

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال سوم، شماره دهم، تابستان ۱۳۹۶

شماره شاپا: ۱۶۹-۰۱۶۸۲

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## مدل تحلیل پوششی داده‌های کارایی هزینه متمرکز

بیژن رحمانی پرچکالایی\*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد نور، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۱/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۲۳

### چکیده

اندازه کارایی هزینه، هزینه منبع توسط تولید خروجی است. در حالی که مدل‌های کارایی هزینه برای هر واحد تصمیم‌گیری هدف‌های مجزایی قرار می‌دهند، حالت‌هایی وجود دارد که تصمیم‌گیرنده مرکزی هدف‌های فوق را جستجو و در عین حال تلاش می‌کند کارایی هزینه مصرف کل را کمینه کند. در این مقاله وجود تصمیم‌گیرنده مرکزی را در نظر می‌گیریم. در چنین حالتی تصمیم‌گیرنده به کمینه‌سازی کارایی هزینه واحدهای مجزا علاقه‌مند است و در همان حال می‌خواهد مصرف ورودی کل کاهش یا تولید کل خروجی افزایش یابد. ما مدل مارایی هزینه متمرکز جدید بر پایه مدل کارایی هزینه فارل و مدل باز تخصیص منبع متمرکز لوزانو و ویلا ارایه می‌دهیم که کارایی هزینه کل تخصیص منبع کاهش یابد، از این رو ممکن است بعضی از ورودی‌ها کاهش یابند. برتری و مزیت‌های این مدل با چند مثال ارایه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** کارایی هزینه، تخصیص منبع متمرکز، تخصیص متمرکز هزینه، کارایی متمرکز هزینه.

## ۱. مقدمه

در این مقاله، روی ارزیابی اندازه‌گیری کارایی هزینه متمرکز در شاحه فعالیت‌های عملی تمرکز می‌کنیم. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تکنیکی غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUs) براساس ماهیت آن است. فارل [۱۹۵۷] تعریف کارایی هزینه را معرفی کرد که نقش معناداری در توسعه مفهوم تحلیل پوششی داده‌ها بازی کرده است. سپس کارایی هزینه توسط فار و همکاران [۱۹۸۵] توسعه داده شد. آن‌ها کارایی هزینه را با استفاده از تکنیک برنامه‌ریزی خطی به دست آوردند. این مدل برنامه‌ریزی خطی علاوه بر داده‌های ورودی و خروجی به قیمت‌های ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده نیاز دارد. تون [۲۰۰۲] مشکلات اندازه‌گیری کارایی هزینه در حضور تفاوت قیمت‌های ورودی‌ها را بیان کرد. برای رفع این مشکلات، او فرض کرد قیمت‌ها ثابت هستند که این فرض آنها را آزاد می‌سازد و در فضای هزینه قرار می‌دهد. خیمنز و مارتینز [۲۰۰۶] کارایی هزینه در دانشگاه‌ها با مدل ارزیابی گروه‌ها برای گروه‌های خودگردان UAB شامل ۴۶ گروه را به دست آوردند. امیرتیموری و همکاران [۲۰۰۶] کارایی هزینه بازه‌ای را بر پایه روش DEA برآورد کردند. جهانشاهلو و همکاران [۲۰۰۷] تحلیل کارایی هزینه را برای داده‌های ترتیبی به کار بردند. مصطفایی و سلجوقی [۲۰۰۹] تحلیل کارایی هزینه را برای داده‌های نادقیق استفاده کردند. اخیراً جهانشاهلو و همکاران [۲۰۱۳] روشی جدید برای اندازه‌گیری کارایی هزینه کل واحدهای تصمیم‌گیرنده با حل تنها یک مساله برنامه‌ریزی خطی ذکر کردند. مظفری و [۲۰۱۴] کارایی درآمد و هزینه در مدل‌های DEA-R به دست آوردند و با مدل‌های DEA استاندارد مقایسه کردند. مطالعات زیادی در رابطه با کارایی هزینه انجام شده است. برای مثال، ری، اس. سی. کیم، اج. چی. [۱۹۹۵]، پوئینگ جونوی، چی. [۲۰۰۰]، مانیاداکیس، ان، تاناسولیس، ای. [۲۰۰۴]، تون، کا. [۲۰۰۲]، تون، کا، ساهو، بی. کا. [۲۰۰۵]، مهدیزاده، ام، تون، کا. [۲۰۱۴] را ببینید.

در مدل‌های کلاسیک DEA واحدهای تصمیم‌گیرنده به طور مجزا روی مرز کارایی تصویر می‌شوند بدون این

تضمین که مصرف کل ورودی‌ها کمینه شود، در حالی که این می‌تواند هدف تصمیم‌گیرنده در بعضی مواقع باشد. شرطی که تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت چتر یک تصمیم‌گیرنده مرکزی و تحت حمایت او باشند زیاد مطالعه نشده است. آشکار است که مدل‌های کلاسیک تجمیع تواید کل را در نظر نمی‌گیرند. لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] مفهوم را برای رفع این مشکل معرفی کردند. مدل معرفی شده یک مدل بازتخصیص منبع BCC است که یک مدل DEA از نوع بازده به مقیاس متغییر می‌باشد. هدف یا کاهش مصرف کل ورودی‌ها یا افزایش تولید کل خروجی‌ها است. شرایطی وجود دارد

که سازمان تحت مدیریت چند سطحی است و تصمیم‌گیرنده محلی نمی‌تواند منابع تعریف شده را با توجه به این که تمام واحد به یک ساختار تعلق دارند، کنترل کند. در این شرایط هدف تصمیم‌گیرنده مرکزی می‌تواند علاوه بر مشخص کردن کارایی واحدها کاهش هزینه کل ورودی‌ها باشد.

لوزانو و ویلا [۲۰۰۵] سه مدل تحلیل پوششی داده‌ها متمرکز که تا حد امکان کاهش می‌دهند را ارائه کردند. اسمیلد و همکاران [۲۰۰۹] تعدیلاتی در مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] انجام و مدل تخصیص مجدد متمرکز BCC (بنکر، چارنز و کوپر) تنها بر پایه واحدهای ناکارا ارائه دادند. آپرسیو و همکاران [۲۰۱۲] مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز برپایه بازده به مقیاس ثابت که بیشتر ماهیت مدیریتی دارد را ارائه دادند. فنگ [۲۰۱۳] برپایه مدل لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] و اسمیلد و همکاران [۲۰۰۹] مدل تخصیص منبع متمرکز کلی را ذکر نمود. که متغییرهای ورودی به متغییرهای تعدیل شده و نشده تقسیم و متغییرهای خروجی به متغییرهای انتقال‌پذیر و غیر انتقال‌پذیر تقسیم کرد. حاتمی مرینی و همکاران [۲۰۱۵] برپایه مدل DEA وزن‌های مشترک برای تخصیص مجدد منبع متمرکز برای تعیین میزان کاهش ورودی‌ها و خروجی‌ها برای هر واحد به طوری که نمره کارایی افزایش یابد به کار بردند. حسین زاده لطفی و همکاران [۲۰۱۲] مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز را برای داده‌های تصادفی استفاده کردند. در این مقاله مدلی ارائه می‌دهیم که هدف تصمیم‌گیرنده

داده‌ها ارایه دادند. این مدل کارایی تکنیکی را با بازده به مقیاس ثابت اندازه‌گیری می‌کند.

مدل مضربی ماهیت ورودی DEA به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} & \text{Max } U'Y_o \\ \text{s.t. } & V'X_o = 1, \\ & -V'X + U'Y \leq 0, \\ & U \geq 0, \quad V \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

می‌توان گفت که مفهوم کارایی هزینه توسط فارل [۱۹۵۷] پیشنهاد شد و توسط فار و همکاران [۱۹۸۵] گسترش یافت. کوپر و همکاران [۱۹۹۶] بعضی محدودیت‌ها در کاربرد واقعی برای داده‌ها وجود دارد. تون [۲۰۰۲] کمبودهای کارایی هزینه در حضور قیمت‌های مختلف در میان واحدهای تصمیم‌گیری را بیان کرد. کامنهو و دایسون [۲۰۰۵] اندازه کارایی هزینه را برای قیمت‌های نادقیق ارزیابی کردند. جهانشاهلو و همکاران [۲۰۰۷] مدل‌هایی با شکل مضربی با قیدهای وزنی اضافی را برای داده‌های ترتیبی معرفی کردند. کوسمنن و پست [۲۰۰۱] و [۲۰۰۳] کران‌های بالا و پایین برای کارایی هزینه کل به دست آوردند. مصطفایی و سلجوقی [۲۰۱۰] مدل‌های آن‌ها را برای به دست آوردن کران‌های بالا و پایین اصلاح کردند. کارایی هزینه را می‌توان توانایی واحد تصمیم‌گیرنده وقتی هزینه ورودی برای تولید فعلی کمینه است تعبیر نمود. مدلی که استفاده می‌کنیم با بازده به مقیاس متغییر است. برای درک بهتر و ساده‌تر مدل کارایی هزینه و مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز، و چون رسم شکل در فضای سه بعدی و نشان دادن ابرصفحه‌های برشی کارایی هزینه در این فضا ساده نیست، مثالی در  $T_c$  با دو ورودی و یک خروجی که مقدار آن برای تمام واحدها برابر یک است را در نظر می‌گیریم. برای درک تعریف کارایی هزینه در این مقاله، مثالی با هفت واحد تصمیم‌گیری (از کامنهو و دایسون [۲۰۰۸]) در نظر می‌گیریم. این واحدها شامل دو ورودی  $(I_1, I_2)$  باقیمت‌های ورودی  $C_1, C_2$  و یک خروجی  $(O)$  برای هر واحد تصمیم‌گیری که ۱ است، می‌باشد. مجموعه داده‌ها در جدول ۱، و مجموعه امکان تولید در شکل ۱ داده شده است. مرز تکه‌ای خطی شامل  $E, D, C$  و  $F$  که مرز کارایی تکنیکی است.

یعنی کاهش هزینه کل را تحقق بخشد. مقاله به شرح زیر بخش‌بندی شده است: در بخش ۲، اندازه کارایی هزینه و مدل تخصیص مجدد متمرکز به اختصار مرور می‌شود. مدل خود را در بخش ۳ ارایه می‌دهیم، مثال‌ها در بخش ۴ و بخش ۵ شامل نتیجه‌گیری مقاله است.

## ۲. اندازه‌گیری کارایی هزینه

در کاربردهای اقتصادی، اندازه‌گیری دقیق کارایی به تابع تعیین شده بستگی دارد. برای به است آوردن آن از دو روش پارامتری و غیرپارامتری استفاده می‌کنیم. برای به کار بردن روش غیرپارامتری، تعدادی اصول در مورد تکنولوژی تولید استفاده می‌شود. در این تکنولوژی، فرض می‌شود مجموعه امکان تولید مخدب است، و ورودی‌ها و خروجی‌ها با دسترسی آزاد هستند. مجموعه امکان تولیدی که  $S$  خروجی توسط  $m$  ورودی تولید می‌شوند را در نظر می‌گیریم. مجموعه ورودی-خروجی  $(X, Y)$  شدنی است وقتی مجموعه خروجی  $Y$  بتواند از مجموعه ورودی  $X = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  هر ورودی تا خروجی  $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{rj})$  تولید شود. بردار ورودی و خروجی را به ترتیب با  $X$  و  $Y$  نشان می‌دهیم. مجموعه امکان تولید به شرح زیر است

$$T = \{(X, Y) : Y \text{ بتواند از } X \text{ تولید شود}\}$$

روش تحلیل پوششی داده‌ها که توسط چارنز و همکاران [۱۹۷۸] ارایه شد از تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت استفاده کردند. تکنولوژی بازده به مقیاس متغییر، توسط بنکر و همکاران [۱۹۸۴] استفاده شد، با مجموعه امکان تولید زیرمی‌تواند تعریف شود:

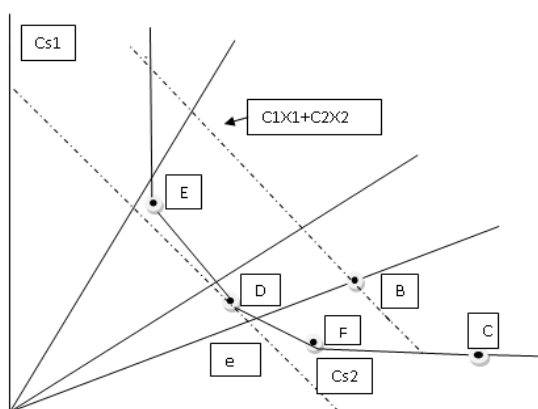
$$\begin{aligned} T_v = \{ & (X, Y) : X \in R_+^m, Y \in R_+^s, X \geq \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, Y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1\}, \\ & \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$T_v$  کوچکترین مجموعه امکان تولید است که می‌توان در مجموعه امکان تولید و اصل دسترسی آزاد و مشاهدات به کار برد. این  $T_v$  به پوسته مخدب دسترسی آزاد مجموعه ورودی-خروجی مشاهدات معروف است. اندازه کارایی تکنیکی توسط فارل [۱۹۵۷] تعریف شد، چارنز و همکاران [۱۹۷۸] در مدل‌های تحلیل پوششی

جدول ۱. داده‌های ورودی و خروجی و قیمت‌های ورودی

DMUs	I <sub>1</sub>	I <sub>2</sub>	O	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>
A	4	3	1	2	3
B	7	3	1	2	3
C	8	1	1	2	3
D	4	2	1	7	3
E	2	4	1	2	3
F	10	1	1	4	6
G	3	7	1	1.5	3.2

شکل ۱. اندازه‌گیری کارایی در فضای ورودی



نقطه B روی مرز مجموعه امکان تولید، که هر دو بر پایه قیمت‌های فعلی برای  $c_1=4$ ,  $c_2=3$  ارزیابی شده است. در شکل ۱، اندازه کارایی داده شده است، که نسبت  $\frac{oe}{OB}$  می‌باشد، که همان هزینه D است، وقتی قیمت‌های فعلی  $c_1=4$ ,  $c_2=3$  می‌باشند. وقتی واحدهای تصمیم‌گیری چند ورودی و خروجی دارند، هزینه کارایی با مدل خطی به دست می‌آید، که بار نخست توسط فارل. همکاران در [۱۹۵۷] ارائه شد:

$$\min \sum_{j=1}^m C_{ij} x_i^p$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j = x_i^p \quad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j \geq y_{rp}, \quad r = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$x_i^p \geq 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

برپایه کارایی تکنیکی، فارل [۱۹۵۷] اندازه هزینه کارایی را با فرض ثابت بودن قیمت‌ها (شاید آن‌ها برای واحدهای گوناگون متفاوت باشد) بیان کرد، اندازه کارایی هزینه برای واحد B در شکل ۱ ارائه شده است، که قیمت ورودی‌ها  $c_1=4$ ,  $c_2=3$  هستند. برای اندازه‌گیری کارایی، یک خط (هزینه)  $(C_1X_1+C_2X_2=k)$  باید رسم کنیم، که شیب آن مساوی با هزینه نسبی در B است. هزینه کل به وضعیت فعلی برای خط هزینه وابسته است که می‌تواند با حرکت موازی در جهت پایین تا مماس بر مرز تولید شود حاصل می‌شود. در شکل ۱، این خط با خط چین  $C_1$ ,  $C_2$  نشان داده شده است. نقطه‌ای که این خط هزینه مماس بر مرز کارایی است، ترکیب ورودی متناظر با کمترین هزینه تولید خروجی برای هر یک از این قیمت‌ها است. حرکت موازی با این خط در به طرف مبدا نتیجه آن کاهش در خروجی است. اندازه کارایی در B نسبت کمترین هزینه (وابسته به نقطه D روی مرز مجموعه امکان تولید) بر هزینه مشاهده شده (وابسته به

کل استفاده شده کاهش یابد و در همان حال خروجی ثابت باقی بماند یا افزایش یابد. یا خروجی کل افزایش یابد و در عین حال ورودی کل افزایش نیابد. چند روش در نوشته‌های تحقیقی ارایه شده است. برای درک بهتر این نکته، مثال قبل با هفت واحد تصمیم‌گیری را در نظر می‌گیریم. جدول ۱ اطلاعات لازم را نشان می‌دهد. جدول ۲ داده اولیه، داده حاصل پس از کاربرد مدل، داده حاصل وقتی فرمول استفاده می‌شود، و کاهش در مدل BCC را نشان می‌دهد. باید توجه نمود که در مدل ذکر شده بالا واحدهای تصمیم‌گیری به تصویر MPSS می‌شوند. شکل ۲ این نکته را نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود، روش بالا کاهش در ورودی از مدل BCC را نشان می‌دهد. این را آشکارا در شکل ۲ می‌توانیم ببینیم. باید توجه کرد که در مدل شعاعی کاهش مصرف هر دو ورودی بیشتر از مدل BCC است.

در فرمول بالا  $C_i$  قیمت ورودی (i) برای واحد تصمیم‌گیری  $p$ ، متغیر  $X_i^p$  است، که در جواب بهین میزان ورودی برای واحد تصمیم‌گیری  $p$  به طوری است که خروجی فعلی با کمترین هزینه تولید شود. کارایی هزینه می‌تواند بر پایه نسبت کمترین هزینه با قیمت‌های فعلی (جواب بهین مدل (۲)) با قیمت‌های فعلی برای واحد تصمیم‌گیری  $p$  به شرح زیر می‌باشد:

$$CE_p = \frac{\sum_{i=1}^m C_{ip} x_i^p}{\sum_{i=1}^m C_{ip} x_{ip}} \quad (3)$$

به سادگی می‌توان ثابت کرد که  $CE_p^* \in [0,1]$ .

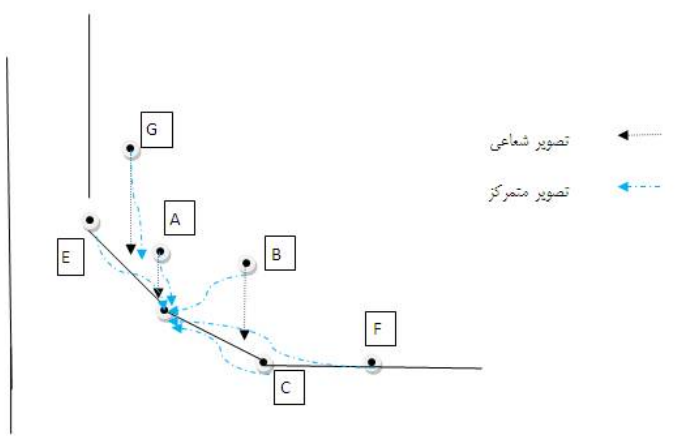
## ۱،۲. مدل تخصیص منبع متمرکز

مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز BCC مانند مدل DEA است که اخیراً توسط لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] ارایه شده است. ایده پشت فرمول جدید آن است که ورودی

جدول ۲. داده‌های ورودی و خروجی و ورودی‌ها و خروجی‌های مدل متمرکز

DMUs	$I_1$	$I_2$	O	$I_{1c}^*$	$I_{2c}^*$	$O_c^*$
A	4	3	1	4	2	1
B	7	3	1	4	2	1
C	8	1	1	4	2	1
D	4	2	1	4	2	1
E	2	4	1	4	2	1
F	10	1	1	4	2	1
G	3	7	1	3.05	2.95	1
Total	38	21	7	27.05	14.95	7

شکل ۲. تجسم متمرکز



ورودی‌ها و خروجی‌های این نقطه عملیاتی به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\hat{x}_{ip} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jp}^* x_{ij}, \quad \forall i, \quad (6)$$

$$\hat{y}_{rp} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jp}^* y_{rj}, \quad \forall r,$$

لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] ثابت کردند برای هر DMUp نقطه‌های عملیاتی که توسط (۶) تصویر می‌شوند کارای پاراتو هستند.

### ۳. مدل کارایی هزینه متمرکز

حالت‌هایی وجود دارد که تمام واحدهای تصمیم‌گیری تحت چتر یک تصمیم‌گیرنده مرکزی قرار دارند که بر آن‌ها نظارت دارد. بیشتر مقولات DEA مقولاتی از این نوع هستند (از قبیل شعبه‌های بانک، گروه‌های دانشگاه، ایستگاه‌های پلیس و غیره). چنین وضعیت‌هایی می‌تواند برای تامین کارایی هزینه که هزینه کل ردی کاهش باید به طوری که تولید خروجی کل ثابت بماند یا افزایش یابد، استفاده شود. فرض کنید  $j=1,2,\dots,n$  شاخص‌ها برای واحدهای تصمیم‌گیری،  $i=1,\dots,m$  و  $r=1,\dots,s$  به ترتیب شاخص ورودی‌ها و خروجی‌ها،  $X_{ij}$  میزان ورودی  $i$  که توسط DMU $_j$  مصرف می‌شود،  $Y_{rj}$  کمیت خروجی  $r$  که توسط DMU $_j$  تولید می‌شود،  $\alpha$  انقباض شعاعی بردار ورودی کل،  $S_i^-$ ،  $S_r^+$  به ترتیب متغیرهای کمکی ورودی‌ها و خروجی‌ها، و  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  بردار تصویر DMU $_l$  باشند. در این مقاله، چون هدف کلی کاهش هزینه کل ورودی‌ها است، با استفاده از مدل متمرکز لوزانو و ویلا [۲۰۰۴] و مدل کارایی هزینه (۳)، مدل زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{r=1}^s \sum_{i=1}^m C_{ir} \hat{x}_{ir} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} x_{ij} = \sum_{r=1}^s \hat{x}_{ir} \quad i=1,\dots,m, \\ & \sum_{r=1}^s \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} y_{kj} \geq \sum_{r=1}^s y_{kr} \quad k=1,\dots,s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jr} = 1 \quad \forall r, \end{aligned}$$

فرض کنید  $l,j=1,2,\dots,n$  شاخص‌ها برای واحدهای تصمیم‌گیری،  $i=1,\dots,m$  و  $r=1,\dots,s$  به ترتیب شاخص ورودی‌ها و خروجی‌ها،  $X_{ij}$  میزان ورودی  $i$  که توسط DMU $_j$  مصرف می‌شود،  $Y_{rj}$  کمیت خروجی  $r$  که توسط DMU $_j$  تولید می‌شود،  $\alpha$  انقباض شعاعی بردار ورودی کل،  $S_i^-$ ،  $S_r^+$  به ترتیب متغیرهای کمکی ورودی‌ها و خروجی‌ها، و  $(\lambda_{1l}, \lambda_{2l}, \dots, \lambda_{nl})$  بردار تصویر DMU $_l$  باشند. مرحله I مدل متمرکز ماهیت ورودی به شرح زیر است:

Min  $\theta$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} \leq \theta \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad \forall i, \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} \geq \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad \forall r, \quad (4) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1, \quad \forall k, \\ & \lambda_{jk} \geq 0, \quad j,k=1,\dots,n, \text{ free } \theta \end{aligned}$$

این یک مدل برنامه ریزی خطی با  $n^2+1$  متغیر و  $m+n+s$  قید است. فرض کنید  $\alpha^*$  مقدار بهین (۴) باشد، آن‌گاه مرحله II از (۴) به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{i=1}^m S_i^- + \sum_{r=1}^s S_r^+ \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} x_{ij} + S_i^- = \theta^* \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad \forall i, \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} y_{rj} - S_r^+ = \sum_{j=1}^n y_{rj}, \quad \forall r, \quad (5) \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_{jk} = 1, \quad \forall k, \\ & \lambda_{jk} \geq 0, \quad j,k=1,\dots,n, \quad S_i^- \geq 0, \end{aligned}$$

$$i=1,\dots,m, \quad S_r^+ \geq 0, \quad r=1,\dots,s.$$

مدل (۵) حل می‌شود. بردار جواب بهین  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  برای هر DMU $_l$  تعریف می‌شود که نقطه عملیاتی است که با آن به هدف می‌رسیم.

که  $z^*$  جواب بهین مدل (۷) است. باید توجه داشت که شیب ابر صفحه در کارایی هزینه برای تحلیل گر یا تصمیم‌گیرنده در دست است، امکان‌پذیر هست که برای یکی از آن‌ها کارا شود و برای دیگری کارا نشود. به بیان دیگر، تصویر تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده در مدل کارایی هزینه می‌تواند به گونه‌ای باشد که تمام نقطه‌ها کارای هزینه نباشند. می‌دانیم که، امکان‌پذیر هست که کارایی هزینه هر واحد تصمیم‌گیرنده برابر ۱ یا بزرگتر از ۱ یا کمتر از ۱ شود، اما کارایی هزینه متمرکز ورودی کل  $\leq 1$  است.

بسادگی می‌توان نشان داد که  $CCE_p^* \in [0,1]$ . اگر  $CCE_p^* = 1$ ، امکان جابه جایی ورودی را داریم، این ایجاب می‌کند که دست کم یک نقطه بهین همان مختصات فبلی خود را داشته باشد.

#### ۴. مثال‌ها

**مثال ۱.** اینک مثالی در نظر می‌گیریم که هفت واحد تصمیم‌گیرنده دارد. این مثال از کامانهو و دایسون [۲۰۰۸] اخذ شده است. جدول ۳ اطلاعات در باره داده‌ها، هزینه ورودی و مقدار بهین ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشد.

$$\hat{X}_{ir} \geq 0 \quad i=1,\dots,m, \quad r=1,\dots,n, \quad (7)$$

$$\lambda_{jr} \geq 0 \quad j,r=1,\dots,n.$$

در فرمول بالا،  $Cir$  قیمت ورودی  $i$  برای  $DMUp$  است،

$\hat{X}_{ir}$  متغیر است، که جواب بهین با میزان ورودی برای  $DMUp$  تعیین می‌شود به طوری که خروجی فعلی با کمترین هزینه تولید شود.

مدل (۷) حل می‌شود. بردار جواب بهین  $(\lambda_{1l}^*, \lambda_{2l}^*, \dots, \lambda_{nl}^*)$  برای هر  $DMU_l$  نقطه عملیاتی تعریف می‌کند که هدف کسب آن است. ورودی‌ها و خروجی‌ها برای این نقطه عملیاتی به شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$\bar{X}_{ip} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jp}^* X_{ij}, \quad \forall i, \quad (8)$$

$$\bar{Y}_{rp} = \sum_{j=1}^n \lambda_{jp}^* Y_{rj}, \quad \forall r$$

کارایی هزینه می‌تواند بر پایه نسبت کمترین هزینه با قیمت‌های فعلی (جواب بهین مدل (۷)) برای  $DMUp$  به شرح زیر است:

$$CCE_p = \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m C_{ir} z_{ir}^p}{\sum_{r=1}^n \sum_{i=1}^m C_{ir} x_{ir}^p} \quad (9)$$

جدول ۳. داده‌های ورودی و خروجی، کارایی هزینه متمرکز و قیمت‌های ورودی

DMUs	$I_1$	$I_2$	$O$	Farrell's CE	$I_{1CCE}^*$	$I_{2CCE}^*$	$O_{CCE}^*$	$C_1$	$C_2$	$C_1I_1+C_2I_2$
A	2	7	1	0.760	7	2	1	2	3	25
B	3	5	1	0.905	5	3	1	2	3	21
C	5	3	1	1.000	5	3	1	2	3	19
D	7	2	1	0.950	7	2	1	2	3	20
E	3	7	1	0.704	7	2	1	2	3	27
F	3	7	1	0.704	7	2	1	4	6	54
G	3	5	1	0.824	5	3	1	1.5	3.2	20.5
	26	36	7		43	17	7			186.5

مشاهده کرد که هزینه کل برابر باست با:

$$C_1I_1+C_1I_2=186.5.$$

بنابر جدول ۳ هزینه کل مدل ما برابر است با:

$$(43*2) + (17*3) = 147$$

کارایی هزینه این داده‌ها برابر 0.52144 است. جدول ۳ نشان می‌دهد که ورودی نخست واحدهای A,B,E,F و G افزایش، اما ورودی دوم آن‌ها کاهش می‌یابد. مطابق جدول بالا و قیمت‌های مفروض می‌توان

**مثال ۲.** مثال دیگری که هشت واحد تصمیم‌گیرنده دارد را در نظر می‌گیریم. این مثال از کامانهو و دایسون [۲۰۰۵] اخذ شده است. جدول ۴ اطلاعات در رابطه با

جدول ۴. داده‌های ورودی و خروجی، کارایی هزینه متمرکز و قیمت‌های ورودی

DMU	$I_1$	$I_2$	0	Farrell's CE	$I_{1CCE}^*$	$I_{2CCE}^*$	$O_{CCE}^*$	$C_1$	$C_2$	$C_1I_1+C_2I_2$
S1	2	7	1	0.794	3	5	1	3	4	34
S2	3	5	1	1	3	5	1	4	3	27
S3	5	3	1	0.931	3	5	1	4	3	29
S4	7	2	1	0.830	3	5	1	3.8	3.2	33
S5	3	7	1	0.730	3	5	1	3	4	37
S6	5	5	1	0.783	3	5	1	3.8	3.2	35
S7	9	2	1	0.643	3	5	1	4	3	42
S8	10	2.5	1	0.670	3	5	1	3	4	40
Total	44	33.5	8		24	40	8			277

**مثال ۳.** مثالی دیگری که شامل هشت واحد تصمیم‌گیرنده است را در نظر می‌گیریم. این مثال از امیرتیموری و همکاران [۲۰۰۶] گرفته شده است. ورودی‌ها شامل کارمندان، میزان بودجه و درآمد فروش گاز در ۲۰۰۳ و خروجی‌ها شامل مدار لوله کشی، تعداد مشتری‌های جدید، میزان شاخه-خطوط و میزان فروش گاز در ۲۰۰۴ می‌باشند. جدول ۵ اطلاعات در باره داده‌ها، هزینه ورودی‌ها، کارایی هزینه و مقدار بهین ورودی‌ها و خروجی‌ها را نشان می‌دهد. قرار می‌دهیم

$$c_1 = 0.05, c_2 = 0.20 \text{ و } c_3 = 0.15 .$$

کارایی هزینه متمرکز این داده‌ها برابر با 0.69314 است. بنابه جدول ۴ ورودی نخست واحدهای  $S_3, S_4$  و  $S_6, S_7$  و  $S_8$  کاهش و ورودی نخست تنها واحد  $S_1$  افزایش می‌یابد. مطابق جدول بالا و قیمت‌های مفروض، می‌توانیم ببینیم که هزینه کل برابر است با:

$$C_1I_1+C_1I_2=277.$$

بنابر جدول ۴، هزینه کل مدل ما برابر است با:

$$(24*4) + (40*3) = 216 .$$

آشکارا مشاهده می‌کنیم که این دو هزینه متفاوت هستند.

جدول ۵. داده‌های ورودی و خروجی و مقدار بهین ورودی‌ها و خروجی‌ها

DMU	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$O_1$	$O_2$	$O_3$	$O_4$	$I_1^*$	$I_2^*$	$I_3^*$	$O_1^*$	$O_2^*$	$O_3^*$	$O_4^*$	$C_1I_1+C_2I_2+C_3I_3$
S1	1.00	0.51	1.00	1.00	1.00	1.00	0.36	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.25
S2	0.54	0.46	0.45	0.27	0.47	0.49	0.27	1.00	0.51	0.68	1.00	1.00	1.00	0.35	0.19
S3	0.38	0.65	0.78	0.37	0.45	0.45	0.24	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.26
S4	0.35	0.42	0.56	0.20	0.28	0.29	0.26	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.19
S5	0.39	0.56	0.62	0.44	0.25	0.34	0.27	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.22
S6	0.45	0.57	0.66	0.41	0.36	0.46	0.79	0.86	0.47	0.60	0.82	0.89	0.89	0.34	0.24
S7	0.33	0.58	0.61	0.22	0.21	0.17	0.41	0.45	0.57	0.66	0.41	0.36	0.46	0.79	0.22
S8	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.45	0.57	0.66	0.41	0.36	0.46	0.79	0.14
S9	0.71	0.41	0.31	0.30	0.76	0.86	0.28	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.16
S10	0.27	0.45	0.30	0.15	0.11	0.07	0.08	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.15
S11	0.81	1.00	1.00	0.56	0.49	0.58	0.46	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.39
S12	0.76	0.41	0.34	0.48	0.63	0.50	0.19	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.17
S13	0.54	0.88	0.98	0.43	0.51	0.31	1.00	0.45	0.57	0.66	0.41	0.36	0.46	0.79	0.35
S14	0.82	0.41	0.53	0.78	0.60	0.91	0.17	0.49	0.34	0.32	0.32	0.60	0.58	0.21	0.20
Total	8.04	7.65	8.46	5.93	6.72	7.01	4.99	7.62	5.75	6.14	5.73	8.17	8.49	4.95	3.13



کارایی هزینه این داده‌ها برابر 0.7842 است. جدول ۵ نشان می‌دهد که ورودی نخست واحدهای  $S_{10}$  و  $S_2, S_5, S_6, S_7, S_8$  افزایش و ورودی نخست بقیه واحدها کاهش می‌یابد. ورودی تنها واحدهای  $S_2$  و  $S_8$  افزایش و ورودی دوم بقیه واحدها کاهش می‌یابد. ورودی سوم واحدهای  $S_2, S_7, S_8$  و  $S_{10}$  افزایش و ورودی سوم بقیه واحدها کاهش می‌یابد. جمع کل ورودی‌ها برابر است که 24.15 اما با استفاده از مدل ما مجموع ورودی‌های کل برابر با 19.51 است. بنا به جدول بالا و قیمت‌های مفروض، مشاهده می‌کنیم که هزینه کل برابر است با:

$$C_1I_1 + C_2I_2 + C_3I_3 = 3.1410$$

مطابق جدول ۵، هزینه کل مدل ما مساوی با:

$$(7.6595 * 0.05 + 5.7871 * 0.2 + 6.1588 * 0.15) = 2.4642$$

است.

## ۵. نتیجه گیری

در مدل کلاسیک کارایی هزینه هدف‌ها برای هر واحد تصمیم‌گیرنده جداگانه محاسبه می‌شود. حالت‌هایی وجود دارد که تصمیم‌گیرنده مرکزی هدف‌های بالا را جستجو می‌کند، در عین حال تلاش می‌کند هدف‌هایی به دست آورد که کارایی هزینه برای مصرف کل کمینه شود. در این مقاله، این حالت را ارزیابی کردیم، و مدلی بر پایه مدل کارایی هزینه فارل و مدل تخصیص مجدد منبع متمرکز لوزانو و ویلا ارایه دادیم که یک تصمیم‌گیرنده می‌تواند هدف‌های فوق را کسب نماید. برای نشان دادن مزیت‌ها و برتری‌های این مدل، چند مثال ارایه شد. نشان دادیم که امکان افزایش بعضی از ورودی‌های یک واحد و در عین حال کاهش دیگر ورودی‌ها وجود دارد، اما کارایی هزینه کل تمام واحدها کاهش می‌یابد. نتیجه این مثال‌ها نشان می‌دهد که کارایی هزینه کل کاهش بیشتری در مقایسه با روش‌های پیشین دارد.

and Industrial Engineering. (2015); 79:195-203.

فهرست منابع

[9] Hosseinzadeh Lotfi, F., Nematollahi, N., Behzadi, M.H., Mirbolouki, M., Moghaddas, Z. Centralized resource allocation with stochastic data. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. (2012); 236:1783-1788.

[10] Gimenez, V., Martinez, J. L. Cost efficiency in the university: A departmental evaluation model. *Economics of Education Review*. (2006); 25: 543-553.

[11] Fang, L. A generalized DEA model for centralized resource allocation, *European Journal of Operational Research*. (2013); 228: 405-412.

[12] Fare, R., Grosskopf, S, Lovell C.A.K. *The measurement of efficiency of production*, Dordrecht MA: Kluwer Academic Publisher; (1985).

[13] Farrell, M.J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*. (1957). 120: 253-81.

[14] Jahanshahloo, G.R., Soleimani-damaneh M., Mostafae A. Cost efficiency analysis with ordinal data: A theoretical and computational view, *International Journal of Computer Mathematics*. (2007); 84: 553-562.

[15] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostami-Malkhalifeh, M., Jamshidi, AA Centralized Case of cost efficiency in data envelopment analysis. *Journal of Basic and Applied Scientific Research*. (2013); 3:1005-1008.

[16] Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostami-Malkhalifeh, M., Jamshidi, AA Centralized Case of cost efficiency in data envelopment analysis.

[1] Amirteimoori, A., Kordrostami S., Rezaeitabar, A. An improvement to the cost efficiency interval: A DEA-based approach, *Applied mathematics and Computation*. (2006); 181: 775-781.

[2] Aparicio, J., Monge, J. F., Pastor, J. T. New centralized resource allocation DEA models under constant returns to scale. *Bol. de Estadística e Investigación Operativa*. (2012); Vol. 28: no. 2:110-130.

[3] Asmild, M., Paradi, J.C., Pastor, J. T. Centralized resource allocation BCC models. (2009); *Omega* 37: 40-49.

[4] Camanho, A.S., Dyson R.G. Cost efficiency measurement with price uncertainty: a DEA application to bank branch assessments Dordrecht MA, *European Journal of operational Research*. (2005); 161: 432 - 446.

[5] Camanho, A.S., Dyson R.G. A generalization of the Farrell cost efficiency measure applicable to non-fully competitive settings. (2008); *Omega* 36: 147-162.

[6] Charnes, A., Cooper W.W, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*. (1978); 2: 429-444.

[7] Cooper, W.W., Thompson R.G., Thrall R.M. Extensions and new developments in DEA, *Annals of Operations Research*. (1996); 66: 345.

[8] Hatami-Marbini, A., Tavana, M., Agrell, P. J., Hosseinzadeh Lotfi, F., Ghalaj Beigi, ZA common-weights DEA model for centralized resource allocation and target setting. *Computer*

nonparametric analysis using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*. (1995); 80: 654–671.

[25] Sahoo, B. K., Mehdiloozad, M., Tone, K. Cost, revenue and profit efficiency measurement in DEA: A directional distance function approach. *European Journal of Operational Research*. (2014); 237: 921–931.

[26] Tone, K. A Strange case of the cost and allocative efficiencies in DEA. *Journal of the Operational Research Society*. (2002); 53:1225–1231.

[27] Tone, K., Sahoo, B. K. Evaluating cost efficiency and returns to scale in the life insurance corporation of India using data envelopment analysis. *Socio-Economic Planning Sciences*. (2005); 39: 261–285.

*Journal of Basic and Applied Scientific Research*. (2013); 3: 1005-1008.

[17] Kuosmanen, T., Post T. Measuring economic efficiency with incomplete price information: With an application to European commercial banks, *European Journal of Operational Research*. (2001); 134: 43-58.

[18] Kuosmanen, T., Post T. Measuring economic efficiency with incomplete price information, *European Journal of Operational Research*. (2003); 144: 454457.

[19] Lozano, S., Villa G. Centralized resource allocation using data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis*. (2004); 22: 143-161.

[20] Lozano, S., Villa G. Centralized DEA models with the possibility of downsizing, *Journal of The Operational Research Society*. (2005); 56: 357-364.

[21] Maniadakis, N, Thanassoulis, E. A cost Malmquist productivity index. *European Journal of Operational Research*. (2004); 154: 396–409.

[22] Mostafae, A., Saljooghi F.H. Cost efficiency measures in data envelopment analysis with data uncertainty, *European Journal of Operational Research*. (2009); 197: 243-252.

[23] Puig-Junoy, J. Partitioning input cost efficiency into its allocative and technical components: An empirical DEA application to hospitals. *Socio-Economic Planning Sciences*. (2000); 34: 199–218.

[24] Ray, S. C., Kim, H. J. Cost efficiency in the US steel industry: A