

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹-۰۱۶۸۲

JNRM
JOURNAL OF
NUMERICAL
RATIONAL
MECHANICS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

ماتریس عملیاتی جدید برای حل یک کلاس از مسائل کنترل بهینه با مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره

محسن علی‌پور^{۱*}، پریرسا الله‌قلی^۲

^(۱و۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۰۲

چکیده

در این مقاله، ما روش طیفی را بر مبنای چند جمله‌ای‌های برنشتاین برای حل یک کلاس از مسائل کنترل بهینه با مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره به کار می‌بریم. در مرحله اول، پایه دوگان و ماتریس عملیاتی حاصل ضرب را بر اساس پایه برنشتاین معرفی می‌نمائیم. سپس ماتریس عملیاتی برنشتاین را برای مشتقات کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره بدست می‌آوریم که تا کنون انجام نشده است. با استفاده از تقریب توابع بر اساس پایه برنشتاین و ماتریس‌های عملیاتی ذکر شده، مسئله کنترل بهینه با مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره به یک سیستم معادلات جبری کاهش می‌یابد که با استفاده از روش تکراری نیوتن به سادگی قابل حل می‌باشد. روش مطرح شده را برای حل دو مسئله بکار می‌گیریم. نتایج عددی نشان می‌دهد که جواب‌های تقریبی حاصل، از دقت بالایی برخوردار هستند. برخی مقایسه‌ها با روش دیگر تضمین می‌کند که نتایج منطقی می‌باشند. همچنین همانطور که انتظار می‌رفت، وقتی مرتبه مشتق کسری به عدد ۱ میل نماید، جواب‌های بدست آمده به جواب‌های کلاسیک میل می‌نماید.

واژه‌های کلیدی: مسائل کنترل بهینه کسری، چند جمله‌ای‌های برنشتاین، ماتریس عملیاتی، مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره، حساب دیفرانسیل کسری.

۱. مقدمه

و شرایط مرزی

$$x(0) = x_0, \quad (3)$$

بطوریکه ${}_0^J D_t^\alpha$ نشان دهنده مشتق جمیره از مرتبه α و $a_1(t), a_2(t)$ توابع داده شده و $x(t), u(t)$ به ترتیب توابع مجهول وضعیت و کنترل هستند. برای $\alpha = 1$ ، ما با مسئله کنترل بهینه استاندارد سروکار داریم. وجود جواب بهینه برای مسئله‌ی (۱)–(۳) بوسیله برخی قضایا در [۲۷] به طور کامل مورد بحث قرار گرفت. ساختار این مقاله در ادامه، به این صورت می‌باشد. در بخش ۲، برخی از مقدمات در حساب دیفرانسیل کسری را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، چند جمله‌ای‌های برنشتاین و سپس توابع تقریبی با استفاده از چندجمله‌ای‌های برنشتاین معرفی می‌شوند و خواص چندجمله‌ای‌های برنشتاین را با چند لم و نتیجه نشان می‌دهیم. در بخش ۴، ماتریس عملیاتی جدید برای مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده جمیره را می‌سازیم. در بخش ۵، چندجمله‌ای‌های برنشتاین را برای حل حالت‌های مختلف مسائل کنترل بهینه کسری به کار می‌بریم. در بخش ۶، مثال‌های عددی برای نشان دادن کارایی بالای روش پیشنهادی مطرح می‌شود. سرانجام در بخش ۷، نتیجه کار ما در این مقاله ارائه می‌شود.

۲. مقدماتی در حساب دیفرانسیل کسری

در این بخش، برخی از تعاریف و نتایج پایه‌ای مربوط به حساب دیفرانسیل کسری را یادآوری می‌کنیم که در ادامه مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

تعریف ۲.۱. [۳–۱] فرض کنید $\alpha \geq 0$ ، عملگر ${}_a I_t^\alpha$ روی $L_1[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx, \quad (4)$$

$$a \leq t \leq b,$$

$${}_a I_t^0 f(t) = f(t), \quad (5)$$

که عملگر انتگرال کسری ریمان–لیوویل از مرتبه α نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲. [۳–۱] فرض کنید $\alpha \geq 0$ و $n = \lceil \alpha \rceil$ عملگر ${}_a D_t^\alpha$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعاریف مختلفی از مشتقات کسری و انتگرال در بسیاری از مقالات و کتاب‌ها ارائه شده است. مشتقات کاپوتو و ریمان–لیوویل جالب توجه‌ترین آن‌ها هستند. با توجه به هر تعریف از مشتق کسری، آن‌ها دارای برخی مزایا و معایب می‌باشند [۳–۱]. مشتق از یک ثابت در مفهوم ریمان–لیوویل صفر نیست در حالی که در مفهوم کاپوتو صفر است. همچنین، برای بدست آوردن مشتق کاپوتو از یک تابع، در مرحله اول باید وجود مشتق آن را داشته باشیم. بنابراین، می‌توانیم مشتق کاپوتو را فقط برای توابع مشتق پذیر بدست آوریم، در حالی که این شرایط در مفهوم ریمان–لیوویل لازم نیست [۴].

اخیراً، جمیره پیشنهاد یک تعریف ساده جایگزین مشتق ریمان–لیوویل را داده است و آن را مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده جمیره نامیده است [۵–۱۲]. این تعریف را می‌توان برای هر توابع پیوسته دلخواه استفاده کرد و نیاز به شرط مشتق پذیری نیست. به عبارت دیگر، با این تعریف، مشتق کسری از یک ثابت برابر با صفر است. بنابراین مشتق کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده جمیره برخی از مزایای هر دو مشتقات کسری کاپوتو و ریمان–لیوویل استاندارد را دارد.

در دهه‌های اخیر، مدل‌هایی که شامل تغییرات و مسائل کنترل بهینه هستند برای محققان بسیار محبوب‌اند. اما در سال‌های گذشته، ترکیب این مسائل با حساب دیفرانسیل کسری یک موضوع عالی برای بسیاری از محققان در علوم پایه و مهندسی است [۱۳–۲۶]. مسائل کنترل بهینه کسری می‌تواند نوع دیگری از مشتقات کسری داشته باشد. در این مسائل، مشتق ریمان–لیوویل و کاپوتو بیشتر از تعاریف دیگر استفاده می‌شوند. در مقاله، ما مسائل کنترل بهینه با مشتقات کسری ریمان–لیوویل اصلاح شده جمیره بصورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } I(x(t), u(t)) = \\ \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt, \end{aligned} \quad (1)$$

با توجه به محدودیت دینامیکی

$$\begin{aligned} {}_0^J D_t^\alpha x(t) = a_1(t)x(t) + a_2(t)u(t), \\ 0 < t \leq 1, \quad 0 < \alpha \leq 1, \end{aligned} \quad (2)$$

$${}_0^J D_x^\alpha x^\gamma = \begin{cases} 0, & \text{for } \gamma = 0, \\ \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} x^{\gamma-\alpha} & \text{for } \gamma > 0. \end{cases} \quad (8)$$

۳. چند جمله‌ای برنشتاین و خواص آن

چند جمله‌ای‌های برنشتاین در شاخه‌های مختلف ریاضی مورد استفاده قرار گرفته است. برای مثال می‌توانید رجوع کنید به منابع [۳۰-۴۱].

تعریف ۳،۱. چند جمله‌ای‌های برنشتاین (BPs) از درجه m روی بازه $[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{i,m}(x) = \binom{m}{i} x^i (1-x)^{m-i}, \quad (9)$$

$i = 0, 1, \dots, m$.

نتیجه ۳،۲. مجموعه $\{B_{0,m}(x), B_{1,m}(x), \dots, B_{m,m}(x)\}$

یک پایه کامل در فضای هیلبرت $L^2[0, 1]$ است و هر چندجمله‌ای از درجه m را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $B_{i,m}(x)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) به صورت زیر بسط داد:

$$P(x) = \sum_{i=0}^m c_i B_{i,m}(x). \quad (10)$$

نتیجه ۳،۳. (رجوع کنید به [۳۰]) می‌توان نوشت

$$B_{i,m}(x) = \sum_{j=i}^m (-1)^{j-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i} x^j.$$

لم ۳،۴. (رجوع کنید به [۴۰]) فرض کنید

$y \in L^2[0, 1]$. آنگاه می‌توانیم یک بردار یکتای

$$c = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$$

و $y(x) \approx \sum_{i=0}^m c_i B_{i,m}(x) = c^T \Phi_m(x)$

$$\Phi_m(x) = [B_{0,m}(x), B_{1,m}(x), \dots, B_{m,m}(x)]^T \quad (11)$$

نتیجه ۳،۵. در لم ۳،۴ می‌توانیم c_i را به صورت زیر

بدست آوریم:

$$c_i = \int_0^1 f(x) d_{i,n}(x) dx, \quad i = 0, \dots, m,$$

که $\{d_{0,m}(x), \dots, d_{m,m}(x)\}$ پایه دوگان از پایه برنشتاین از درجه m روی $[0, 1]$ نامیده می‌شود و این

ویژگی را دارد

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n$$

$$\int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx, \quad (6)$$

$$a \leq t \leq b,$$

$${}_a D_t^0 f(t) = f(t), \quad (7)$$

که عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α نامیده می‌شود.

تعریف ۲،۳. [۸-۶] فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ نشان

دهنده یک تابع پیوسته (اما نه لزوماً مشتق پذیر)، و فرض

کنید $h > 0$. با استفاده از تعریف عملگر پیش رو

$$FW_h(f(x)) = f(x+h)$$

مرتبه $0 < \alpha < 1$ از $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta^\alpha f(x) = (FW_h - I)^\alpha f(x) =$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{\alpha}{i} f(x + (\alpha - i)h),$$

که I عملگر همانی است. بنابراین مشتق کسری

$f(x)$ وابسته به تعریف استاندارد مشتق، می‌تواند به

صورت زیر تعریف شود:

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta^\alpha (f(x) - f(0))}{h^\alpha}.$$

نتیجه ۲،۴. مشتق α ام ($0 < \alpha < 1$) یک تابع

ثابت صفر است.

تعریف ۲،۵. [۸-۶] (مشتق کسری ریمان-لیوویل

اصلاح شده جمیره) با مراجعه به تعریف ۲،۳ برای تابع

$f(x)$ مشتق کسری از مرتبه α به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$${}_a^J D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha-1} f(\tau) d\tau, & \alpha < 0, \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \times \\ \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha} (f(\tau) - f(a)) d\tau, & 0 < \alpha < 1, \\ \left({}^J D^{\alpha-n} f(x) \right)^{(n)}, & n \in \mathbb{N}, n \leq \alpha < n+1. \end{cases}$$

لم ۲،۶. (رجوع کنید به [۶]) برای $\alpha, \gamma \geq 0$ داریم

$$\begin{aligned}
 P_j &= [p_{0,j}, \dots, p_{m,j}]^T, \quad (j=1, \dots, m) \text{ که} \\
 p_{\ell,j} &= \int_0^1 x^{j-\alpha} d_{\ell,m}(x) dx = \\
 &= \sum_{k=0}^m \mu_{\ell,k} \int_0^1 x^{j-\alpha} B_{k,m}(x) dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \mu_{\ell,k} \sum_{s=k}^m (-1)^{s-k} \binom{m}{k} \binom{m-k}{s-k} \int_0^1 x^{j-\alpha+s} dx \\
 &= \sum_{k=0}^m \mu_{\ell,k} \sum_{s=k}^m (-1)^{s-k} \binom{m}{k} \binom{m-k}{s-k} \frac{1}{(j-\alpha+s+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^m \mu_{\ell,k} \psi_{k,j}, \\
 \psi_{k,j} &= \sum_{s=k}^m (-1)^{s-k} \binom{m}{k} \binom{m-k}{s-k} \frac{1}{(j-\alpha+s+1)}
 \end{aligned}$$

بوسیله روابط (۱۳) و (۱۴) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 {}_0^J D_x^\alpha B_{i,m}(x) &= \\
 &= \begin{cases} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} p_{\ell,j} B_{\ell,m}(x), \text{ for } i=0, \\ \sum_{j=i}^m \sum_{\ell=0}^m (-1)^{j-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} p_{\ell,j} B_{\ell,m}(x), \text{ for } i=1, \dots, m. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} \sum_{\ell=0}^m \left(\sum_{j=1}^m \Lambda_{0,j,\ell} \right) B_{\ell,m}(x), \text{ for } i=0, \\ \sum_{\ell=0}^m \left(\sum_{j=i}^m \Lambda_{i,j,\ell} \right) B_{\ell,m}(x), \text{ for } i=1, \dots, m, \end{cases}
 \end{aligned}$$

که

$$\Lambda_{i,j,\ell} = (-1)^{j-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} \sum_{k=0}^m \mu_{\ell,k} \psi_{k,j}$$

سرانجام، با استفاده از رابطه (۱۵) بدست می‌آوریم

$${}_0^J D_x^\alpha \Phi_m(x) \approx D_\alpha \Phi_m(x), \tag{۱۶}$$

که

$$\int_0^1 B_{i,m}(x) d_{j,m}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{for } i=j, \\ 0 & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$i, j = 0, \dots, m$.

علاوه بر این، در منبع [۴۱] می‌توانیم ببینیم

$$d_{i,m}(x) = \sum_{j=0}^m \mu_{i,j} B_{j,m}(x), \quad j=0, \dots, m,$$

$$\mu_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{\binom{m}{i} \binom{m}{j}} \sum_{r=0}^{\min(i,j)} (2r+1)$$

$$\binom{m+r+1}{m-i} \binom{m-r}{m-i} \binom{m+r+1}{m-j} \binom{m-r}{m-j},$$

$i, j = 0, \dots, m$.

لم ۳، ۶. فرض کنید $C_{(m+1) \times 1}$ یک بردار دلخواه باشد. عملگر ماتریس حاصلضرب $\hat{C}_{(m+1) \times (m+1)}$ با استفاده از چندجمله‌ای برنشتاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$c^T \Phi_m(x) \Phi_m(x)^T \approx \Phi_m(x)^T \hat{C}. \tag{۱۲}$$

اثبات. رجوع کنید به [۳۰].

۴. ماتریس عملیاتی برنشتاین برای مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره

در این بخش، ماتریس عملیاتی برنشتاین را برای مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره از مرتبه $\alpha > 0$ بدست می‌آوریم.

از نتیجه ۳، ۳ و رابطه (۸) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}
 {}_0^J D_x^\alpha B_{i,m}(x) &= \sum_{j=i}^m (-1)^{j-i} \\
 &= \begin{cases} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i} {}_0^J D_x^\alpha (x^j) \\ \sum_{j=i}^m (-1)^j \binom{m}{j} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} x^{j-\alpha}, \text{ for } i=0, \\ \sum_{j=i}^m (-1)^{j-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j-i} \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-\alpha+1)} x^{j-\alpha}, \text{ for } i=1, \dots, m. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

اکنون، تقریبی از $x^{j-\alpha}$ ($j=1, \dots, m$) را با توجه به پایه برنشتاین به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$x^{j-\alpha} \approx P_j^T \Phi_m(t), \tag{۱۴}$$

Minimize

$$J(c, b) = \frac{1}{2} c^T \left(\int_0^1 \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T dt \right) c + \frac{1}{2} b^T \left(\int_0^1 \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T dt \right) b \quad (26)$$

$$= \frac{1}{2} c^T Q c + \frac{1}{2} b^T Q b,$$

که $Q = (Q_{i,j})_{i,j=1}^{m+1}$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$Q_{i+1,j+1} = \int_0^1 B_{i,m}(x) B_{j,m}(x) dx = \frac{\binom{m}{i} \binom{m}{j}}{(2m+1) \binom{2m}{i+j}}, \quad i, j = 0, 1, \dots, m.$$

همچنین با بکارگیری لم ۳۶ برای رابطه (۲۴) داریم:

$$c^T D_\alpha \Phi_m(t) = \Phi_m(t)^T \hat{A}_1 c + \Phi_m(t)^T \hat{A}_2 b. \quad (27)$$

حال، با استفاده از روش تاو [۴۲] می‌توانیم از (۲۷) معادلات جبری به صورت زیر تولید نماییم:

$$G_j(c, b) = \int_0^1 (c^T D_\alpha - c^T \hat{A}_1^T - b^T \hat{A}_2^T) \Phi_m(t) B_{j,m}(t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, m-1, \quad (28)$$

و با توجه به (۲۵) داریم $G_m = c^T \Phi_m(0) - x_0$ (۲۵) سرانجام، مسئله (۱)-(۳) به مسئله‌ی بهینه‌سازی پارامتری کاهش یافته است که می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\text{Minimize } J(c, b) = \frac{1}{2} c^T Q c + \frac{1}{2} b^T Q b, \quad (29)$$

باتوجه به سیستم معادلات جبری

$$G_j(c, b) = 0, \quad j = 0, \dots, m. \quad (30)$$

برای حل مسئله‌ی بالا از روش ضرایب لاگرانژ استفاده می‌نمائیم. بنابراین، تابع لاگرانژ را برای مسئله (۲۹) و (۳۰) بصورت زیر تعریف می‌نمائیم:

$$L(c, b, \lambda) = \frac{1}{2} c^T Q c + \frac{1}{2} b^T Q b + \sum_{j=0}^m \lambda_j G_j(c, b), \quad (31)$$

که $\lambda = [\lambda_0, \dots, \lambda_m]^T$ ضریب مجهول لاگرانژ است. اکنون، با در نظر گرفتن شرایط لازم برای اکسترمم،

$$D_\alpha = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \Lambda_{0,j,0} & \sum_{j=1}^m \Lambda_{0,j,1} & \dots & \sum_{j=1}^m \Lambda_{0,j,m} \\ \sum_{j=1}^m \Lambda_{1,j,0} & \sum_{j=1}^m \Lambda_{1,j,1} & \dots & \sum_{j=1}^m \Lambda_{1,j,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=i}^m \Lambda_{i,j,0} & \sum_{j=i}^m \Lambda_{i,j,1} & \dots & \sum_{j=i}^m \Lambda_{i,j,m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{j=m}^m \Lambda_{m,j,0} & \sum_{j=m}^m \Lambda_{m,j,1} & \dots & \sum_{j=m}^m \Lambda_{m,j,m} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

ماتریس عملیاتی برنشتاین برای مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره از مرتبه $\alpha > 0$ نامیده می‌شود.

۵. چند جمله‌ای‌های برنشتاین برای حل مسائل کنترل بهینه کسری

با استفاده از لم ۳۴ می‌توانیم تقریب‌هایی از توابع را بصورت زیر بدست آوریم:

$$x(t) \approx c^T \Phi_m(t), \quad (18)$$

$$u(t) \approx b^T \Phi_m(t), \quad (19)$$

$$a_1(t) \approx a_1^T \Phi_m(t), \quad (20)$$

$$a_2(t) \approx a_2^T \Phi_m(t), \quad (21)$$

که $c, b, a_1, a_2 \in R^{(m+1) \times 1}$.

بوسیله روابط (۱۶) و (۱۸) می‌توان نوشت

$${}_0^J D_t^\alpha x(t) \approx c^T D_\alpha \Phi_m(t). \quad (22)$$

بنابراین مسئله (۱)-(۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

Minimize

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (c^T \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T c + b^T \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T b) dt, \quad (23)$$

با توجه به محدودیت دینامیکی

$$c^T D_\alpha \Phi_m(t) = a_1^T \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T c + a_2^T \Phi_m(t) \Phi_m(t)^T b, \quad (24)$$

و شرایط مرزی

$$c^T \Phi_m(0) = x_0. \quad (25)$$

اکنون، بجای (۲۳) می‌توان نوشت

با شرایط مرزی

$$x(0) = 1.$$

برای این مسئله جواب دقیق در حالت $\alpha = 1$ برابر است با

$$x(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \beta \sinh(\sqrt{2}t),$$

$$u(t) = (1 + \sqrt{2}\beta) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \beta) \sinh(\sqrt{2}t),$$

$$\beta = -\frac{\cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})} \text{ که}$$

شکل‌های ۱ و ۲ به ترتیب، جواب‌های تقریبی برای توابع وضعیت و کنترل را برای $m = 5$ و مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. این نمودارها نشان می‌دهد، همانطور که انتظار می‌رفت، وقتی α به سمت ۱ میل می‌کند، جواب‌های عددی برای هر دو تابع کنترلی و وضعیت به جواب‌های تحلیلی برای $\alpha = 1$ میل می‌کند. در شکل‌های ۳ و ۴، خطای مطلق نتایج عددی بدست آمده را برای $m = 5$ و $\alpha = 1$ می‌بینیم. همچنین، در جدول ۱ و ۲، خطای مطلق $x(t)$ برای وقتی که $\alpha = 1$ و $m = 4, 5$ نشان داده شده و با نتایج در [۴۳] مقایسه شده است.

سیستم معادلات جبری زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial L}{\partial c} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial b} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (34)$$

معادلات (۳۲)–(۳۴) می‌تواند برای c, b, λ توسط روش تکراری نیوتون حل شود. بنابراین پس از آن می‌توان، مقدار تقریبی تابع وضعیت $x(t)$ و تابع کنترلی $u(t)$ را به ترتیب از (۱۸) و (۱۹) بدست آورد.

۶. مسائل عددی

برای نشان دادن عملکرد و دقت روش مطرح شده، این روش را برای مثال‌های زیر به کار می‌بریم.

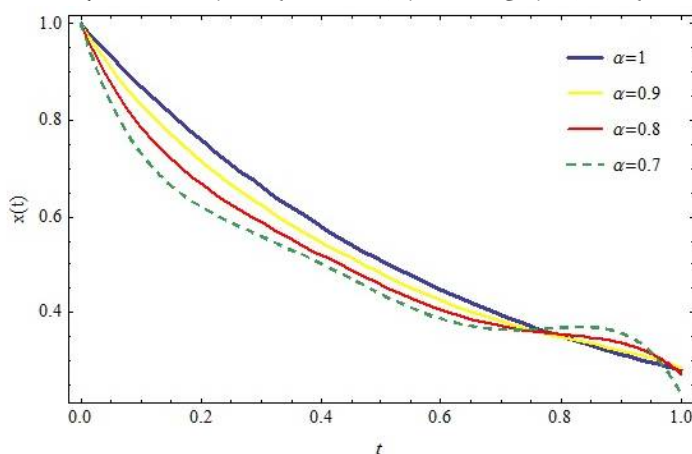
مثال ۱. مسئله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Minimize } I = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

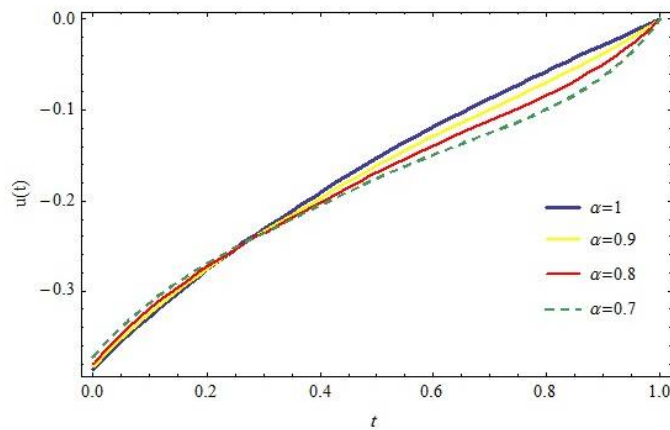
با توجه به محدودیت دینامیکی

$${}_0^J D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t),$$

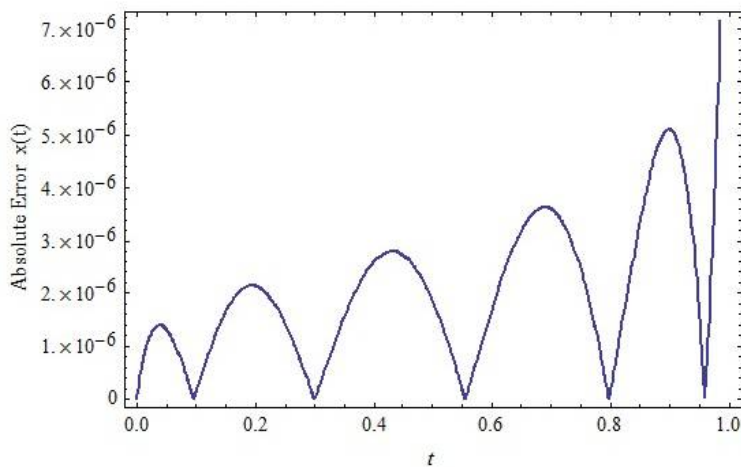
شکل ۱. جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $m = 5$ و مقادیر مختلف α در مثال ۱.



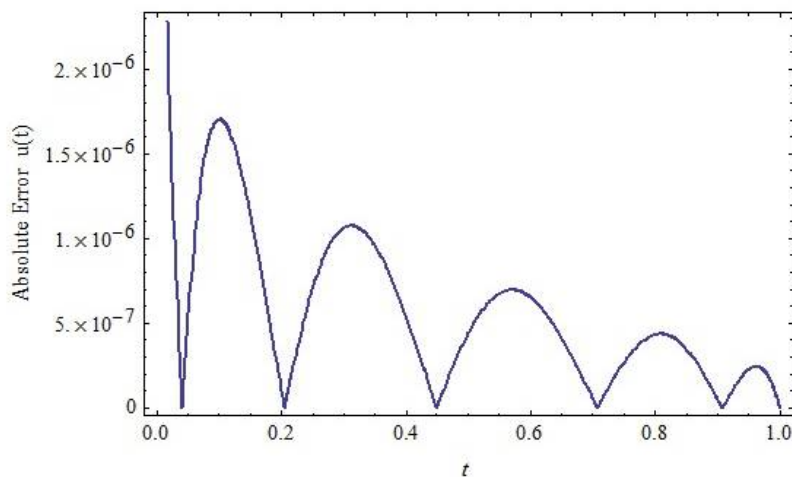
شکل ۲. جواب‌های تقریب $u(t)$ برای $m = 5$ و مقادیر مختلف α در مثال ۱.



شکل ۳. نمودار تابع خطای مطلق $x(t)$ برای $\alpha = 1$ و $m = 5$ در مثال ۱.



شکل ۴. نمودار تابع خطای مطلق $u(t)$ برای $\alpha = 1$ و $m = 5$ در مثال ۱.



جدول ۱. خطای مطلق $x(t)$ برای $\alpha = 1, m = 4$ برای مقادیر مختلف t در مثال ۱.

t	$m = 4$ [43]	Present Method $m = 4$
0	9.0×10^{-5}	0
0.1	4.8×10^{-5}	1.6×10^{-5}
0.2	3.3×10^{-5}	2.6×10^{-5}
0.3	7.8×10^{-5}	3.6×10^{-5}
0.4	2.1×10^{-5}	3.9×10^{-6}
0.5	6.4×10^{-5}	3.8×10^{-5}
0.6	1.0×10^{-4}	4.9×10^{-5}
0.7	1.1×10^{-5}	1.0×10^{-5}
0.8	9.1×10^{-5}	5.5×10^{-5}
0.9	9.4×10^{-5}	5.5×10^{-5}

جدول ۲. خطای مطلق $x(t)$ برای $\alpha = 1, m = 5$ برای مقادیر مختلف t در مثال ۱.

t	$m = 5$ [43]	Present Method $m = 5$
0	6.3×10^{-6}	0
0.1	1.3×10^{-5}	1.2×10^{-7}
0.2	2.1×10^{-5}	2.1×10^{-6}
0.3	3.2×10^{-5}	1.8×10^{-8}
0.4	4.8×10^{-5}	2.6×10^{-6}
0.5	6.2×10^{-5}	1.9×10^{-6}
0.6	7.4×10^{-5}	1.7×10^{-6}
0.7	8.9×10^{-5}	3.7×10^{-6}
0.8	1.1×10^{-4}	1.5×10^{-7}
0.9	1.3×10^{-4}	5.1×10^{-6}

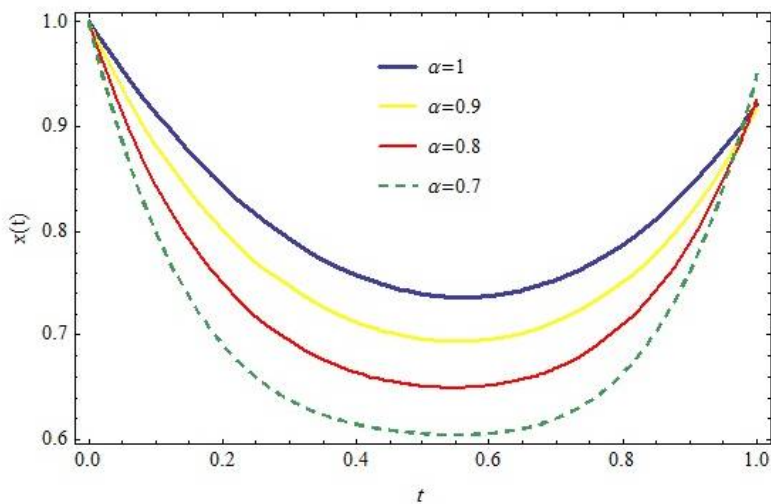
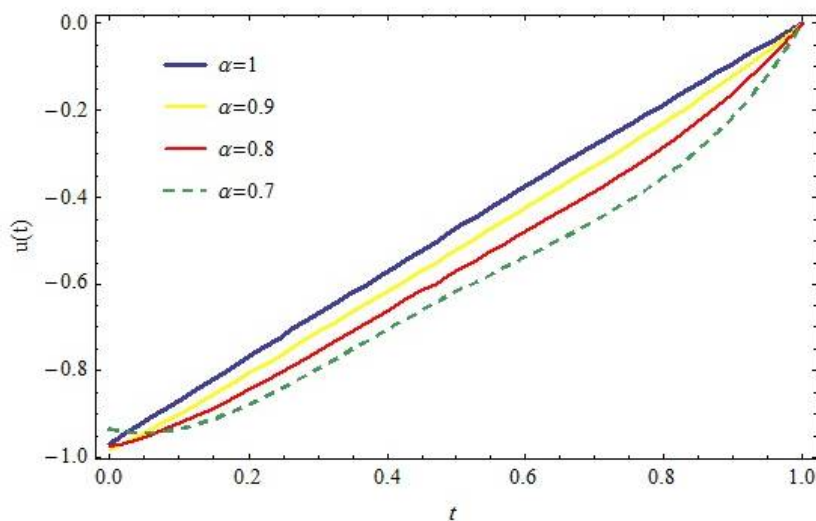
در نظر بگیرید. شکل‌های ۵ و ۶ تابع‌های وضعیت $x(t)$ و کنترل $u(t)$ برای $m = 4$ و مقادیر مختلف α را نشان می‌دهد. همانند مثال ۱، این شکل‌ها نشان می‌دهد، همانطور که انتظار می‌رفت، وقتی α به سمت ۱ میل می‌کند، جواب‌های عددی برای هر دو تابع کنترلی و وضعیت به جواب‌های تحلیلی برای $\alpha = 1$ میل می‌کند.

مثال ۲. توابع وضعیت $x(t)$ و کنترل $u(t)$ را با در نظر گرفتن شاخص مینیمم I داده شده در مثال ۱ و با توجه به محدودیت دینامیکی زیر

$${}_0^J D_t^\alpha x(t) = t x(t) + u(t),$$

و با شرایط مرزی

$$x(0) = 1.$$

شکل ۵. جواب‌های تقریبی $x(t)$ برای $m = 4$ و مقادیر مختلف α در مثال ۲.شکل ۶. جواب‌های تقریبی $u(t)$ برای $m = 4$ و مقادیر مختلف α در مثال ۲.

مسائل کنترل بهینه کسری به جواب‌های مسائل کنترل بهینه استاندارد میل نماید.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، بوسیله چند جمله‌ای‌های برنشتاین یک ماتریس عملیاتی برای مشتق کسری ریمان-لیوویل اصلاح شده جمیره بدست آوردیم. سپس مسئله کنترل بهینه را به یک سیستم معادلات جبری کاهش دادیم که می‌تواند به راحتی حل شود. دیدیم که نتایج بدست آمده در مثال‌ها با جواب دقیق و جواب تقریبی روش‌های دیگرهماهنگی خوبی داشتند. همچنین، مشاهده کرده‌ایم که وقتی مرتبه مشتق به ۱ میل می‌نماید، جواب‌های

فهرست منابع

- [9] G. Jumarie, From Lagrangian mechanics fractal in space to space fractal Schrodinger's equation via fractional Taylor's series, *Chaos Solitons Fractals* 41 (2009), no. 4, 1590-1604.
- [10] G. Jumarie, Laplace's transform of fractional order via the Mittag-Leffler function and modified Riemann-Liouville derivative, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), no. 11, 1659-1664.
- [11] G. Jumarie, Analysis of the equilibrium positions of nonlinear dynamical systems in the presence of coarse-graining disturbance in space, *J. Appl. Math. Comput.* 32 (2010), no. 2, 329-351.
- [12] G. Jumarie, Cauchy's integral formula via modified Riemann-Liouville derivative for analytic functions of fractional order, *Appl. Math. Lett.* 23 (2010), no. 12, 1444-1450.
- [13] Agrawal O. P. 2004. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynam.* 38(1), 323-337.
- [14] Almeida R, Pooseh S, Torres D. F. M. 2012. Fractional variational problems depending on indefinite integrals. *Nonlinear Anal.* 75(3), 1009-1025.
- [15] Bourdin L, Odziejewicz T, Torres D. F. 2013. Existence of minimizers for fractional variational problems containing Caputo derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications* 8(1), 3-12.
- [16] Cresson J. 2007. Fractional embedding of differential operators and Lagrangian systems. *J. Math. Phys.* 48(3):033504.
- [1] K. S. Miller and B. Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, Wiley, New York, 1993.
- [2] I. Podlubny, Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [3] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives, Translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
- [4] B. Ross, S. G. Samko and E. R. Love, Functions that have no first order derivative might have fractional derivatives of all orders less than one, *Real Anal. Exchange* 20 (1994/95), no. 1, 140-157.
- [5] G. Jumarie, On the representation of fractional Brownian motion as an integral with respect to $(dt)^a$, *Appl. Math. Lett.* 18 (2005), no. 7, 739-748.
- [6] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results, *Comput. Math. Appl.* 51 (2006), no. 9-10, 1367-1376.
- [7] G. Jumarie, Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution, *J. Appl. Math. Comput.* 24 (2007), no. 1-2, 31-48.
- [8] G. Jumarie, Table of some basic fractional calculus formulae derived from a modified Riemann-Liouville derivative for non-differentiable functions, *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), no. 3, 378-385.

Calculus of Variations. Imperial College Press, London.

[26] Malinowska A B, Torres D. F. M. 2012. Multiobjective fractional variational calculus in terms of a combined Caputo derivative. *Applied Mathematics and Computation* 218(9), 5099–5111.

[27] Kamocki, R: On a fractional optimal control problem with Jumarie's modified Riemann–Liouville derivative. In: *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, 19-th International Conference On. IEEE 140–145 (2014).

[28] Alipour, M., Rostamy, D. Bernstein polynomials for solving Abel's integral equation, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, V.3, N.4, 2011, pp.403-412.

[29] Alipour, M., Rostamy, D. Solving nonlinear fractional differential equations by bernstein polynomials operational matrices, *The Journal of Mathematics and Computer Science*, V.5, N.3, 2012, pp.185-196.

[30] Alipour, M., Rostamy, D., Baleanu, D. Solving multi-dimensional FOCPs with inequality constraint by BPs operational matrices, *Journal of Vibration and Control*, V.19, N.16, 2012, pp.2523-2540.

[31] Asgari, M., Hashemizadeh, E., Khodabin, M., Maleknejad, K. Numerical solution of nonlinear stochastic integral equation by stochastic operational matrix based on Bernstein polynomials, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie*, V.57(105), N.1, 2014, pp.3-12.

[32] Baleanu, D., Alipour, M., Jafari, H. The Bernstein operational matrices for solving the fractional quadratic Riccati

[17] Frederico G S F, Torres D. F. M. 2007. A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations. *J. Math. Anal. Appl.* 334(2), 834–846.

[18] Frederico G S F, Torres D. F. M. 2008. Fractional conservation laws in optimal control theory. *Nonlinear Dynam.* 53 (3), 215-222.

[19] Frederico G S F, Torres D. F. M. 2010. Fractional Noether's theorem in the Riesz-Caputo sense. *Appl. Math. Comput.* 217 (3), 1023-1033.

[20] Idczak D, Majewski M. 2012. Fractional fundamental lemma of order $\alpha \in \left(n - \frac{i}{2}, n \right)$ with $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. *Dynamic Systems and Applications.* 21(2-3), 251268.

[21] Jelcic Z D, Petrovacki N. 2009. Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems. *Struct. Multidisc. Optim.* 38, 571 - 581.

[22] Kamocki R. 2012. Pontryagin maximum principle for fractional ordinary optimal control problems, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, DOI: 10.1002/mma.2928.

[23] Klimek M. 2009. On solutions of linear fractional differential equations of a variational type. The Publishing Office of Czestochowa University of Technology, Czestochowa.

[24] Malinowska A. B. 2012. A formulation of the fractional Noether-type theorem for multidimensional Lagrangians. *Applied Mathematics Letters* 25(11), 1941–1946.

[25] Malinowska A B, Torres D. F. M. 2012. Introduction to the Fractional

International Journal of System Science, V.41, N.6, 2010, pp.709-716.

[40] E. Kreyszig, Introduction Functional Analysis with Applications, John Wiley and Sons Incorporated, 1978.

[41] B. Jüttler, The dual basis functions for the Bernstein polynomials, *Adv. Comput. Math.* 8 (1998) 345–352.

[42] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamic, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[43] A. Lotfi, M. Dehghan, S.A. Yousefi, A numerical technique for solving fractional optimal control problems, *Computers and Mathematics with Applications* 62 (2011) 1055-1067.

differential equations with the Riemann-Liouville derivative, *Abstract and Applied Analysis*, V.2013, 2013, Article ID 461970, 7 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2013/461970>.

[33] Davaeifar, S., Rashidinia, J., Amirfakhrian, M. Bernstein polynomial approach for solution of higher-order mixed linear Fredholm integro-differential-difference equations with variable coefficients, *TWMS J. Pure Appl. Math.*, V.7, N.1, 2016, pp.46-62.

[34] Doha, E.H, Bhrawy, A.H., Saker, M.A. Integrals of Bernstein polynomials: an application for the solution of high even-order differential equations, *Applied Mathematics Letter*, V.24, N.4, 2011, pp.559-565.

[35] Duman, O. Nonlinear Bernstein-type operators providing a better error estimation, *Miskolc Mathematical Notes*, V.15, N.2, 2014, pp.393-400.

[36] Mandal, B.N., Bhattacharya, S. Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, V.190, N.2, 2007, pp.1707-1716.

[37] Rivlin, T.J. *An Introduction to the Approximation of Functions*, New York, Dover Publications, 1969, 150 p.

[38] Rostamy, D., Alipour, M., Jafari, H., Baleanu, D. Solving multi-term orders fractional differential equations by operational matrices of BPs with convergence analysis, *Romanian Reports in Physics*, V.65, N.2, 2013, pp.334-349.

[39] Yousefi, S.A., Behroozifar, M. Operational matrices of Bernstein polynomials and their applications,