

## رتبه‌بندی واحدهای کارا در شبکه دو مرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها با روش وزن مشترک

مهناز احدزاده نمین<sup>۱\*</sup>، الهه خمسه<sup>۱</sup>

<sup>(۱)</sup> گروه ریاضی، واحد شهر قدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۴/۰۸

### چکیده

مدل‌های شبکه‌ای دو مرحله‌ای تحلیل پوششی داده (DEA)، از جمله مدل‌های پرکاربرد در بسیاری از رشته‌های مدیریت و صنایع است. یکی از مفاهیمی که در تئوری تولید، نظر پژوهشگران را به خود جلب کرده است، مفهوم رتبه‌بندی واحدها با شبکه دو مرحله‌ای است. رتبه یک واحد می‌تواند اطلاعات سودمندی در زمینه فعالیت‌های بهینه واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUs) در اختیار تصمیم‌گیرنده (مدیر) قرار دهد. اینکه کدام واحد بر واحد دیگر اولویت دارد. این مفهوم ارجعیت یک واحد را از نظر کارایی و اثربخشی بر واحدهای دیگر مشخص می‌کند. محاسبه کارایی واحدها در شبکه دو مرحله‌ای DEA انجام شده است و اندازه کارایی واحد دو مرحله‌ای می‌تواند ملاک مناسبی برای رتبه‌بندی یک واحد باشد. اما مشکل اصلی زمانی است که چند واحد کارا همگی رتبه یک را لحاظ می‌کنند. هدف از این پژوهش، ارائه مدلی جهت رتبه‌بندی واحدهای کارا با استفاده از روش وزن مشترک در شبکه دو مرحله‌ای DEA است.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، رتبه‌بندی (Ranking)، کارایی، شبکه دو مرحله‌ای، وزن مشترک.

## ۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) روشی برای تعیین عملکرد واحدهای تحت ارزیابی (DMUs) است. هر واحد با مصرف ورودی چندگانه، خروجی چندگانه تولید می‌کند. مدل‌های پایه‌ای در تحلیل پوششی داده‌ها فقط اندازه کارایی و ناکارایی مدل را تعیین نمی‌کنند، بلکه الگویی برای واحدهای ناکارا ارائه می‌دهند که با کاهش ورودی‌ها و یا افزایش خروجی‌ها به یک واحد کارا تبدیل شوند. یکی از مفاهیمی که در تحلیل پوششی داده‌ها از دیدگاه نظری و کاربردی حائز اهمیت است، مفهوم رتبه بندی واحدهاست. رتبه هر واحد، اطلاعات سودمندی در زمینه اولویت واحد تصمیم‌گیری بر سایر واحدها در اختیار تصمیم‌گیرنده (مدیر) قرار می‌دهد. مفهوم اقتصادی و مدیریتی رتبه‌بندی در قالب تحلیل پوششی داده‌ها بطور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. یک ملاک برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیری، مقدار اندازه کارایی هر واحد می‌باشد [۳] اما روش ارائه شده، پیشنهادی برای رتبه‌بندی واحدهایی با کارایی یک ندارد. روش‌های مختلفی برای رفع این مشکل ارائه شده است. از جمله اندرسون و پترسون [۱]، روشی ارائه داده‌اند که براساس روش سوپر کارا، واحدهای کارا رتبه‌بندی شده‌اند. سوپر کارایی حاصل از حذف واحد تحت ارزیابی کارا از مجموعه قیود مدل‌های DEA حاصل می‌شود که بطور وسیعی در مقالات [۲، ۴، ۹، ۱۱، ۱۳] بررسی شده است. روشی دیگر برای رتبه‌بندی واحدهای کارا، استفاده از مفهوم کارایی متقاطع است [۱۵]. کارایی متقاطع حاصل از کارایی واحد تحت ارزیابی با تعیین وزن موردعلاقه در مقایسه با کارایی واحدهای دیگر می‌باشد. فرانکلین و همکاران [۱۰]، ابتدا واحدها را به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم‌بندی کردند. از آنجایی که میزان اندازه کارایی را می‌توان ملاکی برای رتبه‌بندی واحدها در نظر گرفت، به منظور رتبه‌بندی واحدهایی با کارایی یک روشی را با استفاده از وزن مشترک ارائه نمودند که بر پایه الگوی واحدهای کارا و مفهوم وزن مشترک تمام واحدهاست. در دنیای واقعی بسیاری از واحدهای تحت ارزیابی، دارای شبکه دو مرحله‌ای است. در سال‌های اخیر پژوهشگران بر روی شبکه دو مرحله‌ای DEA متمرکز شده‌اند. به

عنوان مثال یکی از شبکه‌های دو مرحله‌ای DEA، ارزیابی بانک‌های تجاری آمریکا است که برای تعیین سود و بازاریابی می‌باشد که در مقاله [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته است. در شبکه دو مرحله‌ای بررسی تأثیر شاخص میانی بر کارایی واحد، در مقایسه با وقتی که واحد به صورت جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود و از شاخص فعالیت میانی صرف‌نظر شده است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. چن و همکاران [۷]، مدل کارایی را برای واحدهایی با ساختار دو مرحله‌ای جهت محاسبه کارایی واحدها توسعه داده‌اند. در این پژوهش مدلی غیرخطی با بازده به مقیاس متغیر ارائه شده است که دارای ساختاری است که در آن ورودی‌ها کاهش و خروجی‌ها افزایش یابد و اندازه شاخص میانی آزاد فرض شده است. با استفاده از میزان تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌ها و مقدار شاخص میانی به‌دست آمده از مدل، الگویی برای واحدهای ناکارا ارائه شده است. چن و همکاران [۶]، روش تعیین نقاط مرزی برای یافتن واحدهای ناکارا با ساختار دو مرحله‌ای DEA با بازده به مقیاس ثابت را گسترش داده‌اند. آنها شبکه دو مرحله‌ای با بازده به مقیاس متغیر را که در آن کارایی کلی به عنوان مجموع وزن‌دار شده کارایی هر مرحله معرفی شده است، مورد پژوهش قرار داده‌اند [۵]. جرج و همکاران [۸] بر روی واحدهایی که شامل ساختار میانی هستند، تحقیق نموده‌اند. در این مقاله تحقیقاتی که بر روی واحدهایی که شامل شاخص میانی می‌باشند، ارائه شده است. ابتدا واحدها دسته‌بندی شده‌اند، سپس به اهمیت این مدل‌ها بر روی تصمیمات مدیر و در نهایت به تغییرات شاخص میانی در ساختار مدل‌ها پرداخته شده است.

مقاله حاضر به‌صورت زیرتقسیم‌بندی می‌شود. در بخش دوم، مطالبی در مورد ساختار واحد دو مرحله‌ای و کارایی هر یک از مرحله‌ها و خود واحد ارائه کرده‌ایم. در بخش سوم، مدل تحلیل وزن مشترک در شبکه دو مرحله را پیشنهاد نموده‌ایم. در بخش چهارم، به تحلیل کارایی وزن مشترک و قانون رتبه‌بندی واحدها با استفاده از وزن مشترک را بیان کرده‌ایم. در بخش پنجم، در دو مثال عددی مدل پیشنهادی را شرح داده و صحت آن را نشان داده‌ایم. نتیجه‌گیری نهایی در بخش ششم، آورده شده

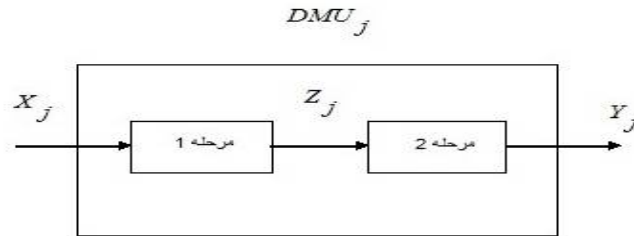
است.  $Z_j = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{kj})$  را  $j$ -ام می‌باشد که خروجی

تولید می‌کند و  $Z_j$  نقش ورودی مرحله (۲) واحد  $j$ -ام را

دارد که خروجی  $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj})$  را تولید می‌کند.

## ۲- مدل DEA دو مرحله‌ای

فرض کنید  $n$  واحد تحت ارزیابی مفروض داریم که هر یک دارای شبکه‌ای مانند ساختار شکل (۱) هستند و در آن  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj})$  ورودی مرحله (۱) واحد



شکل ۱. واحد تحت ارزیابی در ساختار دو مرحله‌ای

$$E_o^{(1)*} = \text{Max } E_o^{(1)}$$

$$s.t. \quad E_j^{(1)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$E_j^{(2)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$E_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$E_o^{(2)*} = \text{Max } E_o^{(2)}$$

$$s.t. \quad E_j^{(1)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$E_j^{(2)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

$$E_j \leq 1, \quad j = 1, \dots, n$$

کارایی هر یک از مرحله‌های واحد  $j$ -ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_j^{(1)} = \left( \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \right), \quad (۱)$$

$$E_j^{(2)} = \left( \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \right)$$

و کارایی کلی واحد  $j$ -ام را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_j = \left( \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \right) \quad (۲)$$

که در مدل‌های فوق همه وزن‌ها مثبت می‌باشند. مدل‌های کسری فوق را می‌توان با استفاده از روش چارنز و همکاران [۳]، به مدل‌های خطی زیر تبدیل کرد.

$$E_o^{(2)*} = \text{Max } \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

$$s.t. \quad \sum_{k=1}^K w_k z_{ko} = 1 \quad (۴)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_s),$$

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_K),$$

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_m)$$

به ترتیب وزن‌های شاخص ورودی، شاخص میانی و شاخص خروجی واحد  $j$ -ام می‌باشند. جهت محاسبه کارایی هر یک از مرحله‌های واحد تحت ارزیابی  $DMU_o$  از مدل‌های زیر استفاده می‌کنیم:

در آن  $w_k (k = 1, 2, \dots, K)$ ,  $v_i (i = 1, 2, \dots, m)$  به ترتیب نشان دهنده مجموع وزن متغیرهای تصمیم وزن مشترک  $i$ -امین شاخص ورودی و  $k$ -امین شاخص میانی است. توجه کنید که نماد متغیر تصمیم با علامت " " نشان دهنده آنست که مقدار دلخواه به خود می‌گیرد. برای هر یک از  $DMU$  های،

$DMU_{H^{(1)}}, DMU_{N^{(1)}}$  اگر مجموعه وزن مشترک  $w'_k (k = 1, 2, \dots, K)$ ,  $v'_i (i = 1, 2, \dots, m)$  باشند مختصات

نقاط  $H^{(1)}, N^{(1)}$  در شکل (۲) به صورت

$$\left( \sum_{i=1}^m x_{iH^{(1)}} v'_i, \sum_{k=1}^K z_{kH^{(1)}} w'_k \right) \text{ و } \left( \sum_{i=1}^m x_{iN^{(1)}} v'_i, \sum_{k=1}^K z_{kN^{(1)}} w'_k \right)$$

می‌باشند. گپ مجازی بین نقاط  $H^{(1)}, H^{(1)}$  برای

مرحله (۱) روی محورهای افقی و عمودی به وسیله

$\Delta'_{H^{(1)}}, \Delta'_{H^{(1)}}$  نمایش داده می‌شود. بطور مشابه برای

نقاط  $N^{(1)}, N^{(1)}$  به ترتیب دارای گپ با نماد

$\Delta'_{N^{(1)}}, \Delta'_{N^{(1)}}$  می‌باشند. به طور مشابه مطابق با شکل

(۳) و (۴) گپ‌های مرحله (۲) و حالتی که واحد به صورت

جعبه سیاه در نظر گرفته می‌شود به صورت

$\Delta'_{N^{(2)}}, \Delta'_{N^{(2)}}$  و  $\Delta'_{H^{(2)}}, \Delta'_{H^{(2)}}$  برای مرحله (۲) و

$\Delta'_{N^{(1)}}, \Delta'_{N^{(1)}}$  و  $\Delta'_{H^{(1)}}, \Delta'_{H^{(1)}}$  برای حالتی که واحد به

صورت جعبه سیاه است، در نظر گرفته می‌شود. بنابراین

نقاط  $N^{(1)}, H^{(1)}$  دارای گپ تصنعی (مجازی)

$\Delta'_{H^{(1)}} + \Delta'_{H^{(1)}} + \Delta'_{N^{(1)}} + \Delta'_{N^{(1)}}$  نسبت به خط الگوی،

مرحله (۱) می‌باشند. فرض کنید متغیر تصمیم با نماد

"\*" نشان دهنده مقادیر بهینه متغیرها باشد. مجموعه

وزن‌های بهینه  $w_k^* (k = 1, 2, \dots, K)$ ,  $v_i^* (i = 1, 2, \dots, m)$

و  $u_r^* (r = 1, 2, \dots, s)$  را محاسبه می‌کنیم بطوری که نقاط

$N^{(1)}, H^{(1)}$  و  $N^{(2)}, H^{(2)}$  برای مرحله (۲) و  $N^*, H^*$

برای  $DMU$  پایین خط الگوی مرحله (۱) بتواند به

تصویرشان که نقاط  $N^{*p(1)}, H^{*p(1)}$  و  $N^{*p(2)}, H^{*p(2)}$

برای مرحله (۲) و  $N^{*p}, H^{*p}$  برای  $DMU$  که روی

خط الگوی مرحله (۱) می‌باشند، نزدیک شوند. به عبارت

دیگر به وسیله اضافه کردن وزن‌های بهینه گپ تصنعی

(مجازی)  $\Delta_{H^{(1)}}^* + \Delta_{H^{(1)}}^* + \Delta_{N^{(1)}}^* + \Delta_{N^{(1)}}^*$  نسبت به

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \leq 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$u_r \geq 0, r = 1, 2, \dots, s$$

$$w_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, K$$

$$v_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$$

توجه کنید که  $DMU_o$  را کارا می‌نامیم هرگاه

در مرحله (۱) و (۲) کارا باشد، یعنی  $E_o^{(1)*} = E_o^{(2)*} = 1$

باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\bar{E}^{(1)} = \{j | E_j^{(1)*} = 1, j = 1, 2, \dots, n\}$$

$$\bar{E}^{(2)} = \{j | E_j^{(2)*} = 1, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (۷)$$

$$\bar{E} = \bar{E}^{(1)} \cap \bar{E}^{(2)}$$

مجموعه  $\bar{E}$  شامل واحدهایی است که هم در مرحله (۱)

و هم در مرحله (۲) کارا هستند. این واحدها را کارایی کلی

می‌نامیم. میزان  $E_j^* = E_j^{(1)*} \cdot E_j^{(2)*}$  ملاک مناسبی

برای رتبه‌بندی واحدهاست. اما اگر تعدادی از واحدها

دارای کارایی کلی برابر یک باشند، این روش رتبه

یکسانی برای چنین واحدهایی ارائه خواهد داد. در بخش

آینده قصد داریم روشی را ارائه دهیم که در آن واحدهایی

که دارای کارایی کلی برابر یک هستند نیز رتبه مجزایی

داشته باشند.

### ۳- روش تحلیل وزن مشترک در شبکه

#### دومرحله‌ای<sup>۱</sup> (CWA-TS)

در مدل‌های  $DEA$  سنتی اگر ماکزیمم نمره کارایی کلی

واحدی برابر یک باشد، آن واحد روی سطح الگوی خود

واقع شده است. با استفاده از مزیت سطح الگو هر یک از

مرحله‌ها، قصد داریم وزن مشترک هر یک از مرحله‌های

$DMU$  ها را بیابیم. در شکل (۲)، محورهای عمودی و

افقی به ترتیب شاخص میانی تصنعی (وزن‌دار شده به

وسیله  $K$  شاخص میانی) و شاخص ورودی تصنعی (وزن

دار شده به وسیله  $m$  شاخص ورودی) برای مرحله (۱)

می‌باشند. با توجه به تعریف کارایی مرحله (۱) سطح

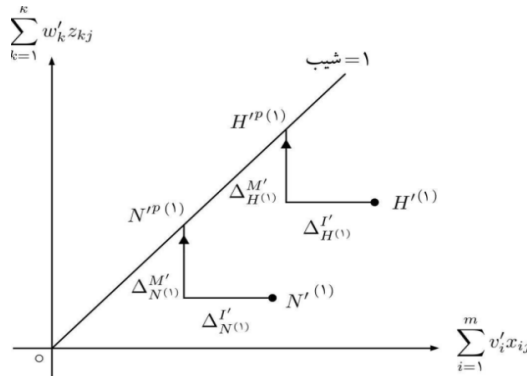
الگوی مشترک مرحله (۱) که یک خط مستقیم می‌باشد

که از مبدأ مختصات می‌گذرد و دارای شیب یک است که

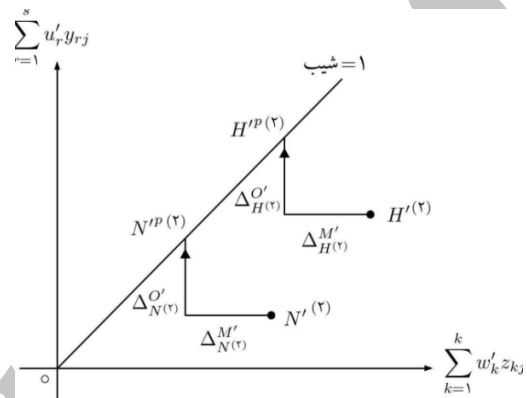
1. CWA-TS

روش تحلیل وزن مشترک در شبکه دو مرحله‌ای

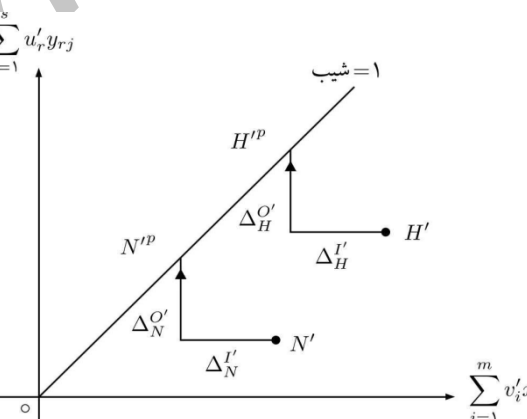
خط الگوی مرحله (۱) کوتاه‌ترین مقدار برای مرحله (۱) تصنعی نسبت به الگوی مرحله (۱) و خود واحد را هر واحد می‌باشد. به‌طور مشابه وزن‌های بهینه گپ می‌توان نوشت.



شکل (۲) نمایش گپ DMU ها زیر خط الگوی تصنعی مرحله (۱)



شکل (۳) نمایش گپ DMU ها زیر خط الگوی تصنعی مرحله (۲)



شکل (۴) نمایش گپ DMU ها زیر خط الگوی تصنعی کلی

$$\Delta_j^{(1)} \geq 0; \quad j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\Delta_j^{(2)} \geq 0; \quad j \in \bar{E}^{(2)}$$

با قرار دادن  $\Delta_j^{(1)}$  و  $\Delta_j^{(2)}$  معادل با متغیر کمکی دسته  
قیود ۱ و ۲ در مدل (۱۰) و تغییر متغیر

$$\text{مدل (۱۰) را می‌توان بازنویسی کرد و به مدل برنامه‌ریزی}$$

خطی (۱۲) تبدیل کرد، در این مدل تابع هدف به صورت

زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \bar{E}} (\Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}) = \\ & - \sum_{j \in \bar{E}} \left( \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \right) \\ & - \sum_{j \in \bar{E}} \left( \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \right) \quad (10) \\ & = - \left( \sum_{k=1}^K \sum_{j \in \bar{E}} w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m \sum_{j \in \bar{E}} v_i x_{ij} \right) \\ & - \left( \sum_{r=1}^s \sum_{j \in \bar{E}} u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K \sum_{j \in \bar{E}} w_k z_{kj} \right) \\ & = - \left( \sum_{k=1}^K w_k Z_k - \sum_{i=1}^m v_i X_i \right) \\ & - \left( \sum_{r=1}^s u_r Y_r - \sum_{k=1}^K w_k Z_k \right) \\ & = \sum_{i=1}^m v_i X_i - \sum_{r=1}^s u_r Y_r \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} -\Delta^* &= \text{Max} \sum_{i=1}^m v_i X_i - \sum_{r=1}^s u_r Y_r \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0; \quad j \in \bar{E}^{(1)} \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \leq 0; \quad j \in \bar{E}^{(2)} \quad (12) \\ & u_r, w_k, v_i \geq \varepsilon \quad r=1, \dots, s, \\ & i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K \end{aligned}$$

دوال مدل (۱۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$\Delta^* = \text{Min} \sum_{j \in \bar{E}} (\Delta_j^o + \Delta_j^I)$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\sum_{k=1}^K w_k z_{kj} + \Delta_j^M}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} - \Delta_j^I} = 1; \quad j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} + \Delta_j^o}{\sum_{k=1}^K w_k z_{kj} + \Delta_j^M} = 1; \quad j \in \bar{E}^{(2)} \quad (8)$$

$$u_r, w_k, v_i \geq \varepsilon \quad r=1, \dots, s, \\ i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K$$

لذا مدل (۸) را می‌توان به فرم مدل (۹) بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \text{Min} \sum_{j \in \bar{E}} (\Delta_j^o + \Delta_j^I) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \Delta_j^I + \Delta_j^M = 0; \\ & \quad \quad \quad j \in \bar{E}^{(1)} \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} + \Delta_j^o - \Delta_j^M = 0; \quad (9) \\ & \quad \quad \quad j \in \bar{E}^{(2)} \\ & u_r, w_k, v_i \geq \varepsilon \quad r=1, \dots, s, \\ & i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K \end{aligned}$$

با تغییر متغیر  $\Delta_j^{(2)} = \Delta_j^o - \Delta_j^M$  و  $\Delta_j^{(1)} = \Delta_j^I + \Delta_j^M$  در این صورت مدل (۹) تبدیل به مدل (۱۰) خواهد شد.

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \text{Min} \sum_{j \in \bar{E}} (\Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \Delta_j^{(1)} = 0; \\ & \quad \quad \quad j \in \bar{E}^{(1)} \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} + \Delta_j^{(2)} = 0; \quad (10) \\ & \quad \quad \quad j \in \bar{E}^{(2)} \\ & u_r, w_k, v_i \geq \varepsilon \quad r=1, \dots, s, \\ & i=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, K \end{aligned}$$

و (۱۶) یک واحد افزایش پیدا می‌کنند، در این صورت معادله (۱۷) و (۱۸) تغییرات  $\mu^*$ ,  $\pi^*$  را دارد.

$$\sum_{k=1}^K w_k z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \leq 0+1; \quad (15)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k z_{kj} \leq 0 \leq 0+1; \quad (16)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

معادلات بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{k=1}^K w_k \pi_j^* z_{kj} - \sum_{i=1}^m v_i \pi_j^* x_{ij} + \pi_j^* = 0+1; \quad (17)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \mu_j^* y_{rj} - \sum_{k=1}^K w_k \mu_j^* z_{kj} + \mu_j^* = 0+1; \quad (18)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

بنابراین داریم:

$$\sum_{k=1}^K w_k \left( \sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} z_{kj} \right) - \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i \left( \sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} x_{ij} \right) + \pi_j^* = 0+1$$

$$\sum_r u_r \left( \sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} y_{rj} \right) \quad (20)$$

$$- \sum_k w_k \left( \sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} z_{kj} \right) + \mu_j^* = 0+1$$

$\pi_j^*$  و  $\mu_j^*$  نشان دهنده گپ کلی مرحله (۱) و مرحله ۲ تا رسیدن به خط الگوست، که می‌تواند زمانی که کران بالای کارایی برای همه واحدهای تحت ارزیابی برابر یک باشد، کاهش پیدا کند. اگر چندین DMU روی خط الگوی مرحله (۱) و (۲) باشد،

$$Max \quad \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s P_r + \sum_{i=1}^m Q_i + \sum_{k=1}^K \tau_k \right)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} \pi_j x_{rj} + Q_i = X_i;$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} \pi_j z_{kj} - \sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} \mu_j z_{kj} - \tau_k = 0;$$

$$k = 1, \dots, K$$

$$\sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} \mu_j y_{rj} - P_r = Y_r; \quad (13)$$

$$r = 1, \dots, s$$

$$P_r, \tau_k, Q_i \geq 0;$$

$$r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K$$

$$\pi_j \geq 0; \quad j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\mu_j \geq 0; \quad j \in \bar{E}^{(2)}$$

مدل (۱۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$Max \quad \varepsilon \left( \sum_r s_r^+ + \sum_i s_i^- + \sum_{k=1}^K T_k \right)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} \mu_j y_{rj} - s_r^+ = y_r;$$

$$r = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} \lambda_j z_{kj} - \sum_{j \in \bar{E}^{(2)}} \mu_j z_{kj} - t_k = 0;$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

$$\sum_{j \in \bar{E}^{(1)}} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_i;$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$\lambda_j \geq 0, j \in \bar{E}^{(1)}, \mu_j \geq 0, j \in \bar{E}^{(2)} \quad (14)$$

$$s_r^+, s_i^-, T_k \geq 0 \quad \forall r, \forall i, \forall k$$

متغیرهای  $\mu_j^* \geq 0, j \in \bar{E}^{(2)}$  و  $\pi_j^* \geq 0, j \in \bar{E}^{(1)}$  در مدل (۱۳) به ترتیب قیمت سایه‌ای مدل (۱۲) می‌باشند. در این صورت تغییرات محدودیت معادله (۱۵) و (۱۶)، تغییر محدودیت‌های (۱۷) و (۱۸) را به ترتیب نتیجه می‌دهد. یعنی، سمت راست محدودیت ج-ام معادله (۱۵)

**تعریف ۳.** اگر  $\xi_j^* = \xi_i^* < 1$  (یعنی هر دو واحد ناکارا و پایین خط الگو هستند)  $DMU_j$  بهتر از  $DMU_i$  است هر گاه  $\Delta_i^* < \Delta_j^*$ .

**تعریف ۴.** اگر  $\xi_j^* = \xi_i^* = 1$  (یعنی هر دو  $DMU$  روی خط الگو کارا) در اینصورت  $DMU_j$  بهتر از  $DMU_i$  است هر گاه  $\pi_j^* > \pi_i^*$  و  $\mu_j^* > \mu_i^*$ .

از آنجایی که نمره کارایی وزن مشترک هر  $DMU$  کوچکتر یا مساوی یک می‌باشد. بنابراین  $DMU$  ای بالای خط الگو وجود ندارد. به علاوه می‌توان اطمینان حاصل کرد که حداقل یک  $DMU$  روی خط الگو وجود دارد.

**قضیه ۱.** حداقل یک  $DMU$  روی خط الگو در مرحله (۱) و (۲) واقع است.

**اثبات.** فرض کنید  $DMU$  ای روی خط الگو وجود نداشته باشد. بنابراین می‌توان جواب‌های بهینه مانند  $w_k^*$

$v_i^*$ ،  $v_r^*$  و  $\Delta_j^{*(1)}$ ،  $\Delta_j^{*(2)}$  یافت بطوری که  $\Delta_j^{*(1)} > 0$  و  $\Delta_j^{*(2)}$  در معادله (۲۲) و (۲۳) صدق می‌کنند.

$$\left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} + \Delta_j^{*(1)} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \right) = 1; \quad (22)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} + \Delta_j^{*(2)} \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} \right) = 1; \quad (23)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

کارایی هر  $DMU_j$  در مرحله (۱) و (۲) کمتر از یک می‌باشد لذا معادله (۲۴) و (۲۵) را خواهیم داشت.

$$\left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \right) < 1; \quad (24)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} \right) < 1; \quad (25)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

$\mu_j^*$  و  $\pi_j^*$  اطلاعات ارزشمندی مبنی بر اینکه کدام یک بر روی گپ تصنعی کلی اثر می‌گذارد، ارائه می‌دهد.  $\mu_j^*$  و  $\pi_j^*$  برای تعیین اولویت  $DMU$  هایی که در مرحله (۱) و (۲) روی خط الگو هستند، استفاده می‌شود. در بخش بعدی، قوانین رتبه‌بندی  $DMU$  های کارا را در شبکه دو ی تحلیل خواهیم کرد.

#### ۴- تحلیل کارایی وزن مشترک و قانون رتبه تحلیل وزن مشترک

در این بخش تحلیل کارایی وزن مشترک و قانون‌های رتبه‌بندی روش تحلیل وزن مشترک را تعریف می‌کنیم. ابتدا نمره کارایی مرحله (۱) و (۲) را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$\xi_j^{*(1)} = \left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* x_{ij} \right); j \in \bar{E}^{(1)} \quad (21)$$

$$\xi_j^{*(2)} = \left( \sum_{r=1}^s u_r^* y_{rj} \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{kj} \right); j \in \bar{E}^{(2)}$$

با ارزیابی مقدار کارایی وزن مشترک مرحله (۱) و (۲) می‌توان تشخیص داد که واحدها در دو گروه مجزا هستند.  $DMU$  هایی که روی خط الگو و  $DMU$  هایی که زیر خط الگو در مرحله (۱) و (۲) قرار دارند.

**تعریف ۱.**  $DMU_j$  کارای وزن مشترک است (یعنی روی خط الگو است) اگر  $\Delta_j^* = 0$  و  $\xi_j^{*(1)} = \xi_j^{*(2)} = 1$  (یعنی  $\xi_j^* = \xi_j^{*(1)} = \xi_j^{*(2)} = 1$ )، آنگاه  $DMU_j$  کارای وزن مشترک می‌باشد و در غیر این صورت  $DMU_j$  را ناکارای وزن مشترک می‌نامیم (یعنی زیر خط الگو است).

برای تعیین ارجحیت  $DMU$  ها در حالتی که  $DMU$  روی و یا زیر خط الگو قرار دارد، سه تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۲.**  $DMU_j$  بهتر از  $DMU_i$  است هر گاه  $\xi_j^* > \xi_i^*$  باشد.



$$p_{r_j} = p_r \lambda_j, \quad q_{ij} = Q_i \lambda_j, \quad \tau_{kj} = \tau_k \lambda_j \quad (29)$$

با ترکیب محدب ضرایب  $\lambda_j \geq 0$  ( $j \in \bar{E}$ ) (یعنی

$$\sum_{j \in \bar{E}} \lambda_j = 1) \text{ مدل زیر را خواهیم داشت.}$$

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{j \in \bar{E}} \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s p_{r_j} + \sum_{i=1}^m Q_{ij} + \sum_{k=1}^K T_{kj} \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in \bar{E}} \mu_j y_{r_j} = \sum_{j \in \bar{E}} (y_{r_j} + p_{r_j}), \\ & r = 1, 2, \dots, s \\ & \sum_{j \in \bar{E}} \pi_j x_{i_j} - \sum_{j \in \bar{E}} \mu_j z_{k_j} = \sum_{j \in \bar{E}} \tau_{k_j}, \\ & k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (30)$$

$$\sum_{j \in \bar{E}} \pi_j x_{i_j} = \sum_{j \in \bar{E}} (x_{i_j} - q_{ij}),$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$\pi_j \geq 0, \quad j \in \bar{E}^{(1)}, \quad \mu_j \geq 0, \quad j \in \bar{E}^{(2)}$$

$$q_{ij}, \tau_{kj}, p_{r_j} \geq 0, \quad \forall r, k, i$$

کمبودهای  $P_{r_j}^*$  و  $\tau_{kj}^*$  و مازاد  $q_{ij}^*$  در مدل (۱۲) را می‌توان به‌طور غیرمستقیم از قضیه زیر به دست آورد.

**قضیه ۲.** کمبودهای  $P_{r_j}^*$  و  $\tau_{kj}^*$  و مازاد  $q_{ij}^*$  برای  $DMU_j$  ناکارای CWA- نسبت به خط الگو وابسته به اندیس  $\Gamma$ -م خروجی، اندیس  $k$ -م میانی و اندیس  $i$ -م ورودی به صورت  $(\Delta_j^*/\eta^*)$ ،  $p_r^*$  و  $T_k^*$  ( $\Delta_j^*/\eta^*$ ) و

$$\eta^* = \varepsilon (\Delta^* - \sum_{k=1}^K T_k^*) \text{ می‌باشند که در آن}$$

**اثبات.** چون  $p_{r_j}^*$ ،  $\tau_{kj}^*$ ،  $q_{ij}^*$  کمبودها و مازاد  $DMU_j$ - ناکارای CWA نسبت به خط الگو، مرحله (۱) و (۲) می‌باشند، رابطه (۳۱) و (۳۲) و لذا (۳۳) از تعریف ۱ برقرار است.

$$\left( \sum_{k=1}^K w_k^* (z_{k_j} + \tau_{k_j}^*) \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{i_j} - q_{ij}^*) \right) = 1, \quad (31)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

می‌توانیم ثابت‌های  $t_j$  و  $b_j$  (که در آن  $t_j > 1$  و  $b_j > 1$ ) را طوری انتخاب کنیم بطوری که کارایی برای هر  $j \in \bar{E}^{(1)}$  در رابطه (۲۶) و  $j \in \bar{E}^{(2)}$  در رابطه (۲۷)، مساوی یک شود.

$$\left( \sum_{k=1}^K t_j w_k^* z_{k_j} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* x_{i_j} \right) = 1; \quad (26)$$

$$j \in \bar{E}^{(1)}$$

$$\left( \sum_{r=1}^s b_j u_r^* y_{r_j} \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k^* z_{k_j} \right) = 1; \quad (27)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

قرار دهید:

$$T = \text{Min} \{ t_j \mid j \in \bar{E}^{(1)} \}, \quad (28)$$

$$B = \text{Min} \{ b_j \mid j \in \bar{E}^{(2)} \}$$

در این صورت مجموعه وزن‌های مشترک شدنی  $w_k^*$ ،  $v_i^*$ ،  $u_r^*$  و  $Bu_r^*$  موجود است به طوری که دارای  $\Delta_j^{*(1)}$  و  $\Delta_j^{*(2)}$  کوچکتر است و حداقل برای یکی از  $j \in \bar{E}^{(1)}$  یا  $j \in \bar{E}^{(2)}$  صفر می‌باشند. این نتیجه با شرط اینکه  $\Delta_j^* > 0$  در تناقض است. بنابراین حداقل یک  $DMU$  روی خط الگو قرار دارد.

#### ۴-۱- تحلیل گپ‌های تصنعی مرحله (۱) و (۲)

گپ‌های تصنعی بین گپ ورودی و خروجی و شاخص میانی برای هر واحد ناکارای CWA می‌تواند به گپ حقیقی برای هر اندیس عملگر تجزیه شود. نشان می‌دهیم که مدل (۸) معادل مدل (۱۲) می‌باشد و مدل (۱۲) نشان می‌دهد که  $P_r$ ،  $Q_i$  و  $T_k$  را می‌توان به صورت جزئی‌تر  $P_{r_j} = \sum_{j \in \bar{E}} P_{r_j}$ ،  $Q_i = \sum_{j \in \bar{E}} q_{ij}$  و  $T_k = \sum_{j \in \bar{E}} \tau_{kj}$  بیان کرد که در آن  $P_{r_j}$  کمبود اندیس خروجی و  $q_{ij}$  مازاد اندیس ورودی و  $\tau_{kj}$  کمبود

اندیس میانی می‌باشد. بنابراین قرار دهید:

از اندیس‌های وزن خروجی متفاوت می‌تواند مجموع وزن‌های خروجی یکسان داشته باشد (یعنی  $(\sum_{r=1}^s u_r^* = \sum_{r=1}^s \bar{u}_r)$  در مرجع [۸] پیشنهاد داده شده برای

اندیس‌های وزن‌های خروجی دامنه کوچکتر از وزن‌ها ترجیح داده شود. این مطلب نشان می‌دهد که در نظر گرفتن مجموع وزن‌ها مفیدتر از در نظر گرفتن هریک از آنها به شکل انفرادی است. بطور مشابه ترجیح می‌دهیم که از دامنه وزن‌های بزرگتر برای اندیس‌های ورودی استفاده کنیم. فرآیند زیر راهی را برای یافتن دامنه مناسب از بین مجموعه وزن‌های دگرین با استفاده از نرم  $L_1$  پیشنهاد می‌دهد.

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \sum_{r=1}^s u_r - \sum_{i=1}^m v_i \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{j \in \bar{E}} (\Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}) = \Delta^* \\ & \sum_{k=1}^K w_k z_{k_j} - \sum_{i=1}^m v_i x_{i_j} + \Delta_j^{(1)} = 0, \\ & \quad j \in \bar{E}^{(1)} \\ & \sum_{r=1}^s u_r y_{r_j} - \sum_{k=1}^K w_k z_{k_j} + \Delta_j^{(2)} = 0, \\ & \quad j \in \bar{E}^{(2)} \\ & u_r, w_k, v_i \geq \varepsilon > 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & k = 1, \dots, K, \quad r = 1, \dots, s \\ & \Delta_j^{(1)} \geq 0, \quad j \in \bar{E}^{(1)} \\ & \Delta_j^{(2)} \geq 0, \quad j \in \bar{E}^{(2)} \end{aligned} \quad (35)$$

**گام ۱:** مدل (۱۰) را حل کنید. فرض کنید  $\Delta^*$  جواب بهینه مدل (۱۰) باشد.

**گام ۲:** مدل خطی (۳۵) را حل کنید. یک مجموعه وزن‌های مشترک بهینه را بیابید.

در گام ۱ ابتدا مجموع گپ‌های مصنوعی کلی را مینیمم می‌کنیم و آن را  $\Delta^*$  می‌نامیم. سپس یک وزن مناسب را در گام ۲ تحت شرایط بهینگی مدل (۱۰) می‌یابیم. بنابراین مقدار شاخص بهینه مدل (۱۰) را به عنوان یک محدودیت در مدل خطی (۳۵) قرار دادیم و سپس مینیمم مجموع وزن‌های خروجی و ماکزیمم مجموعه وزن‌های

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{r_j} + p_{r_j}^*) \right) / \left( \sum_{k=1}^K w_k^* (z_{k_j} + \tau_{k_j}^*) \right) = 1, \quad (32)$$

$$j \in \bar{E}^{(2)}$$

لذا داریم:

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{r_j} + \frac{p_r^* \Delta_j^*}{\eta^*}) \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{i_j} - \frac{Q_i^* \Delta_j^*}{\eta^*}) \right) = 1, \quad (33)$$

$$j \in \bar{E}$$

کافی است ثابت کنیم

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{r_j} + \frac{p_r^* \Delta_j^*}{\eta^*}) \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{i_j} - \frac{Q_i^* \Delta_j^*}{\eta^*}) \right) = 1, \quad (34)$$

$$j \in \bar{E}$$

از طرفی از آنجایی که  $\varepsilon$  کران بالای  $u_r^*$  و  $v_i^*$  می‌باشد لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \sum_{r=1}^s u_r^* y_{r_j} - \sum_{i=1}^m v_i^* x_{i_j} + \frac{\Delta_j^*}{\eta^*} \left( \sum_{r=1}^s p_r^* u_r^* + \sum_{i=1}^m Q_i^* v_i^* \right) = \\ & \sum_{r=1}^s u_r^* y_{r_j} - \sum_{i=1}^m v_i^* x_{i_j} + \frac{\Delta_j^*}{\eta^*} \cdot \varepsilon \left( \sum_{r=1}^s p_r^* + \sum_{i=1}^m Q_i^* \right) \\ & = \sum_{r=1}^s u_r^* y_{r_j} - \sum_{i=1}^m v_i^* x_{i_j} + \frac{\Delta_j^*}{\eta^*} \cdot \eta^* = 0 \end{aligned}$$

از آنجایی که  $E_j = E_j^{(1)} \cdot E_j^{(2)}$  لذا داریم

$$\left( \sum_{r=1}^s u_r^* y_{r_j} + \Delta_j^{(2)} \right) / \left( \sum_{i=1}^m v_i^* x_{i_j} - \Delta_j^{(1)} \right) = 1$$

که در آن  $\Delta_j^* = \Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}$  می‌باشد و رابطه (۳۴) برقرار است.

#### ۴-۲- انتخاب مجموعه وزن مشترک بهینه و دگرین

بدترین حالت زمانی رخ می‌دهد که مدل (۱۰) جواب بهینه دگرین داشته باشد. بعلاوه وزن‌های متفاوت باعث ایجاد رتبه‌های متفاوت برای  $DMU$  های کارا خواهد شد. لذا نیاز است که تصمیم گیرنده (مدیر) یک وزن مناسب را برای رتبه‌بندی  $DMU$  های کارا از بین وزن‌های دگرین انتخاب کند.

در این بخش قصد داریم روشی را پیشنهاد دهیم که به تصمیم‌گیرنده (مدیر) در خصوص انتخاب رتبه مناسب که بین رتبه‌های دگرین وجود دارد، کمک کند. دو مجموعه

شاخص میانی و دوشاخص خروجی می‌باشند، که داده‌ها در جدول (۱) آورده شده است. با به‌کارگیری مدل‌های ارائه شده، مشاهده می‌شود که واحد ۶ و ۱۷ دارای کارایی یک می‌باشند. لذا از مدل پیشنهاد شده جهت تفکیک رتبه واحد ۶ و ۱۷ استفاده نموده‌ایم. طی فرآیند رتبه‌بندی ارائه شده با توجه به نتایج بیان شده در جدول (۱) واحدهای ۶ و ۱۷ دارای رتبه ۴ و ۱۱ هستند. مشاهده می‌شود که هیچ کدام از واحدهای کارا دارای رتبه یک نمی‌باشند، زیرا اندازه گپ‌های مرحله اول و دوم این واحدها بالاتر از واحدهای دیگر می‌باشد.

ورودی را به عنوان شاخص در نظر می‌گیریم.

### ۵- مثال عددی

در این بخش برای بررسی درستی مدل پیشنهاد شده دو مجموعه واحدهای تحت ارزیابی را بررسی خواهیم کرد. در مثال اول و دوم ۲۱ واحد تحت ارزیابی با داده‌های غیرواقعی و واقعی را مورد ارزیابی قرار داده‌ایم.

### ۵-۱- مثال عددی ۱

در این مثال با واحدهایی سر و کار داریم که دارای ساختار دو مرحله‌ای بوده و هر واحد شامل سه ورودی، دو

جدول ۱: داده‌های مثال عددی اول

$DMU_j$	$x_{1j}$	$x_{2j}$	$x_{3j}$	$y_{1j}$	$y_{2j}$	$z_{1j}$	$z_{2j}$
1	12	10.5	60	80	45	45	17
2	18.2	12.1	73	83.4	47	47.2	19.3
3	13	10.8	64.5	90.4	63.3	53.4	25.6
4	16.3	11.8	63.2	92	55	56.7	22.4
5	17.8	11	68	94.5	60.1	49	17.7
6	14.4	10.7	77.4	88.2	66.5	51.1	26.1
7	12.6	12.2	69	91.1	48.2	46.8	20.5
8	15.7	12	64.4	82.4	54.2	49.2	18.4
9	21.5	11.9	75.5	87	58	54.3	27.6
10	13.2	10.6	66	89.9	45.7	52	25.2
11	19.8	10.8	62	96.7	69.5	56.6	23
12	15.3	12.2	78	93	64	51.3	19.4
13	18.5	11	71.3	96.2	58.4	49.2	22.4
14	21	11	79.1	81	55.7	47.5	24.5
15	19.1	10.9	65.6	84.1	47	45.6	20.7
16	15	11	72.8	82.06	67.1	53.5	23.5
17	16.6	12.5	64	90	59.5	47.2	26.2
18	20	11.7	62	86.9	65.3	54.2	21.9
19	14	12	74.5	91.5	49	52.9	22.7
20	22	12.3	80	95	70	57	28
21	15.1	11.6	77	94	56	48	17.2

جدول ۲: رتبه‌بندی واحدها با استفاده از روش پیشنهادی

$DMU_j$	$E_j^{(1)}$	$E_j^{(2)}$	$\Delta_j^{(1)}$	$\Delta_j^{(2)}$	$\zeta_j^{(1)}$	$\zeta_j^{(2)}$	$E_j^{(1)} \cdot E_j^{(2)}$	$\Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}$	$\zeta_j^{(1)} \cdot \zeta_j^{(2)}$	رتبه
1	0.91292	0.9078	23.674	17.724	0.853	0.864	0.828749	41.398	0.736992	14
2	0.767	0.90227	50.124	20.771	0.747	0.851	0.692041	70.895	0.635697	21
3	1	0.93132	0	21.093	0.994	0.869	0.93132	21.093	0.863786	2
4	1	0.82879	5.618	33.813	0.965	0.804	0.82879	39.431	0.77586	8
5	0.86673	1	31.663	0	0.826	0.987	0.86673	31.663	0.815262	3
6	1	1	19.781	33.813	0.89	0.905	1	53.594	0.80545	4
7	0.90423	0.994	39.626	14.167	0.788	0.909	0.898805	53.793	0.716292	15
8	0.86835	0.89052	32.721	19.259	0.822	0.865	0.773283	51.98	0.71103	16
9	0.97015	0.84863	27.048	34.308	0.865	0.8	0.823298	61.356	0.692	19
10	0.99798	0.88282	4.342	34.882	0.97	0.786	0.881037	39.224	0.76242	9
11	1	0.97531	0	14.933	0.995	0.908	0.97531	14.933	0.90346	1
12	0.84637	1	40.664	5.726	0.796	0.953	0.84637	46.39	0.758588	10
13	0.88771	1	30.614	5.259	0.835	0.955	0.88771	35.873	0.797425	5
14	0.91397	0.92306	44.314	20.509	0.776	0.859	0.843649	64.823	0.666584	20
15	0.82943	0.94177	36.587	17.001	0.798	0.873	0.781132	53.588	0.696654	18
16	0.96891	0.98574	14.45	23.812	0.918	0.852	0.955093	38.262	0.782136	7
17	1	1	35.603	8.571	0.812	0.934	1	44.174	0.758408	11
18	0.9576	0.95766	15.848	21.128	0.911	0.868	0.917055	36.976	0.790748	6
19	0.91988	0.88324	25.974	29.996	0.863	0.815	0.812475	55.97	0.703345	17
20	0.94973	0.95087	27.714	22.251	0.867	0.872	0.90307	49.965	0.756024	12
21	0.82915	1	45.635	1.306	0.764	0.978	0.82915	46.941	0.747192	13

### ۵-۲- مثال عددی دوم (کاربردی)

در این بخش به رتبه‌بندی ۲۱ شعبه بانک خواهیم پرداخت. هر شعبه را به صورت یک واحد دومرحله‌ای در نظر گرفته‌ایم که در آن شاخص ورودی شامل سود پرداختی حساب‌ها ( $x_1$ ) هزینه پرسنلی ( $x_2$ ) می‌باشند، شاخص میانی، مقدار سپرده‌ها می‌باشد ( $z_1$ ) که خروجی مرحله اول در نظر گرفته شده است و این خروجی به

عنوان ورودی مرحله دوم است. شاخص خروجی شامل وام‌های پرداختی ( $y_1$ )، در آمد حاصل از تسهیلات اعطایی ( $y_2$ ) وام‌هایی که بطور کامل بازپرداخت نشده است خروجی نامطلوب می‌باشند که معکوس آن را به عنوان خروجی مطلوب ( $y_3$ ) در نظر گرفته‌ایم، که در جدول (۳) آورده شده است.

جدول ۳: داده‌های مثال عددی ۲

$DMU_j$	$x_{1j}$	$x_{2j}$	$y_{1j}$	$y_{2j}$	$y_{3j}$	$z_{1j}$
1	488	3421	389339	2436	0.0032000	559073
2	481	8127	233480	4615	0.00420000	328236
3	1516	5909	386164	7895	0.00320000	567324
4	14.8	458.2	28596	424	0.00610000	70904
5	91.3	713	57264	305	0.00760000	102728
6	483	2532.5	28654	3299	0.00090000	55920
7	334	743.4	223004	3416	0.00420000	281318
8	26.3	621.24	42399	1070	0.00090000	89069
9	356	7801	252491	11613	0.00035000	305319
10	855	2850	224689	3152	0.00360000	298275
11	33.2	580.5	50728	387	0.00070000	8179۸
12	17.4	626.02	42167	575	0.00110000	89075
13	40.4	793.2	43836	1228	0.00090000	86818
14	25.9	555.2	52001	400	0.00070000	80136
15	82.9	3059.7	52599	3096	0.00060000	95503
16	270	2485.5	282270	3582	0.00000300	455634
17	794	4022	409531	8140	0.00000200	603405
18	424	5542	228087	566	0.00000350	298161
19	460	3685.5	231330	712	0.00000350	313581
20	511	3380.5	387381	5230	0.00000230	591300
21	752.5	3157	406597	4464	0.00000180	570438

جدول ۴: رتبه‌بندی واحدها با استفاده از روش پیشنهادی

$DMU_j$	$E_j^{(1)}$	$E_j^{(2)}$	$\Delta_j^{(1)}$	$\Delta_j^{(2)}$	$\zeta_j^{(1)}$	$\zeta_j^{(2)}$	$E_j^{(1)} \cdot E_j^{(2)}$	$\Delta_j^{(1)} + \Delta_j^{(2)}$	$\zeta_j^{(1)} \cdot \zeta_j^{(2)}$	رتبه
1	0.76389	0.65417	172803.812	91098.386	0.764	0.837	0.499714	263902.2	0.639468	6
2	0.23875	0.21431	1046577.053	33601.998	0.239	0.898	0.051167	1080179	0.214622	19
3	0.34908	0.29224	1057879.958	97562.73	0.349	0.828	0.102015	1155443	0.288972	16
4	1	1	0	8406.699	1	0.881	1	8406.699	0.881	2
5	0.69905	0.69905	44225.626	60.397	0.699	0.999	0.488671	44286.02	0.698301	4
6	0.09211	0.09211	551178.487	15200.144	0.092	0.728	0.008484	566378.6	0.066976	21
7	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
8	0.89537	0.54678	10408.422	34680.073	0.895	0.611	0.48957	45088.5	0.546845	11
9	0.24175	0.24175	957644.321	0	0.242	1	0.058443	957644.3	0.242	18
10	0.3508	0.33113	551998.582	18124.308	0.351	0.939	0.11616	570122.9	0.329589	15
11	0.83827	0.64796	15781.229	19410.137	0.838	0.763	0.543165	35191.37	0.639394	7
12	1	0.61323	6285.228	34498.664	0.934	0.613	0.61323	40783.89	0.572542	9
13	0.6644	0.43019	43853.284	30608.976	0.664	0.647	0.285818	74462.26	0.429608	13
14	0.88855	0.71808	10051.745	16261.729	0.889	0.797	0.63805	26313.47	0.708533	3
15	0.22504	0.17076	369424.599	28716.432	0.205	0.699	0.038428	398141	0.143295	20
16	0.93678	0.70177	30750.362	125551.853	0.937	0.724	0.657404	156302.2	0.678388	5
17	0.6166	0.50604	375201.931	121573.942	0.617	0.799	0.312024	496775.9	0.492983	12
18	0.30147	0.27887	690850.016	33762.915	0.301	0.887	0.084071	724612.9	0.266987	17
19	0.41633	0.37139	439623.489	45285.919	0.416	0.856	0.154621	484909.4	0.356096	14
20	0.80052	0.63417	147348.81	137997.18	0.801	0.767	0.507666	285346	0.614367	8
21	0.68114	0.58708	267040.952	95677.487	0.681	0.832	0.399884	362718.4	0.566592	10

ابتدا با استفاده از مدل‌های (۵) و (۶) کارایی هر یک از زیر واحدها و کارایی کلی را محاسبه کرده‌ایم. واحدهای ۴ و ۷ دارای کارایی کلی یک می‌باشند. جهت رتبه‌بندی واحدها، گپ‌های تصنعی را از مدل (۱۱) محاسبه نموده‌ایم و با استفاده از وزن‌های مدل (۱۱)، میزان  $\epsilon^*$  را از رابطه (۲۰) می‌یابیم. نتایج حاصله در جدول (۴) آورده شده است. با توجه به تعریف ۴-۲ واحدها را رتبه‌بندی نموده‌ایم. مشاهده می‌شود با توجه به روش رتبه‌بندی پیشنهاد شده، واحد ۴ دارای رتبه دو و واحد ۷ دارای رتبه یک می‌باشد. مشاهده می‌شود که گپ تصنعی واحد ۷ در مرحله اول و دوم برابر صفر می‌باشد.

#### ۶- نتیجه‌گیری

از آنجایی که ممکن است کارایی چند واحد برابر یک شود، جهت تمایز قائل شدن بین چنین واحدهایی، ابتدا در این مقاله با استفاده از مجموع وزن‌های مشترک مرحله اول و مرحله دوم، کارایی وزن مشترک برای واحدهای کارا را محاسبه نموده‌ایم. سپس با ارائه مدلی پیشنهادی، میزان گپ‌های تصنعی خروجی و ورودی را محاسبه نموده‌ایم و با استفاده از میزان کارایی وزن مشترک و میزان گپ‌های تصنعی به رتبه‌بندی واحدها پرداخته‌ایم. در روش به کار گرفته شده در این مقاله امکان رتبه‌بندی از مجموعه  $E$  به مجموعه  $E \cup E'$  گسترش یافته است. همچنین به نتایج ارزشمندی مطابق با رتبه‌بندی وزن مشترک واحدهایی با ساختار دو مرحله‌ای رسیده‌ایم که با دسته‌بندی مدل‌های پایه‌ای  $DEA$  دو مرحله‌ای تناقضی ندارد.

#### ۷- تقدیر و تشکر

لازم می‌دانیم از معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر قدس در حمایت مالی از این مقاله تشکر نماییم.

units in data envelopment analysis, *Applied Mathematics and Computation* 184 (2), 638-648.

[10] Liu, F.H.F., Peng, H. H., (2006), Ranking of units on the DEA frontier with common weights, *Computer & Operation Research* 35, 1624- 1637.

[11] Lovell, C. A. K, Rouse, A. P. B., (2003), Equivalent standard DEA models to provide superefficiency scores, *Journal of the Operational Research Society* 54 (1), 101-108.

[12] Obata, T., Ishii, H., (2003), A method of discriminating efficient candidates with ranked voting data, *European Journal of Operational Research* 151, 233-237.

[13] Seiford, L. M., Zhu, J., (1999), Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models, *INFOR* 37 (2), 174-187.

[14] Seiford, L. M., Zhu, J., (1999), Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks, *Management Science* 45 (9), 1270-1288.

[15] Sexton, T. R., Silkman, R. H., Hogan, A. J., (1986), Data envelopment analysis; Critique and extensions, in; R. H. Silkman (Ed.), *Measuring Efficiency An Assessment of Data Envelopment Analysis*, Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.

## فهرست منابع

[1] Andersen, P., Petersen, N. C., (1993), A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* 39, 1261-1264.

[2] Banker, R. D., Chang, H., (2006), The super-efficiency procedure for outlier identification, not for ranking efficient units, *European Journal of Operational Research* 175 (2), 1311-1320.

[3] Charnes, A., Cooper, W.W. Rhodes, E., (1987), Measuring the efficiency of decisions making units, *European Journal of Operational Research* 2, 429-444.

[4] Chen, Y., (2004) Ranking efficient units in DEA, *Omega* 32 (3), 213-219.

[5] Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., Zho, J. (2009), Additive efficiency decomposition in two stage DEA, *European Journal of Operational Research* 196, 1170-1176.

[6] Chen, Y., Cook, W. D., Zhu, J., (2010), Deriving the DEA frontier for two-stage processes, *European Journal of Operational Research* 202, 138-142.

[7] Chen, Y., Zhu, J., (2004), Measuring Information Technology's Indirect Impact on Firm Performance, *Information Technology and Management* 5, 9-22.

[8] Halkos, G. E., Tzermes, N. G., Kourtzidis, S. A., (2014), A unified classification of two-stage DEA models, *Surveys in Operations Research and Management Science* 19, 1-16.

[9] Li, S., Jahanshahloo, G.R., Khodabakhshi, M., (2007), A super-efficiency model for ranking efficient