+B|^2+|A-B|^2=2(|A|^2+|B|^2).$$

- همچنین قضیه ۲-۳ نتیجه می‌دهد

$$|A-B|^2=2|C-A|^2+2|C-B|^2-4\left|C-\frac{A+B}{2}\right|^2.$$

- از قضیه ۲-۲ داریم

$$|A+B|^2+\frac{1}{t}|tA-B|^2=(1-t)|A|^2\left(1+\frac{1}{t}\right)|B|^2.$$

این نتیجه قبلاً توسط فوجی و همکاران [۹] به‌دست‌آمده بود.

- قضیه ۳-۵ نتیجه می‌دهد

$$|A-B|^2+|(1-p)A-B|^2 \leq p|A|^2+q|B|^2.$$

این نتیجه قبلاً توسط هیرزاله در [۱۰] به‌دست‌آمده بود.

فهرست منابع

1. R. Bhatia and R. Sharma. ''Some inequalities for positive linear maps'', *Linear Algebra and its Applications*, 436,6, pp. 1562-1571, 2012.
2. X. Fu. ''Some generalizations of operator inequalities'', *Journal of Mathematical Inequalities*, 9, 1, pp. 101-105, 2015.
3. M. Lin, ''On an operator Kantorovich inequality for positive linear maps'', *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 402, 1, pp. 127-132, 2013.
4. H. R. Moradi, M. E. Omidvar, M. K. Anwary, ''An extension of kantorovich inequality for sesquilinear maps'', *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 10,2, pp. 231-237, 2017.
5. H. R. Moradi, M. E. Omidvar, S. S. Dragomir, ''An operator extension of Cebysev inequality'', *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, to appear.
6. H. R. Moradi, M. E. Omidvar, M. K. Anwary, S. S. Dragomir, ''More operator inequalities for positive linear maps'', *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications*, 9,1, pp. 65-73, 2017.
7. E. Stormer. ''Positive linear maps of operator algebras'', *Acta Mathematica*, 110,1, pp. 233-278, 1963.
8. P. Zhang. ''More operator inequalities for positive linear maps'', *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 9,1, pp. 166-172, 2015.
9. M. Fujii, and H. Zuo. ''Matrix order in Bohr inequality for operators'', *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 1, pp. 21-27, 2010.
10. O. Hirzallah. ''Non-commutative operator Bohr inequality''. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 282, 2, pp. 578-583, 2003.
11. W.S. Cheung, and J. Pecaric. ''Bohr's inequalities for Hilbert space operators''. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 323, 1, pp. 403-412, 2006.