دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم توابع ∂-تقریباً-منظم

سمیه نادی[۱*]، جواد وکیلی[۲]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران.
(۲) استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۰۵   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۲۰

چکیده

با اینکه توابع تقریباً-منظم در حالت کلی محدب نیستند، ولی خصوصیاتی را دارا هستند که انتظار می‌رود در توابع محدب و یا C^2 - پایینی یافت شود. کلاس توابع تقریباً-منظم، شامل توابع محدب، C^2 - پایینی، قویا متمایل[1] و... است. این توابع در ابتدا روی فضاهای با بعد متناهی و با استفاده از زیرمشتق تقریبی تعریف شدند و سپس تعریف این توابع به روی فضاهای باناخ و هیلبرت گسترش داده شد. در این مقاله، توابع تقریباً-منظم پارامتری با استفاده از زیرمشتق حدی تعریف می‌شوند. همچنین به تعریف زیرمشقات جزئی مرتبه دوم توابع دو متغیره نسبت به متغیرهایشان با استفاده از هم‌مشتق نگاشت زیرمشتق مرتبه اول می‌پردازیم. سپس ارتباط بین یکنوایی ماکسیمال زیرمشتقات جزئی مرتبه اول این توابع با نیم‌معین مثبت بودن نگاشت هم‌مشتق زیرمشتق جزئی مرتبه اول بررسی می‌شود. سرانجام شرایط لازم و کافی برای محدب بودن توابع ∂ - تقریباً-منظم برحسب نیم‌معین مثبت بودن نگاشت زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تقریباً-منظم، نگاشت یکنوای ماکسیمال، زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم، هم‌مشتق، آنالیز تغییرات.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: s.nadi229@gmail.com

1. Strongly amenable

۱. مقدمه

توابع تقریباً–منظم[1] برای اولین بار در مرجع [۱۲] در فضاهای با بعد متناهی معرفی شدند. در مراجع [۲،۱]، تعریف توابع تقریباً–منظم به فضاهای باناخ و هیلبرت گسترش داده شده است و سپس اثبات شده است که بسیاری از خواص این توابع روی $\mathbb{R}^n$ همچنان روی این فضاها نیز برقرارند. همچنین نتایج و خصوصیات و کاربردهایی از این توابع در مراجع [۱۳،۱۱،۱۰،۶] آورده شده است.

کلاس توابع تقریباً–منظم، شامل توابع محدب، C^2- پایینی[2]، قویاً متمایل[3] و... است[۱۳]. هدف اصلی از بررسی توابع تقریباً–منظم، اثبات خواص مهمی از توابع محدب و نزدیک محدب است که می‌توان آنها را در کلاس بزرگی از توابع غیرمحدب یافت. برای مثال می‌دانیم که تابع C^2، $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in\mathbb{R}^n$، ماتریس هسین $\nabla^2 f(x)$ نیم‌معین مثبت باشد. شکل‌های دیگری از این قضیه بدون در نظرگرفتن شرط C^2 و با انواع مختلفی از زیرمشتقات مرتبه دوم در مراجع [۳،۴،۱۴] اثبات شده است.

در مراجع [۸،۵]، توابع تقریباً منظم پارامتری معرفی شده‌اند و نویسندگان به بررسی ارتباط یکنوایی ماکسیمال و نگاشت هم‌مشتق[4] توابع مجموعه مقدار روی فضاهای با بعد متناهی و نامتناهی پرداخته‌اند و کاربردهایی از آن را در پایداری کامل سیستم‌های تغییراتی پارامتری ارائه داده‌اند.

همچنین در مرجع [۴]، نویسندگان ارتباط بین یکنوایی ماکسیمال نگاشت‌های مجموعه مقدار و نیم‌معین مثبت بودن نگاشت هم‌مشتق در فضاهای هیلبرت را بررسی‌کرده‌اند. همچنین شرایط لازم و کافی برای محدب و قویا محدب بودن توابع C^2- پایینی برحسب نیم‌معین مثبت بودن نگاشت زیرمشتق مرتبه دوم داده شده است.

این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است:

بخش ۲ شامل بعضی مفاهیم مورد استفاده در این مقاله است. در بخش ۳، توابع تقریباً منظم پارامتری را با استفاده از زیرمشتق حدی تعریف می‌کنیم. همچنین به تعریف زیرمشقات جزئی مرتبه دوم توابع دومتغیره با استفاده از هم‌مشتق نگاشت زیرمشتق مرتبه اول می‌پردازیم و سپس شرایط لازم و کافی برای محدب بودن توابع ∂–تقریباً–منظم برحسب نیم‌معین مثبت بودن زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم ارائه می‌دهیم.

۲. مفاهیم اولیه

در این بخش، بعضی تعاریف و قضایای پایه‌ای مورد استفاده در این مقاله از مرجع [۷] بازنویسی می‌شوند. فرض می‌کنیم X و Y فضاهای باناخ و X^* و Y^* دوگان آنها باشند. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که برای نگاشت مجموعه مقدار $F:X\rightrightarrows Y$، $dom\,F$ و $gph\,F$ به‌صورت $dom F:=\{x\in X\,|\,F(x)\neq\varnothing\}$ و $gph\,F:=\{(x,y)\in X\times Y\,|\,y\in F(x)\}$ تعریف می‌شوند.

تعریف ۱. برای نگاشت مجموعه مقدار $F:X\rightrightarrows X^*$، $\limsup_{x\to\bar{x}} F(x)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\limsup_{x\to\bar{x}} F(x):=\left\{\begin{matrix} x^*\in X^*\,|\,\exists x_k\to\bar{x},\ x_k^*\xrightarrow{w^*} \\ x^*\ \text{s.t.}\ x_k^*\in F(x_k)\ \forall k\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}.$$

تعریف ۲. (نرمال‌های تعمیم‌یافته) فرض کنید Ω یک زیرمجموعه غیرتهی از X باشد.

الف) مجموعه ε–نرمال‌های Ω در $\bar{x}\in\Omega$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega):=\left\{x^*\in X^*\,|\,\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}}\frac{\langle x^*,x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|}\le\varepsilon\right\}.$$

1. Prox-regular
2. Lower-C^2
3. Strongly amenable
4. Coderivative

منظور از نماد $x \xrightarrow{\Omega} \overline{x}$ این است که $x \to \overline{x}$ و $x \in \Omega$.

اگر در این تعریف ε را مساوی صفر قرار دهیم، مجموعه $\hat{N}(\overline{x},\Omega) := \hat{N}_0(\overline{x},\Omega)$ مخروط نرمال فرشه نامیده می‌شود. اگر $\overline{x} \notin \Omega$، آنگاه برای هر $\varepsilon \geq 0$، $\hat{N}_\varepsilon(\overline{x},\Omega) := \varnothing$.

ب) فرض کنید $\overline{x} \in \Omega$، مخروط نرمال اصلی Ω در $\overline{x}$ را با $N(\overline{x},\Omega)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$N(\overline{x},\Omega) := \limsup_{\substack{x \to \overline{x} \\ \varepsilon \downarrow 0}} \hat{N}_\varepsilon(x,\Omega).$$

قرارداد: اگر $\overline{x} \notin \Omega$، آنگاه، $N(\overline{x},\Omega) := \varnothing$.

تعریف ۳. نگاشت $F: X \rightrightarrows Y$ با $dom\,F \neq \varnothing$ را در نظر بگیرید.

الف) ε-هم‌مشتق F در $(x,y) \in gph\,F$، نگاشت مجموعه مقدار $\hat{D}^*_\varepsilon F(x,y): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{D}^*_\varepsilon F(x,y)(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*,-y^*) \in \hat{N}_\varepsilon((x,y); gph\,F) \right\}.$$

اگر در این تعریف ε را مساوی صفر قرار دهیم، این هم مشتق، هم‌مشتق فرشه F در (x,y) نامیده می‌شود و با $\hat{D}^*F(x,y)$ نشان داده می‌شود. بنابراین،

$$\hat{D}^*F(x,y)(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*,-y^*) \in \hat{N}((x,y); gph\,F) \right\}.$$

ب) هم‌مشتق نرمال F در $(\overline{x},\overline{y}) \in gph\,F$، نگاشت مجموعه مقدار $D^*_N F(\overline{x},\overline{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^*_N F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := \left\{ x^* \in X^* \mid (x^*,-y^*) \in N_\varepsilon((\overline{x},\overline{y}); gph\,F) \right\}$$

$$= \{x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon_k \downarrow 0, (x_k,y_k) \xrightarrow{gph\,F} (\overline{x},\overline{y}), (x^*_k,y^*_k) \xrightarrow{w^*} (x^*,y^*) \text{ s.t. } (x^*_k,-y^*_k) \in \hat{N}_{\varepsilon_k}((x_k,y_k), gph\,F)\}.$$

ج) هم‌مشتق مخلوط F در $(\overline{x},\overline{y}) \in gph\,F$، نگاشت مجموعه مقدار $D^*_M F(\overline{x},\overline{y}): Y^* \rightrightarrows X^*$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^*_M F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := \{x^* \in X^* \mid \exists \varepsilon_k \downarrow 0, (x_k,y_k) \xrightarrow{gph\,F} (\overline{x},\overline{y}), x^*_k \xrightarrow{w^*} x^*, \| y^*_k - y^* \| \to 0 \text{ s.t. } (x^*_k,-y^*_k) \in \hat{N}_{\varepsilon_k}((x_k,y_k), gph\,F)\}.$$

در هر یک از حالات فوق، اگر $(\overline{x},\overline{y}) \notin gph\,F$، آنگاه برای هر $y^* \in Y^*$

$$\hat{D}^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*) = D^*_M F(\overline{x},\overline{y})(y^*) = D^*_N F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := \varnothing.$$

تنها تفاوت هم‌مشتق نرمال و مخلوط در این است که در تعریف هم‌مشتق نرمال برای هر دو دنباله x^*_k و y^*_k همگرایی ضعیف استفاده شده است درصورتی‌که در تعریف هم‌مشتق مخلوط، $x^*_k \xrightarrow{w^*} x^*$ و $y^*_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y^*$.

با توجه به تعریف بالا، به‌ازای هر $(\overline{x},\overline{y}) \in gph\,F$ و هر $y^* \in Y^*$، داریم:

$$\hat{D}^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*) \subseteq D^*_M F(\overline{x},\overline{y})(y^*) \subseteq D^*_N F(\overline{x},\overline{y})(y^*)$$

اگر $\dim Y < \infty$، در این‌صورت:

$$D^*_M F(\overline{x},\overline{y})(y^*) = D^*_N F(\overline{x},\overline{y})(y^*) := D^*F(\overline{x},\overline{y})(y^*)$$

تعریف ۴. فرض کنید $\varphi: X \to \overline{\mathbb{R}}$ در $\overline{x} \in X$ متناهی باشد. مجموعه

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \left\{ \begin{array}{l} x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \\ N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); epi\ \varphi) \end{array} \right\}$$

را زیرمشتق اصلی φ در $\bar{x}$ می‌نامیم. اگر $|\varphi(\bar{x})| = \infty$، آنگاه $\partial\varphi(\bar{x}) := \varnothing$.

تعریف ۵. نگاشت $T : X \rightrightarrows X^*$ را در نظر بگیرید [۴].

الف) T روی X یکنواست اگر

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0,$$
$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in gphT.$$

T را روی X یکنوای ماکسیمال گوییم هرگاه برای هر نگاشت یکنوای دیگری مانند S، با شرط $gphT \subset gphS$، داشته باشیم $gphT = gphS$.

ب) T روی X زیریکنوا[۱] است اگر $r > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $T + rI$ یکنوا باشد. به‌عبارت دیگر،

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -r \| u_1 - u_2 \|^2,$$
$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in gphT.$$

ج) T در $\bar{u} \in domT$ شبه موضعاً زیریکنوا[۲] است هرگاه اگر همسایگی U از $\bar{u}$ و $r > 0$ وجود داشته باشد به‌طوریکه

$$\langle v_1 - v_2, u_1 - u_2 \rangle \geq -r \| u_1 - u_2 \|^2,$$
$$(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in gphT \cap (U \times X).$$

۳. زیر مشتقات مرتبه دوم توابع تقریباً- منظم

تابع $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\bar{x} \in dom f$. زیرمشتق تقریبی[۳] $\partial_p f(\bar{x})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳].

گوییم $x^* \in X^*$ در $\partial_p f(\bar{x})$ قرار دارد هرگاه اگر $r > 0$ و $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوریکه برای هر $x \in B_\varepsilon^{\bar{x}}$ داشته باشیم،

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}) + r \| x - \bar{x} \|^2.$$

اگر $f(\bar{x}) = \infty$، در این‌صورت قرار می‌دهیم، $\partial_p f(\bar{x}) = \varnothing$.

تعریف ۶. تابع $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ را تقریبا-منظم در $\bar{x}$ برای $\bar{v}$ گوییم هرگاه f در $\bar{x}$ متناهی و موضعاً نیم‌پیوسته پایینی باشد و $\bar{v} \in \partial_p f(\bar{x})$. علاوه بر این، $r \geq 0$ و $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$f(x') \geq f(x) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{r}{2} \| x' - x \|^2,$$
$$x, x' \in B_\varepsilon^{\bar{x}},\ v \in \partial_p f(x),$$
$$|v - \bar{v}| < \varepsilon, f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon.$$

اگر شرایط فوق برای هر $\bar{v} \in \partial_p f(\bar{x})$ برقرار باشد، f را تقریباً-منظم در $\bar{x}$ گوییم.

حال تعریف توابع تقریباً-منظم را به توابع دو متغیره تعمیم می‌دهیم. در این تعریف از زیرمشتق حدی به‌جای زیرمشتق تقریبی استفاده شده است. یادآوری می‌کنیم که $\partial_p f(x) \subset \partial f(x)$.

تعریف ۷. (∂-تقریباً-منظم پارامتری) فرض کنید تابع $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ در $(\bar{x}, \bar{u}) \in dom f$، موضعاً نیم‌پیوسته پایینی باشد. $f(x,u)$ را ∂-تقریباً-منظم نسبت به x در $\bar{x}$ برای $\bar{v}$ با پارامتری سازی سازگار با u در $\bar{u}$ گوییم هرگاه اگر $\bar{v} \in \partial_x f(\bar{x}, \bar{u})$ و همسایگی‌های U از $\bar{u}$، X از $\bar{x}$، V از $\bar{v}$، $\varepsilon > 0$ و $r \geq 0$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$f(x', u) \geq f(x, u) + \langle v, x' - x \rangle - \frac{r}{2} \| x' - x \|^2,$$
$$x' \in X,\ v \in \partial_x f(x, u), v \in V,$$
$$x \in X, u \in U, f(x, u) < f(\bar{x}, \bar{u}) + \varepsilon.$$

اگر f به‌ازای هر $\bar{v} \in \partial_x f(\bar{x}, \bar{u})$، ∂-تقریباً-منظم نسبت به x در $(\bar{x}, \bar{u})$ باشد، f را ∂-تقریباً-منظم نسبت به x در $(\bar{x}, \bar{u})$ گوییم (بدون ذکر $\bar{v}$). f را ∂-تقریباً-منظم نسبت به x گوییم (بدون ذکر

1. Hypomonotone
2. Semilocally hypomonotone
3. Proximal

$\bar{x}$ یا $\bar{u}$) اگر f، ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در هر $(\bar{x},\bar{u}) \in dom\, f$ باشد.

لم ۱. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ در $(\bar{x},\bar{u}) \in dom\, f$، موضعاً نیم‌پیوسته پایینی باشد. اگر f، ∂ -تقریباً-منظم نسبت به x در $\bar{x}$ برای $\bar{v}$ با پارامتری‌سازی سازگار با u در $\bar{u}$ باشد، در این‌صورت $g_{\bar{u}}(x) := \partial_x f(x,\bar{u})$، شبه موضعاً زیریکنوا در $\bar{x}$ است.

اثبات. با استفاده از تعریف فوق، همسایگی‌های U از $\bar{u}$، X از $\bar{x}$، V از $\bar{v}$، $\varepsilon > 0$ و $r \geq 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$f(x',\bar{u}) \geq f(x,\bar{u}) + \langle v, x'-x\rangle - \frac{r}{2}\|x'-x\|^2,$$
$$f(x,\bar{u}) \geq f(x',\bar{u}) + \langle v', x-x'\rangle - \frac{r}{2}\|x-x'\|^2,$$
$$v \in \partial_x f(x,\bar{u}), v' \in \partial_x f(x',\bar{u}),$$
$$v,v' \in V,\ x,x' \in X,\ f(x,\bar{u}) < f(\bar{x},\bar{u}) + \varepsilon, f(x',\bar{u}) < f(\bar{x},\bar{u}) + \varepsilon.$$

با جمع کردن دوطرف نامساوی‌های بالا داریم:

$$\langle v-v', x-x'\rangle \geq -r\,|x-x'|^2,$$
$$v \in \partial_x f(x,\bar{u}), v' \in \partial_x f(x',\bar{u}),$$
$$v,v' \in V,\ x,x' \in X.$$

این بدان معناست که $\partial_x f(x,\bar{u})$، در $\bar{x}$ شبه موضعاً زیریکنواست.

قضیه ۲. فرض کنید $T:\mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$، روی $\mathbb{R}^n$ یک نگاشت شبه موضعاً زیریکنوا و $domT$ محدب باشد. در این‌صورت T روی $\mathbb{R}^n$، زیریکنوا است.

اثبات. $(u,v),(u',v') \in gphT$ را به‌دلخواه انتخاب می‌کنیم. با توجه به محدب بودن $domT$، داریم $[u,u'] \subset domT$. چون T شبه موضعاً زیریکنواست، به‌ازای هر $x \in [u,u']$، $\gamma_x > 0$ و $r_x > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\langle y_1-y_2, x_1-x_2\rangle \geq -r_x\|x_1-x_2\|^2,$$
$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in gphT \bigcap (\text{int}B^x_{\gamma_x} \times \mathbb{R}^n). \quad (۱)$$

از طرفی چون $[u,u']$ فشرده است، می‌توان $x_i \in [u,u']$، $i=1,2,\ldots,n$ را چنان انتخاب کرد که

$$[u,u'] \subset \bigcup_{i=1}^{n}(\text{int}\,B^{x_i}_{\gamma_{x_i}}).$$

می‌توان $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ را چنان یافت که برای هر $j \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ و $i_j \in \{1,2,\ldots,n\}$ داشته باشیم $[\hat{u}_j,\hat{u}_{j+1}] \subset B^{x_{i_j}}_{\gamma_{x_{i_j}}}$، که در آن $\hat{u}_j = u + t_j(u'-u)$ از طرفی به‌ازای هر $j \in \{0,\ldots,m\}$، $\hat{u}_j \in [u,u'] \subset domT$، بنابراین $\hat{v}_j \in T(\hat{u}_j)$ وجود دارد. قرار می‌دهیم $\hat{v}_0 = v$ و $\hat{v}_m = v'$.

با توجه به رابطه (۱) و با انتخاب $r = \max\{r_{x_1}, r_{x_2},\ldots,r_{x_n}\}$، داریم:

$$(t_{j+1}-t_j)\langle \hat{v}_{j+1}-\hat{v}_j, u'-u\rangle = \langle \hat{v}_{j+1}-\hat{v}_j, \hat{u}_{j+1}-\hat{u}_j\rangle \geq -r\|\hat{u}_{j+1}-\hat{u}_j\|^2 = -r(t_{j+1}-t_j)^2\|u'-u\|^2.$$

بنابراین

$$\langle v'-v, u'-u\rangle = \sum_{j=0}^{m-1}\langle \hat{v}_{j+1}-\hat{v}_j, u'-u\rangle \geq \sum_{j=0}^{m-1} -r(t_{j+1}-t_j)\|u'-u\|^2 = -r\|u'-u\|^2.$$

بدین صورت اثبات کامل می‌شود.

نگاشت $\varphi: \mathrm{X}\times\mathrm{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ را در نظر بگیرید. نگاشت زیرمشتق جزئی مرتبه اول $\partial_x\varphi: X\times Y \rightrightarrows X^*$ را به‌صورت مجموعه زیرمشتقات نگاشت $\varphi_y := \varphi(0,y)$ در x تعریف می‌کنیم. اکنون زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم نگاشت φ، نسبت به تغییرهایش را تعریف می‌کنیم. مشتقات جزئی مرتبه دوم نگاشت‌های دومتغیره، نسبت به یک متغییر در مرجع [۴] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

تعریف۸. فرض کنید $\varphi: \mathrm{X}\times\mathrm{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ در $(\bar{x},\bar{y}) \in X\times Y$ متناهی باشد و $\bar{v} \in \partial_x\varphi(\bar{x},\bar{y})$

نگاشت $g_{\bar{x}}: Y \rightrightarrows X^*$ را با ضابطه $g_{\bar{x}}(y) = \partial_x \varphi(\bar{x}, y)$ تعریف می‌کنیم. در این‌صورت:

الف) زیرمشتق مرتبه دوم جزئی مخلوط $\partial^2_{M,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v}) : X^{**} \rightrightarrows Y^*$ و زیرمشتق مرتبه دوم جزئی نرمال $\partial^2_{N,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v}) : X^{**} \rightrightarrows Y^*$ تابع φ به‌ترتیب نسبت به x و y در $(\bar{x},\bar{y})$ وابسته به $\bar{v}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial^2_{M,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w) := D^*_M(g_{\bar{x}})(\bar{y},\bar{v})(w), w \in X^{**},$$

$$\partial^2_{N,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w) := D^*_N(g_{\bar{x}})(\bar{y},\bar{v})(w), w \in X^{**}.$$

اگر این دو هم‌مشتق مخلوط و نرمال یکسان باشند (به‌خصوص در حالت تابع $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$)، در این‌صورت

$$\partial^2_{M,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w) = \partial^2_{N,yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w) := \partial^2_{yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w)$$

ب) زیرمشتق مرتبه دوم جزئی ترکیبی $\breve{\partial}^2_{yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v}) : X^{**} \rightrightarrows Y^*$ تابع φ به‌ترتیب نسبت به x و y در $(\bar{x},\bar{y})$ وابسته به $\bar{v}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\breve{\partial}^2_{yx}\varphi(\bar{x},\bar{y},\bar{v})(w) := \hat{D}^*(g_{\bar{x}})(\bar{y},\bar{v})(w), w \in X^{**}.$$

یادآوری می‌کنیم که نگاشت مجموعه مقدار $T : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ را نیم‌معین مثبت[1] گوییم اگر برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ و هر $z \in T(u)$ داشته باشیم، $\langle z, u\rangle \geq 0$. بنابراین با شرایط قضیه زیر می‌توان گفت که نگاشت زیرمشتقات جزئی مرتبه دوم، نیم معین مثبت‌اند.

قضیه۳. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ نسبت به x تقریباً‌–منظم باشد و دامنه نگاشت $g_x : \mathbb{R}^d \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ که با ضابطه $g_x(y) := \partial_x f(x,y)$ تعریف می‌شود، محدب وگراف g_x بسته باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

الف) g_x روی $\mathbb{R}^d$، یکنوای ماکسیمال است.

ب) به‌ازای هر $z \in \breve{\partial}^2_{yx} f(x,y,v)(w)$، داریم: $\langle z, w\rangle \geq 0$.

ج) به‌ازای هر $z \in \partial^2_{yx} f(x,y,v)(w)$، داریم: $\langle z, w\rangle \geq 0$.

اثبات. طبق لم ۱، g_x روی $\mathbb{R}^d$ شبه‌موضعاً زیر یکنواست و بنابراین با استفاده از قضیه ۵،۳ از مرجع [۴] و با توجه به تعریف $\breve{\partial}^2_{yx}\varphi(x,y,v)(w) = \hat{D}^*(g_x)(y,v)(w)$، از (الف) به (ب) می‌رسیم.

(ب)$\Leftarrow$(ج)

چون در فضای با بعد متناهی، $D^*_M g_x(y,v)(w) = D^*_N g_x(y,v)(w)$ و همواره

$$\hat{D}^* g_x(y,v)(w) \subset D^*_N g_x(y,v)(w),$$

اثبات سرراست است.

(ج)$\Leftarrow$(الف)

طبق لم ۱، g_x روی $\mathbb{R}^d$ شبه موضعا زیریکنواست و بنابراین با استفاده از قضیه۲، g_x روی $\mathbb{R}^d$ زیریکنواست. اثبات با توجه به متناهی بودن فضا و $\partial^2_{yx} f(x,y,v)(w) = D^*_M g_x(y,v)$ و با استفاده از قضیه ۳.۷ از مرجع [۴]، کامل می‌شود.

قضیه۴. فرض کنید $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$، ∂–تقریباً–منظم باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

الف) f روی $\mathbb{R}^n$، محدب است.

ب) به‌ازای هر $z \in \breve{\partial}^2_{yx} f(x,y,v)(w)$، داریم: $\langle z, w\rangle \geq 0$.

ج) به‌ازای هر $z \in \partial^2_{yx} f(x,y,v)(w)$، داریم: $\langle z, w\rangle \geq 0$.

اثبات. به‌طریق مشابه با قضیه قبل انجام می‌شود.

تذکر. چون توابع C^2-پایینی، تقریبا منظم هستند، بنابراین این قضیه، قضیه ۴،۱ از مرجع [۴] را تعمیم می‌دهد.

1. Positive semi-definite

نگاشت $T:X\rightrightarrows X^*$ را در نظر بگیرید. T را روی X قویا یکنوا[1] با ثابت $\kappa>0$ گوییم هرگاه اگر $T-\kappa I$ روی X یکنوا باشد.

قضیه۵. فرض کنید $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^d\to\overline{\mathbb{R}}$ نسبت به x، تقریباً-منظم باشد و دامنه نگاشت $g_x:\mathbb{R}^d\rightrightarrows\mathbb{R}^n$ که با ضابطه $g_x(y):=\partial_x f(x,y)$ تعریف می‌شود، محدب و گراف g_x بسته باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

الف) g_x روی $\mathbb{R}^d$، قویا یکنوای ماکسیمال با ثابت $\kappa>0$ است.

ب) به‌ازای هر $z\in\breve{\partial}^2_{yx}f(x,y,v)(w)$، داریم:

$$\langle z,w\rangle\geq\kappa\|w\|^2$$

ج) به‌ازای هر $z\in\partial^2_{yx}f(x,y,v)(w)$، داریم:

$$\langle z,w\rangle\geq\kappa\|w\|^2$$

اثبات. الف $\Leftarrow$ب و الف $\Leftarrow$ج.

تعریف می‌کنیم $S=g_x-\kappa I$. بنابراین S روی $\mathbb{R}^d$ یکنوای ماکسیمال است. طبق قضیه ۱۶۲ از مرجع [۷]، داریم،

$$\breve{\partial}^2_{yx}f(x,y,v)(w)=$$
$$\hat{D}^*g_x(y,v)(w)=$$
$$\hat{D}^*S(y,v-\kappa y)(w)+\kappa w,$$
$$(y,v)\in gph\, g_x,$$
$$\partial^2_{yx}f(x,y,v)(w)=$$
$$D^*g_x(y,v)(w)=$$
$$D^*S(y,v-\kappa y)(w)+\kappa w.$$
$$(y,v)\in gph\, g_x,$$

با استفاده از قضیه ۳،۲ و ۳،۷ از مرجع [۴] داریم،

$$z\in\hat{D}^*S(y,v-\kappa y)(w)+\kappa w$$
$$\Rightarrow\langle z-\kappa w,w\rangle\geq 0,$$
$$z\in D^*S(y,v-\kappa y)(w)+\kappa w$$
$$\Rightarrow\langle z-\kappa w,w\rangle\geq 0.$$

به‌عبارت دیگر، $\langle z,w\rangle\geq\kappa\|w\|^2$.

ب $\Leftarrow$الف و ج$\Leftarrow$الف.

اثبات. با برگشت‌پذیری تمام مراحل اثبات الف $\Leftarrow$ب و با توجه به قضیه مینتی که g_x قویا یکنوای ماکسیمال است اگر و تنها اگر $S=g_x-\kappa I$ یکنوای ماکسیمال باشد، کامل می‌شود.

1. Strongly monotone

فهرست منابع

[1] Bernard, F., Thibault, L., (2000). Prox-regular functions in Hilbert spases. Mathematical Analysis and Applications, 303, 1-14.

[2] Bernard, F., Thibault, L., (2004). Prox-regularity functions and sets in Banach spases. Set-Valued Analysis, 12, 25-47.

[3] Chieu, N. H., Chuong, T. D., Yao, J.-C., Yen, N. D., (2011). Characterizing convexity of a function by its Frechet and limiting second-order subdifferentials. Set-Valued Analysis, 19, 75-96.

[4] Chieu, N. H., Lee, G. M., Mordukhovich, B. S., Nghia, T. T. A., (2016). Coderivative characterizations of maximal monotonicity for set-valued mappings. Journal of Convex Analysis, 23, 461-480.

[5] Levy, A. B., Poliquin, R. A., Rockafellar, R.T., (2000). Stability of locally optimal solutions. Siam Journal on Optimization, 10, 580-604.

[6] Mifflin, R., Sagastizaabal, C., (2004). VU-smoothness and proximal point results for some nonconvex functions. Optimization Methods & Software, 19, 463-478.

[7] Mordukhovich, B. S., (2006). Variational analysis and generalized differetiation, *I* : Basic Theory, *II* : Applications. Springer, Berlin.

[8] Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., Nhi, N. T. Y., (2014). Partial second-order subdifferentials in variational analysis and optimization. Numerical Functional Analysis and Optimization, 35, 1113-1151.

[9] Mordukhovich, B. S., Nghia, T. T. A., (2016). Local monotonicity and full stability for parametric variational systems. Siam Journal on Optimization, 26, 1032-1059.

[10] Moudafi, A., (2004). An algorithmic approach to prox-regular variational inequalities. Applied Mathematics and Computation, 155, 845-852.

[11] Poliquin, R. T., Rockafellar, R.T., (1996). Generalized Hessian properties of regularized nonsmooth functions . Siam Journal on Optimization, 6, 1121-1137.

[12] Poliquin, R. T., Rockafellar, R.T., (1996). Prox-regular functions in variational analysis. Transactions of the American Mathematical Society, 348, 1805-1838.

[13] Rockafellar, R.T., Wets, R. J-B., (1998). Variational analysis. Springer, Berlin.

[14] Yang, X. Q., (1994). Generalized second-order characterizations of convex functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 82, 173-180.