دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده با استفاده از کارایی متقاطع در حضور خروجی‌های نامطلوب و عدم قطعیت داده‌ها

نازیلا آقایی *

گروه مدیریت، مرکز تحقیق در عملیات و اقتصاد، دانشگاه کاتولیک لوون، لوون لنو، بلژیک
گروه ریاضی، واحد اردبیل، دانشگاه آزاد اسلامی، اردبیل، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۰۳/۲۰

چکیده

کارایی متقاطع یک ابزار سودمند برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) در تحلیل پوششی دادها (DEA) می‌باشد. اما از انجا که ممکن است در ارزیابی DMUها وزن‌های بهینه منحصر بفرد نباشد لذا انتخاب یکی از آنها کار ساده‌ای نخواهد بود و ممکن است نتایج حاصل از جواب‌های بهینه دگرین، متفاوت باشد. برای این منظور، در این مقاله، روشی برای رتبه بندی DMUها که مشکل غیر یکتایی را ندارد، ارایه می‌شود. از آنجا که خروجی‌ها به دوصورت مطلوب و نامطلوب به کار می‌روند. پس ارایه مدل‌هایی برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور خروجی‌های مطلوب ونامطلوب حایز اهمیت است. ازطرفی مدل‌های DEA کلاسیک بادادههای قطعی سروکار دارد. ولی دردنیای واقعی، لزوماً همه داده‌ها قطعی نمی‌باشند. در نتیجه، به دنبال رویکردی هستیم که کارایی DMU را در شرایط عدم قطعیت محاسبه کند. لذا واحدهای تصمیم‌گیرنده باخروجی‌های مطلوب ونا مطلوب بازه‌ای رتبه‌بندی می‌شوند. برای رویارویی با این مسئله، یک کران پایین و یک کران بالا برای کارایی براساس رویکرد بازه‌ای پیشنهاد می‌شود. نتایج حاصل در یک مثال عددی ساده مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، رتبه‌بندی، عدم قطعیت، خروجی نامطلوب.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: nazila.aghayi@gmail.com

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) که توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) معرفی شد. یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMUها) متجانس با مصرف چندین ورودی برای تولید چندین خروجی می‌باشد. مدل ارایه شده توسط آنها به مدل CCR معروف است که دارای بازده به مقیاس ثابت است. بنکر و همکاران (۱۹۸۴) با تغییر در مدل CCR، مدل BCC را ارائه کردند، که بر خلاف مدل CCR مدل BCC دارای بازده به مقیاس متغیر است. مدل‌های سنتی DEA به ارزیابی DMUها توسط همه وزن‌های انعطاف‌پذیر می‌پردازد که ممکن است بسیاری از DMUها را کارا تشخیص دهد و به علت زیاد بودن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا نمی‌توانیم در بین DMUها کاراترین آن را پیدا کنیم یعنی گرچه این مدل‌ها می‌توانند کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا را از ناکارا تشخیص دهند اما قدرت تمیز دادن بین واحدهای کارا را ندارند. برای حل این مشکل به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده پرداخته می‌شود. روش‌های زیادی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده ارایه شده است. می‌توان به روش‌های ابرکارایی ارایه شده توسط اندرسن و پیترسون (۱۹۹۳)، وزن مشترک ارایه شده توسط کوک و همکاران (۱۹۹۰)، رتبه‌بندی بر مبنای اسلک‌ها ارایه شده توسط سی‌یوشی (۱۹۹۹) و کارایی متقاطع ارایه شده توسط سکستون و همکاران (۱۹۸۶) اشاره کرد. مشکل نشدنی بودن مدل‌های ابرکارایی در DEA توسط ژو (۱۹۹۹) بررسی شد. چن و همکاران (۲۰۱۳) مدل ابرکارایی را بر مبنای تابع فاصله جهت دار اصلاح شده ارایه دادند. کاو و هانگ (۲۰۰۵) مدل‌های رتبه‌بندی در DEA را به کمک وزن مشترک پیشنهاد دادند. سان و همکاران (۲۰۱۳) رتبه واحدهای تصمیم‌گیرنده را با در نظر گرفتن وزن مشترک و DMUهای ایده‌ال و انتی‌ایده‌ال بدست آوردند. حسین‌زاده‌لطفی و همکاران (۲۰۱۳) به تخصیص منابع ثابت با استفاده از DEA و وزن مشترک پرداختند. در روش کارایی متقاطع به دلیل منحصر بفرد نبودن وزن‌های بدست آمده، ماتریس کارایی متقاطع منحصر بفرد نمی‌باشد. لذا برای این مشکل مفهوم هدف ثانویه مطرح شد که دویل و گرین (۱۹۹۴) مدل‌های خوشبینانه و بدبینانه‌ای که بترتیب کارایی متقاطع واحدهای دیگر را بیشینه و کمینه می‌کنند را ارایه دادند. وانگ و چاین (۲۰۱۰) یک مدل کارایی متقاطع جایگزین، تحت عنوان مدل بی‌طرف برای بدست آوردن یک مجموعه متفاوت از وزن‌های ورودی و خروجی پیشنهاد کردند. جهانشاهلو و همکاران (۲۰۱۱) انتخاب وزن‌های متقارن را به عنوان یک هدف ثانویه در ارزیابی کارایی متقاطع پیشنهاد کردند. دیمیتروف و سوتون (۲۰۱۳) مدلی پیشنهاد نمودند که در آن نه تنها کارایی فردی واحد تحت ارزیابی بیشینه شده، بلکه وزن‌های متقارن انتخاب می‌گردد. ریوز و سیرونت (۲۰۱۲) اهداف ثانویه را بر اساس مدل کلاسیک کارایی متقاطع برای حذف غیرمنحصر به فردی معرفی کرده و روش تهاجمی و عادلانه را پیشنهاد دادند. وو و همکاران (۲۰۱۶) مدل‌های گزینش اوزان را پیشنهاد کردند که در آنها هدف ثانویه عبارت از بهینه‌سازی وضعیت رتبه‌بندی DMU تحت ارزیابی است. همچنین وانگ و همکاران (۲۰۱۲) مدل کارایی متقاطع را با وزن متعادل ارائه کردند که هدف این روش اجتناب از تفاوتهای بزرگ ما بین وزن‌های بهینه DMUها است. حسین‌زاده‌لطفی و همکاران (۲۰۱۳) یک روش سه مرحله‌ای برای رتبه‌بندی گزینه‌ها ارایه دادند که به منظور حل غیر منحصر بفرد بودن وزن‌ها از هدف ثانویه استفاده کردند.

در مدل‌های DEA، یک واحد ناکارا می‌تواند با افزایش در سطح خروجی و با کاهش در سطح ورودی کارایی خود را افزایش دهد. در حالی‌که در دنیای واقعی، خروجی‌ها به دو صورت مطلوب و نامطلوب می‌توانند باشند. بعنوان مثال وام‌های معوقه در بانک‌ها بعنوان خروجی‌های نامطلوب در نظر گرفته می‌شود. یکی از اولین مطالعات درباره بکارگیری خروجی‌های نامطلوب در بررسی کارایی، توسط پیتمن (۱۹۸۳) انجام شد. این تحقیق مدل ارائه شده توسط کاوز و همکاران (۱۹۸۲) را گسترش داد تا ارزیابی را در حضور خروجی‌های مطلوب و نامطلوب انجام دهد. به‌طور کلی در پیشینه DEA برای رویارویی با خروجی های نامطلوب دو رویکرد وجود دارد. رویکرد اول مبتنی بر روش غیرمستقیم می‌باشد این

روش توسط سیفورد و ژو (۲۰۰۲) با تغییراتی در مدل ارائه شده توسط چارنز و همکاران (۱۹۷۸) پیشنهاد شدکه برای ارزیابی کارایی، خروجی‌های نامطلوب را در نظر گرفتند رویکرد دوم مبتنی بر روش مستقیم می‌باشد که توسط چامبرز و همکاران (۱۹۹۶) ارایه شد و سپس توسط چانگ و همکاران (۱۹۹۷) گسترش داده شد. دونگ (۲۰۱۳) یک رتبه‌بندی کامل از DMUها در حضور خروجی‌های نامطلوب ارایه داده است. صفار اردبیلی و همکاران (۲۰۰۷) نمره کارایی DMUها را در حضور خروجی‌های نامطلوب محاسبه کردند. لیو و همکاران (۲۰۱۵) رویکرد جدیدی برای ارزیابی کارایی بانک‌های چین با خروجی‌های نامطلوب بیان کرده‌اند.

از نیمه دوم قرن بیستم بهینه‌سازی کاربردهای زیادی پیدا کرد و ازهمان شروع بهینه‌سازی روشن شد که تحلیلگران بایک سری عدم قطعیت در داده‌ها روبرو هستند. به عنوان مثال تعیین دقیق آلودگی تولید شده توسط یک واحد تولیدی، ارزش مقالات انتشار یافته توسط اعضای هیئت علمی یک دانشگاه همواره بطور دقیق ممکن نمی‌باشد. از جمله دلایل اصلی عدم قطعیت در داده‌های یک مساله بهینه‌سازی عبارتند از اینکه، برخی از داده‌های مساله به هنگام حل آن موجود نمی‌باشند. (مانندتقاضای آتی یک کالا) و باید پیش‌بینی شوند در اینجا خطای پیش‌بینی را داریم.برخی از داده‌ها (از قبیل پارامترهای مربوط به تجهیزات، فرآیندها، مواد و ...) را نمی‌توان به طور دقیق اندازه گرفت و آن‌ها را حول یک مقدار اسمی گرد می‌کنند. در اینجا خطای اندازه‌گیری وجود دارد. در بعضی از موارد نیز متغیرهای تصمیم را نمی‌توانیم همان طوری که محاسبه شده‌اند پیاده‌سازی کنیم این نوع خطای پیاده‌سازی معادل یک سری عدم قطعیت مصنوعی می‌باشد. با توجه به ماهیت ریاضی داده‌های عدم قطعیت (بازه‌ای، فازی، ترتیبی، تصادفی و...) استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها ابزاری مناسب برای پرداختن به ابهام ذاتی داده‌ها است. روش تحلیل پوششی داده‌های بازه‌ای یک ابزار مفید در سنجش کارایی چندین DMU با در نظر گرفتن شرایط ریسک و عدم قطعیت می‌باشد. در مدل DEA بازه‌ای مقادیر هریک از داده‌ها و ستاده‌ها در درون یک بازه قرار می‌گیرد و مقدار نهاده یا ستاده در این بازه می‌تواند متغیر باشد. آقایی و همکاران (۲۰۱۶) مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار با یک مجموعه وزن‌های مشترک (CSWs) تحت درجات مختلف سطح محافظه‌کاری و عدم قطعیت داده‌ها پیشنهاد کرده‌اند که در این مدل اندازه‌گیری کارایی DMUها با CSWها انجام می‌گیرد که در آن داده‌های ورودی و خروجی می‌توانند در یک بازه متفاوت باشد. طلوع و همکاران (۲۰۰۸) کارایی سود کلی را با داده‌های بازه ای بدست آوردند. رستمی مال خلیفه و آقایی (۲۰۱۱) مدلی جهت اندازه‌گیری کارایی سود کلی با داده‌های فازی ارایه دادند. آقایی (۲۰۱۷) مدلی برای اندازه‌گیری کارایی هزینه با داده‌های فازی پیسنهاد داد. همچنین، آقایی (۲۰۱۶) کارایی درآمد DMUها را با داده‌های فازی در حضور خروجی‌های نامطلوب محاسبه کرد. وانگ و همکاران (۲۰۰۵)، سعی در ارائه تکنیک جدید برای حل مدل‌های تحلیلی پوششی داده‌های بازه‌ای نمودند تا هم از پیچیدگی و طولانی بودن مراحل حل این روش بکاهند و هم اینکه روشی را برای رتبه‌بندی و یافتن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا و ناکارا ارائه نمایند. امروزنژاد و همکاران (۲۰۱۱) اندیس بهره‌وری مالمکوییست سود کلی را با داده‌های بازه ای و فازی بدست آوردند. جمله وانک و همکاران (۲۰۱۶) برای رویارویی با عدم قطعیت داده‌ها از رویکرد فازی استفاده کرده و به ارزیابی کارایی بانک‌ها پرداخته است. صالح پور و آقایی (۲۰۱۵) بیشترین کارایی درآمد با قیمت‌های نامعین را بدست آوردند. رستمی مال خلیفه و آقایی (۲۰۱۱) دو روش برای رتبه بندی DMUها براساس کارایی سود کلی آنها با داده‌های بازه‌ای پیشنهاد دادند. اقایی و ملکی (۲۰۱۶) روشی که بصورت تلفیقی از دو روش مستقیم و غیرمستقیم براساس یک تابع فاصله مسافت جهت‌دار می‌باشد را برای اندازه گیری کارایی با خروجی‌های نامطلوب و عدم قطعیت داده‌ها ارایه دادند. لیو و همکاران (۲۰۱۶) روشی برای رتبه‌بندی واحدها به کمک کارایی متقاطع با حضور خروجی‌های نا مطلوب ارایه داده‌اند.

در این مقاله، با درنظر گرفتن داده‌های ورودی، خروجی مطلوب و نامطلوب بازه‌ای به رتبه‌بندی واحدهای تصمیم گیرنده به کمک کارایی متقاطع پرداخته‌ایم. اما از انجا که

در کارایی متقاطع وزن‌های بهینه منحصر بفرد نمی‌باشد، در این تحقیق سعی بر آن شده که مدل ارایه شده برای رتبه‌بندی مشکل عدم یکتایی وزن‌ها را نداشته باشد. همچنین، چون داده‌های مورد نظر بصورت بازه‌ای هستند، مدلی جهت یافتن رتبه واحدهای تصمیم گیرنده در دو حالت خوشبینانه و بدبینانه ارایه می‌شود.

بخش‌های مقاله به صورت زیر می‌باشد: دربخش۲، به بررسی مدل کارایی متقاطع در حضور خروجی‌های نامطلوب با داده‌های قطعی پرداخته می‌شود و در بخش۳، برای رتبه‌بندی DMUها بر مبنای کارایی متقاطع در حضور خروجی‌های نامطلوب با در نظر گرفتن عدم قطعیت داده‌ها ارایه شده و برای حل آن رویکرد بازه‌ای پیشنهاد می‌شود. در بخش۴، مثال عددی برای نشان دادن کاربرد روش‌های ارایه شده، توضیح داده می‌شود و در نهایت بخش نتیجه‌گیری ارایه می‌شود.

۲- کارایی متقاطع در حضور خروجی‌های نامطلوب

فرض کنید n، DMU با m ورودی، s خروجی مطلوب و k خروجی نامطلوب وجود دارد، بطوری‌که $x_j=(x_{1j},\ldots,x_{mj})$، $y_j^g=(y_{1j}^g,\ldots,y_{sj}^g)$ و $y_j^b=(y_{1j}^b,\ldots,y_{kj}^b)$ بترتیب بردار ورودی، بردار خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب متناظر DMU_j است. لیو و همکاران (۲۰۱۶) مدل زیر را برای ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده پیشنهاد داده‌اند:

$$
\begin{aligned}
E_{dd} = \max\ & \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{g}+\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pd}^{b} \\
s.t.\ & \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}=1, \\
& \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{g}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{b}\ge 0\ ,\ \forall j, \\
& \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{g}\ge \alpha\times\varepsilon_d^{*}, \\
& \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}y_{pd}^{b}\ge \beta\times\varepsilon_d^{*}, \\
& \omega_{id}\ge 0,\mu_{rd}\ge 0,\varphi_{pd}\ge 0,\quad \forall i,r,p.
\end{aligned} \tag{۱}
$$

که در مدل فوق، $\hat{y}_p^b=-y_p^b+w_p,\ (p=1,\ldots,k)$ و w_p یک بردار n بعدی مناسب است که می‌تواند همه خروجی‌های نامطلوب منفی را نیز به مثبت تبدیل کند. (لیو و همکاران (۲۰۱۶) را ببینید.) همچنین $\varphi_{pd},\mu_{rd},\omega_{id}$ بترتیب وزن‌های ورودی، خروجی‌های مطلوب و نامطلوب می‌باشد. d اندیس واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی است. α و β پارامترهایی هستند که کوچکترین درصد ε_d^* را نشان می‌دهد که بترتیب در ارزیابی متناظر خروجی‌های مطلوب و نامطلوب می‌توانند استفاده شوند. در این مقاله، $\alpha=\beta=0.2$ در نظر می‌گیریم. همچنین ε_d^* مقدار بهینه مدل زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_d^{*} = \max\ & \varepsilon_d \\
s.t.\ & \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}=1, \\
& \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{g}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{b}\ge 0\ ,\ \forall j, \\
& \sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{g}\ge \alpha\times\varepsilon_d, \\
& \sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}y_{pd}^{b}\ge \beta\times\varepsilon_d, \\
& \omega_{id}\ge 0,\mu_{rd}\ge 0,\varphi_{pd}\ge 0,\quad \forall i,r,p.
\end{aligned} \tag{۲}
$$

فرض کنید $(\omega_{id},\mu_{rd},\varphi_{pd}),\forall i,r,p$ جواب بهینه مدل (۱) باشد، پس کارایی متقاطع DMU_j متناظر با DMU_d بصورت زیر محاسبه می شود:

$$
E_{dj}=\frac{\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}^{*}y_{rj}^{g}+\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}^{*}\hat{y}_{pj}^{b}}{\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}^{*}x_{ij}} \tag{۳}
$$

نمره کارایی متقاطع DMU_j بصورت میانگین $E_{dj},d=1,\ldots,n$ تعریف می‌شود، یعنی:

$$
E_j=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}E_{dj} \tag{۴}
$$

۳- رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور خروجی‌های نامطلوب و عدم قطعیت داده‌ها

فرض کنید n، واحد تصمیم‌گیرنده با m m ورودی بازه‌ای، s خروجی مطلوب بازه‌ای و k خروجی

نامطلوب بازه‌ای وجود دارد بطوری که: $\tilde{x}_j \in \left[x_j^L, x_j^U\right]$ و $\tilde{y}_j^g \in \left[y_j^{gL}, y_j^{gU}\right]$ و $\tilde{y}_j^b \in \left[y_j^{bL}, y_j^{bU}\right]$، $j=1,\dots,n$. در واقع، x_j^L، y_j^{gL} و y_j^{bL} بترتیب کران‌های پایین بردار ورودی، بردارهای خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب متناظر DMU_j است. همچنین، x_j^U، y_j^{gU} و y_j^{bU} بترتیب کران‌های بالا بردار ورودی، بردارهای خروجی مطلوب و خروجی نامطلوب متناظر DMU_j می‌باشد. در صورتی‌که کران‌های بالا و پایین مقادیر یکسان داشته باشند، داده‌ها بصورت قطعی خواهند بود. بنابراین مدل (۱) در حضور عدم قطعیت داده‌ها بصورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$
\begin{aligned}
E_{dd} = \max \ & \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} \tilde{y}_{rd}^{g} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{\tilde{y}}_{pd}^{b} \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} \tilde{x}_{id} = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} \tilde{x}_{ij} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} \tilde{y}_{rj}^{g} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{\tilde{y}}_{pj}^{b} \ge 0, \ \forall j, \\
& \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} \tilde{y}_{rd}^{g} \ge \alpha \times \varepsilon_d^*, \\
& \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pd}^{b} \ge \beta \times \varepsilon_d^*, \\
& \omega_{id} \ge 0, \mu_{rd} \ge 0, \varphi_{pd} \ge 0, \quad \forall i, r, p.
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

از آنجا که در مدل (۵)، پارامترهای ورودی، خروجی مطلوب و نامطلوب در یک بازه تغییر می‌کنند، انتظار می‌رود که مقدار کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده نیز در یک بازه باشند. برای این هدف، یک کران بالا و یک کران پایین برای نمره کارایی DMUها ارایه می‌شود. به این صورت که هرگاه هدف محاسبه کران بالای نمره کارایی باشد، DMU تحت ارزیابی را در بهترین وضعیت و دیگر DMUها را در بدترین وضعیت قرار می‌دهیم. یعنی، برای DMU تحت ارزیابی کران پایین ورودی و کران بالاخروجی مطلوب و نامطلوب و برای دیگر DMUها کران بالا ورودی و کران پایین خروجی مطلوب و نامطلوب را درنظر می‌گیریم. اگر هدف محاسبه کران پایین نمره کارایی باشد، DMU تحت ارزیابی را در بدترین وضعیت و دیگر DMUها را در بهترین وضعیت قرار می‌دهیم. یعنی، برای DMU تحت ارزیابی کران پایین ورودی و کران بالاخروجی مطلوب و نامطلوب و برای دیگر DMUها کران بالا ورودی و کران پایین خروجی مطلوب و نامطلوب را در نظر می‌گیریم. بنابراین مدل‌های زیر را بترتیب برای حالت خوشبینانه و بدبینانه ارایه می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
E_{dd}^U = \max \ & \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pd}^{bU} \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^L = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^U - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gL} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pj}^{bL} \ge 0, \forall j, j \ne d, \\
& \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^L - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pd}^{bU} \ge 0, \\
& \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} \ge \alpha \times \varepsilon_d^{*U}, \\
& \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} y_{pd}^{bU} \ge \beta \times \varepsilon_d^{*U}, \\
& \omega_{id} \ge 0, \mu_{rd} \ge 0, \varphi_{pd} \ge 0, \quad \forall i, r, p.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

$$
\begin{aligned}
E_{dd}^L = \max \ & \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gL} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pd}^{bL} \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^U = 1, \\
& \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^L - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gU} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pj}^{bU} \ge 0, \forall j, j \ne d, \\
& \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^U - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gL} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \tilde{y}_{pd}^{bL} \ge 0, \\
& \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gL} \ge \alpha \times \varepsilon_d^{*L}, \\
& \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} y_{pd}^{bL} \ge \beta \times \varepsilon_d^{*L}, \\
& \omega_{id} \ge 0, \mu_{rd} \ge 0, \varphi_{pd} \ge 0, \quad \forall i, r, p.
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

بطوریکه ε_d^{*U} در مدل (۶) مقدار تابع هدف مدل زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_d^{*U} &= \max \quad \varepsilon_d^U \\
s.t. \ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^L = 1,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}^{U}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{gL}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{bL}\geq 0\ ,\ \forall j, j\neq d,\\
&\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}^{L}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pd}^{bU}\geq 0\ ,\\
&\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}\geq\alpha\times\varepsilon_{d}^{U}\ ,\\
&\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}y_{pd}^{bU}\geq\beta\times\varepsilon_{d}^{U}\ ,\\
&\omega_{id}\geq 0,\mu_{rd}\geq 0,\varphi_{pd}\geq 0,\ \ \forall i,r,p.
\end{aligned}\qquad (۸)$$

وجود محدویت‌های وزنی $\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}\geq\alpha\times\varepsilon_{d}^{*U}$ و $\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}y_{pd}^{bU}\geq\beta\times\varepsilon_{d}^{*U}$ در مدل (۶)، باعث می‌شوند که وزن‌های متناظر با خروجی‌های مطلوب و نامطلوب برای واحد تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی برابر صفر نباشد. همچنین اختلاف بین مجموع وزن‌دار شده خروجی‌های مطلوب و نامطلوب در کران بالا برای واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی را کاهش می‌دهد. بدیهی است مقدار ε_{d}^{*U} همواره مثبت خواهد بود. لذا با حل مدل (۸) متناظر هر n DMU، می‌توان مجموعه‌ای به‌صورت $\{\varepsilon_{1}^{*U},\dots,\varepsilon_{n}^{*U}\}$ بدست آورد. بطور مشابه، می‌توان ε_{d}^{*L} و مدل (۷) را تفسیر کرد.

تعریف ۱: در مدل (۶)، اگر $E_{dd}^{U}=1$ باشد آنگاه گوییم DMU_{d} در حالت خوشبینانه کاراست و در غیر اینصورت ناکارا خواهد بود.

از آنجایی که در مدل (۶)، ممکن است بیش از یک DMU کارا تشخیص داده شود، پس DMUها را رتبه بندی می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنید $(\omega_{id},\mu_{rd},\varphi_{pd}),\forall i,r,p$ جواب بهینه مدل (۶) باشد، پس کارایی متقاطع DMU_{j} متناظر با DMU_{d} بصورت زیر محاسبه می شود:

$$E_{dj}^{U}=\frac{\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}^{*}y_{rj}^{gU}+\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}^{*}\hat{y}_{pj}^{bU}}{\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}^{*}x_{ij}^{L}},\ d=1,\dots,n,\qquad (۹)$$

نمره کارایی متقاطع DMU_{j} بصورت میانگین $E_{dj}^{U}, d=1,\dots,n$ تعریف می‌شود، یعنی:

$$E_{j}^{U}=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}E_{dj}^{U}\qquad (۱۰)$$

از طرفی، مدل (۶) ممکن است جواب‌های بهینه دگرین داشته باشد. در نتیجه، نمره کارایی متقاطع DMUها که از آن بدست آمده ممکن است منحصر بفرد نباشد. لذا مدل زیر برای رتبه‌بندی DMUها ارایه می‌شود بطوریکه مقدار کارایی بدست آمده از مدل (۶) یعنی E_{dd}^{U} را تضمین می‌کند.

$$\begin{aligned}
&R_{d}^{U}=\min\ \sum_{j=1}^{n}z_{j}\\
&s.t.\ \sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}^{L}=1,\\
&\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}+\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pd}^{bU}=E_{dd}^{U},\\
&\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}^{U}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{gL}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{bL}\geq 0\ ,\ \forall j, j\neq d,\\
&\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}^{L}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pd}^{bU}\geq 0\ ,\\
&\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}^{U}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{gL}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{bL}+s_{j}=0,\ \ \forall j, j\neq d,\\
&E_{dd}^{U}\times\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{id}^{L}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pd}^{bU}+s_{d}=0,\\
&\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rd}^{gU}\geq\alpha\times\varepsilon_{d}^{*U}\ ,\\
&\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}y_{pd}^{bU}\geq\beta\times\varepsilon_{d}^{*U}\ ,\\
&s_{j}\leq M\times z_{j}\ ,\qquad\forall j,\\
&\omega_{id}\geq 0,\mu_{rd}\geq 0,\varphi_{pd}\geq 0,\ \ \forall i,r,p,\ \ z_{j}\in\{0,1\},\ \ \forall j.
\end{aligned}\qquad (۱۱)$$

که M یک عدد بسیار بزرگ مثبت است. مدل (۱۱) تضمین می‌کند که همه DMUها متعلق به مجموعه امکان تولید می‌باشند. s_{j} یک متغیر آزاد است. اگر $s_{j}>0$ آنگاه

$$\begin{aligned}
&E_{dd}^{U}\times\sum_{i=1}^{m}\omega_{id}x_{ij}^{U}-\sum_{r=1}^{s}\mu_{rd}y_{rj}^{gL}\\
&-\sum_{p=1}^{k}\varphi_{pd}\hat{y}_{pj}^{bL}=-s_{j}\ ,\ \ \forall j, j\neq d\ ,
\end{aligned}\qquad (۱۲)$$

پس باید داشته باشیم:

$$\begin{aligned} & E_{dd}^{U} \times \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^{U} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gL} \\ & - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pj}^{bL} < 0, \quad \forall j, j \neq d, \\ & \Rightarrow E_{dd}^{U} < \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gL} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pj}^{bL}}{\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^{U}} \\ & \leq \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gU} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pj}^{bU}}{\sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^{L}} = E_{dj}^{U}, \end{aligned} \quad (۱۳)$$

یعنی، کارایی متقاطع DMU_j در حالت خوشبینانه متناظر با DMU_d بزرگتر از مقدار کارایی DMU_d در حالت خوشبینانه است. بنابراین با استفاده از مجموعه وزن‌های بهینه بدست امده برای DMU_d، رتبه DMU_d بعد از رتبه DMU_j خواهد بود. به‌عبارت دیگر، DMU_j رتبه بهتری نسبت به DMU_d دارد. z_j یک متغیر دودویی است. اگر $z_j = 1$ و $s_j > 0$ آنگاه با توجه به دسته محدودیت $s_j \leq M \times z_j$ خواهیم داشت $s_j \leq M$. چون تابع هدف مجموع z_j را مینیمم می‌کند پس در واقع تعداد s_jهایی که می‌توانند بزرگتر از صفرباشد را مینیمم می‌کند. در واقع، تعداد DMUهایی که رتبه بهتری از DMU_d دارند را مینیمم می‌کند. پس با استفاده از مدل (۱۱) بهترین رتبه برای DMU_d محاسبه می‌شود. بنابراین اگر R_d^U مقدار بهینه مدل (۱۱) باشد بهترین رتبه برای DMU_d برابر با $R_d^U + 1$ خواهد بود. ولی مدل (۱۱) همچنان مشکل جواب‌های بهینه دگرین را حل نکرده است. که برای حل این مشکل، مدل زیر برای رتبه‌بندی DMUها ارایه می‌شود که با در نظر گرفتن محدودیت $\sum_{j=1}^{n} z_j = R_d^U$، که R_d^U جواب بهینه مدل (۱۱) است، بهترین رتبه برای DMU_d حفظ می‌شود. همچنین محدودیت $\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pd}^{bU} = E_{dd}^{U}$ نشان می‌دهد که نمره کارایی متقاطع در حالت خوشبینانه حفظ می‌شود و مهمترین ویژگی آن حل مشکل عدم یکتایی جواب‌های بهینه دگرین است.

$$\begin{aligned} & \bar{R}_d^U = \max \sum_{j=1}^{n} \xi_j \\ & s.t. \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^{L} = 1, \\ & \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pd}^{bU} = E_{dd}^{U}, \\ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^{U} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gL} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pj}^{bL} - \xi_j = 0, \ \forall j, j \neq d, \\ & \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^{L} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pd}^{bU} - \xi_d = 0, \\ & E_{dd}^{U} \times \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{ij}^{U} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rj}^{gL} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pj}^{bL} + s_j = 0, \ \forall j, j \neq d, \\ & E_{dd}^{U} \times \sum_{i=1}^{m} \omega_{id} x_{id}^{L} - \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} - \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} \hat{y}_{pd}^{bU} + s_d = 0, \\ & \sum_{r=1}^{s} \mu_{rd} y_{rd}^{gU} \geq \alpha \times \varepsilon_d^{*U}, \\ & \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd} y_{pd}^{bU} \geq \beta \times \varepsilon_d^{*U}, \\ & s_j \leq M \times z_j, \quad \forall j, \sum_{j=1}^{n} z_j = R_d^U \\ & \omega_{id} \geq 0, \mu_{rd} \geq 0, \varphi_{pd} \geq 0, \ \forall i, r, p, \ \xi_j \geq 0, \ z_j \in \{0,1\}, \ \forall j. \end{aligned} \quad (۱۴)$$

در نتیجه، فرض کنید $(\omega_{id}, \mu_{rd}, \varphi_{pd}), \forall i, r, p$ جواب بهینه مدل (۱۴) باشد، پس کارایی متقاطع DMU_j متناظر با DMU_d بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$CE_{dj}^{U} = \frac{\sum_{r=1}^{s} \mu_{rd}^{*} y_{rj}^{gU} + \sum_{p=1}^{k} \varphi_{pd}^{*} \hat{y}_{pj}^{bU}}{\sum_{i=1}^{m} \omega_{id}^{*} x_{ij}^{L}}, \ d = 1, \ldots, n, \quad (۱۵)$$

نمره کارایی متقاطع DMU_j در حالت خوشبینانه بصورت میانگین $CE_{dj}^{U}, d = 1, \ldots, n$ تعریف می‌شود، یعنی:

$$CE_{j}^{U} = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{n} CE_{dj}^{U}. \quad (۱۶)$$

مشابه آنچه گذشت، می‌توان نمره کارایی متقاطع DMU_j و همچنین میانگین کارایی متقاطع را در حالت بدبینانه محاسبه کرد.

۴- مثال عددی

در این بخش برای نشان دادن کاربرد روش ارایه شده ده واحد تصمیم‌گیرنده با یک ورودی، یک خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب در نظر می‌گیریم که داده‌های ورودی بصورت قطعی و داده‌های خروجی مطلوب و نامطلوب بصورت بازه‌ای هستند. داده‌های مربوط در جدول ۱ داده شده است.

با اجرای مدل (۸)، مقادیر ε_j^{*U} برای هر ده واحد تصمیم گیرنده بدست می‌آید و با جایگذاری در مدل (۶)، مقدار کارایی در کران بالا برای همه واحدها محاسبه می‌شود. با اجرای مدل‌های (۱۱) و (۱۴) رتبه واحدهای تصمیم گیرنده در کران بالا بدست می‌آید. نتایج در جدول ۲ آورده شده است.

ماتریس کارایی متقاطع در کران بالا بصورت جدول ۳ می‌باشد.

جدول ۱: داده‌ها

DMU	x_j^L	x_j^U	y_j^{gL}	y_j^{gU}	y_j^{bL}	y_j^{bU}
۱	۱	۱	۵	۱۰	۵	۱۰
۲	۱	۱	۵	۱۰	۱۵	۲۰
۳	۱	۱	۱۵	۲۰	۲۰	۲۵
۴	۱	۱	۱۰	۱۵	۴۰	۴۵
۵	۱	۱	۳۰	۳۵	۲۵	۳۰
۶	۱	۱	۲۰	۲۵	۴۰	۴۵
۷	۱	۱	۳۰	۳۵	۵۰	۵۵
۸	۱	۱	۱۵	۲۰	۳۵	۴۰
۹	۱	۱	۵	۱۰	۲۰	۲۵
۱۰	۱	۱	۵	۱۰	۳۰	۳۵

جدول ۲: نتایج مدل‌های (۶)، (۸)،(۱۱) و (۱۴)

DMU	ε_j^{*U}	E_j^U	R_j^U	$\overline{R}_j^U$
۱	۰/۶۲۵۰	۰/۳۳۳۳	۵/۰۰۰۰	۵/۱۶۶۷
۲	۰/۹۰۹۱	۰/۳۶۳۶	۶/۰۰۰۰	۴/۷۷۲۷
۳	۱/۴۲۸۶	۰/۶۶۶۷	۲/۰۰۰۰	۵/۱۶۶۷
۴	۱/۶۰۷۱	۰/۶۴۲۹	۳/۰۰۰۰	۴/۸۵۷۱
۵	۱/۹۸۱۱	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۵/۸۵۷۱
۶	۲/۱۶۳۵	۰/۸۶۵۴	۱/۰۰۰۰	۴/۷۵۰۰
۷	۲/۵۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۵/۸۵۷۱
۸	۱/۸۱۸۲	۰/۷۲۷۳	۲/۰۰۰۰	۴/۷۷۲۷
۹	۱/۰۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۶/۰۰۰۰	۴/۸۲۰۰
۱۰	۱/۱۲۹۰	۰/۴۵۱۶	۶/۰۰۰۰	۴/۸۸۷۱

جدول ۳: ماتریس کارایی متقاطع

DMU	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	CE_j^U
۱	۰/۳۳۳۳	۰/۲۷۲۷	۰/۳۳۳۳	۰/۲۸۵۷	۰/۲۸۵۷	۰/۲۶۹۲	۰/۲۸۵۷	۰/۲۷۲۷	۰/۲۸۰۰۰	۰/۲۹۰۳	۰/۲۹۰۹
۲	۰/۳۳۳۳	۰/۳۶۳۶	۰/۳۳۳۳	۰/۳۵۷۱	۰/۲۸۵۷	۰/۳۶۴۵	۰/۲۸۵۷	۰/۳۶۳۶	۰/۳۶۰۰	۰/۳۵۴۸	۰/۳۴۰۳
۳	۰/۶۶۶۷	۰/۵۹۰۹	۰/۶۶۶۷	۰/۶۰۷۱	۰/۵۷۱۴	۰/۵۸۶۵	۰/۵۷۱۴	۰/۵۹۰۹	۰/۶۰۰۰	۰/۶۱۲۹	۰/۶۰۶۵
۴	۰/۵۰۰۰	۰/۶۸۱۸	۰/۵۰۰۰	۰/۶۴۲۹	۰/۴۲۸۶	۰/۶۹۲۳	۰/۴۲۸۶	۰/۶۸۱۸	۰/۶۶۰۰	۰/۶۲۹۰	۰/۵۸۴۵
۵	۱/۱۶۶۷	۰/۹۰۹۱	۱/۱۶۶۷	۰/۹۶۴۳	۱/۰۰۰۰	۰/۸۹۴۲	۱/۰۰۰۰	۰/۹۰۹۱	۰/۹۴۰۰	۰/۹۸۳۹	۰/۹۹۳۴
۶	۰/۸۳۳۳	۰/۸۶۳۶	۰/۸۳۳۳	۰/۸۵۷۱	۰/۷۱۴۳	۰/۸۶۵۴	۰/۷۱۴۳	۰/۸۶۳۶	۰/۸۶۰۰	۰/۸۵۴۸	۰/۸۲۶۰
۷	۱/۱۶۶۷	۱/۱۳۶۴	۱/۱۶۶۷	۱/۱۴۲۹	۱/۰۰۰۰	۱/۱۳۴۶	۱/۰۰۰۰	۱/۱۳۶۴	۱/۱۴۰۰	۱/۱۴۵۲	۱/۱۱۶۹
۸	۰/۶۶۶۷	۰/۷۲۷۳	۰/۶۶۶۷	۰/۷۱۴۳	۰/۵۷۱۴	۰/۷۳۰۸	۰/۵۷۱۴	۰/۷۲۷۳	۰/۷۲۰۰	۰/۷۰۹۷	۰/۶۸۰۵
۹	۰/۳۳۳۳	۰/۴۰۹۱	۰/۳۳۳۳	۰/۳۹۲۹	۰/۲۸۵۷	۰/۴۱۳۵	۰/۲۸۵۷	۰/۴۰۹۱	۰/۴۰۰۰	۰/۳۸۷۱	۰/۳۶۵۰
۱۰	۰/۳۳۳۳	۰/۵۰۰۰	۰/۳۳۳۳	۰/۴۶۴۳	۰/۲۸۵۷	۰/۵۰۹۶	۰/۲۸۵۷	۰/۵۰۰۰	۰/۴۸۰۰	۰/۴۵۱۶	۰/۴۱۴۴

نتیجه‌گیری

یکی از روش‌های پرکاربرد برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده روش کارایی متقاطع می‌باشد. اما در صورتی‌که در ارزیابی واحدها وزن‌های متناظر آنها یکتا نباشد به سادگی نمی‌توان رتبه آنها را بدست آورد. برای مقابله با این مشکل در امر رتبه‌بندی، ارایه اهداف ثانویه می‌تواند مفید باشد. لذا در این مقاله، برای رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور خروجی‌های نامطلوب و عدم قطعیت داده‌ها روشی ارایه می‌شود که بر مبنای کارایی متقاطع است و مشکل عدم یکتایی را ندارد.

تقدیر و تشکر

این مقاله در دوره فرصت مطالعاتی نویسنده با حمایت دانشگاه آزاد اسلامی واحد اردبیل تدوین شده است.

فهرست منابع

[1] Aghayi, N, Tavana, M., Raayatpanah, .A., (2016), Robust efficiency measurement with common set of weights under varying degrees of conservatism and data uncertainty, European Journal Industrial Engineering, 10, 385-405.

[2] Aghayi, N. (2016) Revenue Efficiency Measurement with Undesirable Data in Fuzzy DEA. Proceedings of the7th International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation, publisher IEEE, Thailand.

[3] Aghayi, N. (2017). Cost efficiency measurement with fuzzy data in DEA. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 32, 409–420 .

[4] Aghayi, N., Maleki, B., (2016). Efficiency Measurement of DMUs with Undesirable outputs under uncertainty based on the directional distance function: Application on Bank Industry. Energy, 112, 376-387.

[5] Andersen, P., Petersen, N.C., (1993). A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. Management Science, 39 (10), 1261-1264.

[6] Caves, D. W., Christensen, L. R., Diewert, E., (1982). Multilateral comparisons of output, input and productivity using superlative index numbers. The Economic Journal, 92 (365), 73-86.

[7] Chambers, R. G., Chung, Y., Fare, R., (1996). Benefit and distance function. Journal of Economic Theory, 70 (2), 407-419.

[8] Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2 (6), 429-444.

[9] Chen, Y., Du, J., Huo, J., (2013). Super-efficiency based on a modified directional distance function. Omega, 41 (3), 621-625.

[10] Chung, Y. H., Fare, R., Grosskopf, S., (1997). Productivity and undesirable outputs a directional distance function approach. Journal of Environmental Management, 51 (3), 229-240.

[11] Cook, W., Roll, Y., Kazakov, A., (1990). DEA model for measuring the relative efficiencies of highway maintenance patrols. INFOR 28 (2), 811-818.

[12] Dimitrov, Stanko and Sutton, Warren, (2013), Generalized symmetric weight assignment technique: Incorporating managerial preferences in data envelopment analysis using a penalty function, Omega, 41(1), 48 – 54.

[13] Dong, G., (2013). A complete ranking of DMUs with undesirable outputs restrictions in DEA models. Mathematical and Computer Modelling, 58 (5-6), 1102-1109.

[14] Doyle, J.R., Green, R.H., (1994). Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations، meanings and uses. Journal of the Operational Research Society, 45 (5), 567-578.

[15] Emrouznejad, A., Rostamy-Malkhalifeh, M., Hatami-Marbini, A., Tavana, M., Aghayi, N., (2011). An overall profit Malmquist productivity

[22] Pittman, R. W., (1983). Multilateral productivity comparisons with undesirable outputs. Economic Journal, 93 (372), 883-891.

[23] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N. (2011). Two Ranking of Units on the Overall Profit Efficiency with Interval Data. Mathematics Scientific Journal, 8(2), 73–93.

[24] Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., (2011) Measuring overall profit efficiency with fuzzy data. Journal of Mathematical Extension, 5 (2), 73-90.

[25] Ruiz, J.L., Sirvent, I., (2012). On the DEA total weight flexibility and the aggregation in cross-efficiency evaluations. European Journal of Operational Research 223 (3), 732-738.

[26] Saffar Ardabili, J., Aghayi, N., Monzali., (2007). New efficiency using undesirable factors of data envelopment analysis. Modeling & Optimization, 9 (2), 249-255.

[27] Salehpour,S., Aghayi, N., (2015). The Most Revenue Efficiency with Price Uncertainty. International Journal of Data Envelopment Analysis, 3, 575-592.

[28] Seiford, L. M., Zhu, J., (2002). Modeling undesirable factors inefficiency valuation. European Journal of Operational Research, 142 (1), 16-20.

[29] Sexton, T.R., Silkman, R.H., Hogan, A.J., (1986). Data envelopment analysis: critique and extensions. In: Silkman, R.H. (Ed.), Measuring Efficiency: an Assessment of Data Envelopment Analysis. Jossey-Bass, San Francisco, CA, 73-105.

index with fuzzy and interval data. Mathematical and Computer Modelling, 54 (11-12), 2827-2838.

[16] Hosseinzadeh Lotfi, F., Hatami-Marbini, A., Agrell, Per J., Aghayi, N., Gholami, K., (2013). Allocating fixed resources and setting targets using a common-weights DEA approach. Computers & Industrial Engineering 64, (2), 631-640.

[17] Hosseinzadeh Lotfi, F., Rostamy-Malkhalifeh, M., Aghayi, N., Ghelej Beigi, Z., Gholami, K., (2013). An improved method for ranking alternatives in multiple criteria decision analysis. Applied Mathematical Modelling, 37, (1-2), 25-33.

[18] Jahanshahloo, G .R., Hosseinzadeh Lotfi, F., Jafari, Y., Maddahi, R., (2011). Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross-efficiency evaluation, Applied Mathematical Modelling 35 (1), 544-549

[19] Kao, C., Hung, H.T., (2005). Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach. Journal of the Operational Research Society 56 (10), 1196-1203.

[20] Liu, W., Zhongbao, Z., Ma, Ch., Liu, D., Shen, W., (2015). Two-stage DEA models with undesirable input intermediate-outputs. Omega, 56, 74-87.

[21] Liu, X., Chu, J., Yin, P., Sun, J., (2016), DEA cross-efficiency evaluation considering undesirable output and ranking priority: a case study of eco-efficiency analysis of coal-fired power plants, Journal of Cleaner Production, 142 (2), 1-9.

[30] Sueyoshi, T., (1999). DEA non-parametric ranking test and index measurement: slackadjusted DEA and an application to Japanese agriculture cooperatives. Omega Int. J. Management Science 27 (3), 315-326.

[31] Sun, J., Wu, J., Guo, D., (2013). Performance ranking of units considering ideal and anti-ideal DMU with common weights. Applied Mathematical Modelling, 37 (9), 6301-6310.

[32] Toloo, M., Aghayi, N., Rostamy-Malkhalifeh, M., (2008). Measuring overall profit efficiency with interval data. Applied Mathematics and Computation, 201 (1-2), 640-649.

[33] Wang, Y. M., Chin, K. S, (2010). A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension, Expert Systems with Applications 37, 3666-3675.

[34] Wang, Y.M., Chin, K.S., Wang, S., (2012). DEA models for minimizing weight disparity in cross-efficiency evaluation. Journal of the Operational Research Society, 63 (8), 1079-1088.

[35] Wang, Y.M., Greatbanks, R., Yang, B. (2005), Interval Efficiency Assessment Using Data Envelopment Analysis; Fuzzy Sets and Systems 153, 347–370

[36] Wanke, P., Barros, C. P., Emrouznejad, A., (2016). Assessing productive efficiency of banks using integrated Fuzzy-DEA and bootstrapping a case of Mozambican banks. European Journal of Operational Research, 249(1), 378-389.

[37] Wu, J., Chu, J., Sun, J., Zhu, Q., (2016). DEA cross-efficiency evaluation based on Pareto improvement. European Journal of Operational Research 248 (2), 571-579.

[38] Zhu, J., (1999). Infeasibility of super-efficiency data envelopment analysis models. INFOR 37 (2), 174-187