دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

درباره فضاهای انژکتیو تعمیم یافته درتوپولوژی‌های تعمیم یافته

حسن آریانپور *

گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۷/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۰/۱۱

چکیده

در این مقاله ابتدا با بیان برخی از خواص نگاشت‌های یکنوای دلخواه روی یک مجموعه توانی، نوع جدیدی از مفهوم مجموعه‌های باز را ارائه می‌کنیم. با تعمیمی از فضاهای بستاری در توپولوژی رسته‌ای به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته و مفهوم پیوستگی تعمیم یافته می‌پردازیم و با ساختارهای ضعیف و قوی برای فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته آشنا می‌شویم. سپس با معرفی مفهوم نشاننده تعمیم یافته و انژکسیون تعمیم یافته به مطالعه حاصلضرب سازار فضاهای تعمیم یافته در رسته فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته می‌پردازیم. با استفاده از ابزارهای نظریه رسته‌ها، نتایجی درباره رده‌بندی فضاهای انژکتیو تعمیم یافته بیان می‌کنیم که درآن این فضاها نسبت به نشاننده‌های تعمیم یافته به عنوان درونبری‌های تعمیم یافته حاصلضرب سازار با توپولوژی حاصلضربی از فضای دونقطه‌ای سرپینسکی مشخص می‌شوند. در پایان، فضاهای انژکتیو- چگال تعمیم یافته به عنوان اشیاء زیررسته خاصی از فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته که برای آن، همه زیر مجموعه‌های تک نقطه‌ای بسته هستند مطالعه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: پیوستگی تعمیم یافته، نشاننده تعمیم یافته، فضای انژکتیو- چگال تعمیم یافته، حاصلضرب سازار.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: arianpoor@tafreshu.ac.ir

۱- مقدمه

پیدایش مفهوم توپولوژی تعمیم یافته به تعریف نگاشت بستار در نظریه رسته‌ها روی مجموعه‌ها برمی‌گردد و از سال ۱۹۶۶ به بعد بسیاری از ویژگی‌های فضاهای بستاری و رده‌بندی آنها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. نگاشت بستار روی مجموعه X، نگاشت یکنوای $c:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ است که دارای ویژگی‌های خودتوانی و گسترشی می‌باشد. سازار با مطالعه نوع جدیدی از مفهوم مجموعه‌های باز درفضاهای توپولوژیک مانند مجموعه‌های نیم باز،α- باز و β- باز، توانست تعمیم مشترک آنها را برای زیر مجموعه دلخواه γ-باز از X معرفی کند که درآن $\gamma:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ نگاشت یکنواست. در سال ۲۰۰۲ او در مقاله [۵] به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته پرداخت بطوریکه برای نگاشت درون γ، مجموعه‌های γ- باز همه توپولوژی‌های تعمیم یافته روی یک مجموعه را نتیجه می‌دهد. سازار در مقاله [۴] با استفاده از مجموعه‌های γ-باز به مطالعه فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته پرداخت. در این مقاله ابتدا به معرفی خواص خودتوانی، گسترش و تحدید نگاشت‌های یکنوای دلخواه γ پرداخته شده است و مفهوم مجموعه‌های γ- باز و γ- بسته بیان می‌شود. سپس با تعمیمی از فضاهای بستاری در نظریه توپولوژی رسته‌ای به معرفی فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته **GT** و مفهوم پیوستگی تعمیم یافته می‌پردازیم. درادامه مفهوم نشاننده تعمیم یافته و فضای انژکتیو تعمیم یافته در رسته فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته **GenTop** را معرفی می‌کنیم. فضای انژکتیو تعمیم یافته یک فضای توپولوژیک تعمیم یافته است که با دارا بودن خاصیت گسترشی قوی بوسیله نگاشت‌های پیوسته تعمیم یافته با مقادیر در آن فضا معرفی می‌شود. برای این منظور با معرفی ساختارهای ضعیف و قوی در رسته **GenTop** و به کمک مفهوم نشاننده تعمیم یافته و درونبری تعمیم یافته، نتایجی برای زیرفضاها، فضاهای خارج قسمتی و حاصلضرب سازار فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته بیان می‌کنیم. بدین ترتیب رده‌بندی توپولوژیکی از طریق مفهوم انژکسیون تعمیم یافته با استفاده از ابزارهای نظریه رسته‌ها امکان پذیر می‌شود که در آن اشیاء انژکتیو تعمیم یافته در رسته **GenTop** نسبت به نشاننده‌های تعمیم یافته بعنوان درونبری‌های تعمیم یافته حاصلضرب سازار (با توپولوژی حاصلضربی) از فضای دونقطه‌ای سرپینسکی رده‌بندی می‌شوند. با اختصاص نتایج پایانی به زیررسته $\mathbf{GenTop}^*$ شامل فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته (X,μ) که درآن مجموعه‌های تک نقطه‌ای در X، μ - بسته هستند و با استفاده از تعریف درونبری تعمیم یافته مطلق و فضای انژکتیو- چگال تعمیم یافته، رابطه بین این فضاها و اشیاء زیررسته $\mathbf{GenTop}^*$ را مطالعه می‌کنیم.

۲- تعاریف و مقدمات

هرگاه X یک مجموعه ناتهی و $\mathcal{P}$ (X) مجموعه توانی آن باشد، نگاشت $\gamma:\mathcal{P}(X)\longrightarrow\mathcal{P}(X)$ را یکنوا[1] گوییم اگر $A\subseteq B\subseteq X$ نتیجه دهد که $\gamma A \subseteq \gamma B$. آن را دارای خاصیت خودتوانی[2] و گسترش[3] (یا تحدید[4]) نامیم اگر بترتیب داشته باشیم: $\gamma^2A=\gamma A$ و $A\subseteq\gamma A$ (یا $\gamma A\subseteq A$). برای مثال، اگر توپولوژی $\boldsymbol{\tau}$ روی X داده شده باشد، آنگاه بستار cl_τ و درون int_τ دو نگاشت یکنوای خودتوان بترتیب گسترشی و تحدیدی هستند. زیر مجموعه $A\subseteq X$ را γ-باز گوییم اگر و تنها اگر γ نگاشت گسترشی باشد. در این صورت $\emptyset$ یک مجموعه -γباز بوده و اگر $X=X$ ،γ X مجموعه γ-باز خواهد بود. با خاصیت خودتوانی γ هرمجموعه γA، γ-باز می‌باشد و بکمک خاصیت گسترشی آن، زیرمجموعه‌های X همگی γ-بازهستند. اگر γ نگاشت تحدیدی باشد، A یک مجموعه γ- باز است اگر و تنها اگر$A=\gamma A$. اجتماع همه زیرمجموعه‌های γ-باز مجموعه $A\subseteq X$ راγ- درون A می‌نامم و آن را با $i_\gamma A$ نمایش می‌دهیم. مجموعه $A\subseteq X$ را γ-بسته گوییم هرگاه $X\backslash A$، مجموعه γ-باز باشد. درنتیجه X همواره γ-بسته می‌باشد و $\emptyset$ مجموعه γ–بسته است اگر و تنها اگر $\gamma X=X$. چنانچه γ نگاشت گسترشی باشد،

1. monotonic
2. idempotent
3. enlargment
4. restriction

هر زیرمجموعه X، γ-بسته است. اشتراک همه مجموعه‌های γ-بسته شامل A را γ- بستار A می‌نامیم و آن را با $c_\gamma A$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب در فضاهای توپولوژیک، تعریف مجموعه‌های باز و نتایج آن با این مفهوم باز بودن یکسان است:

قضیه ۱-۲ ([۴])

۱) اجتماع دلخواه مجموعه‌های γ-باز، مجموعه γ-باز است.

۲) مجموعه $i_\gamma A$ بزرگترین زیرمجموعه γ- باز A است. بعلاوه، در یک فضای توپولوژیک داریم: $i_{int}=int$.

۳) مجموعه A، γ- باز است اگر و تنها اگر $A= i_\gamma A$.

۴) اشتراک دلخواه مجموعه‌های γ-بسته، مجموعه γ- بسته است.

۵) مجموعه $c_\gamma A$ کوچکترین مجموعه γ-بسته شامل A است.

۶) مجموعه A، γ-بسته است اگر و تنها اگر $A= c_\gamma A$.

تعریف ۲-۲

فرض کنید خانواده $\mu\subseteq \mathcal{P}(X)$ از زیرمجموعه‌های X داده شده باشد μ را یک توپولوژی تعمیم یافته[1] بر X گوییم اگر $\emptyset$ و هر اجتماع دلخواهی از اعضای μ عضوی در آن باشد.

زوج (X,μ) را یک فضای توپولوژیک تعمیم یافته می‌نامند و هر توپولوژی تعمیم یافته را به اختصار یک GT روی مجموعه X می‌خوانند. در توپولوژی تعمیم یافته شرط باز بودن X حذف شده است و در صورتیکه μ شامل X باشد آن را توپولوژی تعمیم یافته قوی می‌نامیم. اعضای μ را مجموعه‌های μ- باز و مکمل آنها را مجموعه‌های μ-بسته می‌نامند. زیر مجموعه β از μ را یک پایه فضای توپولوژیک تعمیم یافته (X,μ) گوییم اگر هر عضو $V\in\mu$ اجتماعی از اعضای یک زیر خانواده از β باشد. همچنین c_μ و i_μ نگاشتهای یکنوا خودتوان بترتیب گسترشی و تحدیدی هستند که بر مجموعه‌های $\emptyset$ و X همانی می‌باشند بطوریکه در احکام قضیه (۱-۲) صدق می‌کنند.

لم ۳-۲ ([۵])

هرگاه μ یک توپولوژی تعمیم یافته روی X باشد آنگاه نگاشت خودتوان تحدیدی γ با شرط $\gamma\emptyset=\emptyset$ موجود است بطوریکه μ خانواده همه مجموعه‌های γ- باز در X باشد.

تعریف ۴-۲

فرض کنید (X,μ) و (Y,ν) دو فضای توپولوژیک تعمیم یافته باشند، نگاشت $f:(X, \mu)\longrightarrow(Y, \nu)$ را (μ,ν)- پیوسته گوییم اگر برای هر $V\in\nu$ داشته باشیم: $f^{-1}(V)\in\mu$.

در حالتی‌که μ و ν توپولوژی معمولی باشند، (μ,ν)- پیوستگی همان مفهوم پیوستگی معمولی است.

نشاننده[2] به نشانیدن یک ساختار ریاضی درون ساختاری دیگر گفته می‌شود بطوریکه برای نشانیدن شئی X درون شئی Y از یک نگاشت یک به یک و حافظ ساختار (ریختار) $f:X\hookrightarrow Y$ استفاده می‌گردد. برای نشانیدن شئی X درون شئی Y چندین نشاننده مختلف امکان‌پذیراست. در توپولوژی، نگاشت یک به یک و پیوسته $f:X\longrightarrow Y$ بین فضاهای توپولوژیک X و Y را نشاننده گویند اگر f یک همسانی بین X و f(X) باشد که در آن f(X) دارای توپولوژی زیرفضایی از Y است. می‌توان دید که هر نگاشت یک به یک، پیوسته و باز (بسته) یک نشاننده است در حالی‌که نشاننده‌ها لزوماً نگاشت‌های باز یا بسته نیستند. وجود نشاننده $X\hookrightarrow Y$، یک ناوردای (پایای) توپولوژیک[3] برای فضای X می‌باشد بدین معنی که دو فضای توپولوژیک X و Y از یکدیگر متمایزند اگر بتوان اولی را در یک فضا نشانید در حالی‌که برای فضای دوم چنین نباشد. از دیدگاه نظریه رسته‌ها، همه یکریختی‌ها نشاننده هستند و همه نشاننده‌ها تکریختی[1] می‌باشند. البته تکریختی‌های نهایی[2] نشاننده هستند و نشاننده‌ها تحت برگردان[3] حفظ می‌شوند ([۱]).

1. generalized topology
2. embedding
3. topological invariant

مفهوم زیرشئی[۴] برای مطالعه خواص و دسته‌بندی ساختارهای موضعی جدید در رسته‌ها نقش کلیدی ایفا می‌کند. شئی A را زیرشئی B گوییم اگر تکریختی $f:A\longrightarrow B$ موجود باشد و شئی B را گسترش A می نامیم. رده همه زیرشئی‌های نشانیده شده در یک شئی داده شده با تقریب یکریختی یک مجموعه مرتب است و در این حالت، رسته اشیاء را نسبت به رده نشاننده‌ها خوش توان[۵] می‌خوانند ([۱]).

تعریف ۵-۲

در یک رسته صریح $\mathcal{C}$، نشاننده $f:A\longrightarrow B$ تابع انژکتیو[۶] از مجموعه زمینه شئی A به مجموعه زمینه شئی B، یک ریختار آغازین رسته $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود بطوریکه اگر g یک تابع از مجموعه زمینه شئی C به مجموعه زمینه شئی A بوده و ترکیب $f\circ g:C\longrightarrow B$ یک ریختار باشد آنگاه g نیز ریختار رسته $\mathcal{C}$ است.

به کمک زیررده $\mathcal{M}$ شامل تکریختی‌های رسته $\mathcal{C}$ می‌توان به مفهوم نشاننده دست یافت. در واقع زمانی‌که رسته $\mathcal{C}$ نسبت به $\mathcal{M}$ خوش توان باشد، ریختارهای درون $\mathcal{M}$ نشاننده خواهند بود ([۱]). در نظریه رسته‌ها، مفهوم $\mathcal{M}$- انژکتیو به‌عنوان دوگان[۷] نشاننده شناخته می‌شود بطوری که می‌توان همه خواص نشاننده را برای این مفهوم دوگان سازی کرد.

تعریف ۶-۲

شئی A از رسته $\mathcal{C}$ را $\mathcal{M}$- انژکتیو گویند هرگاه برای هر $\mathcal{M}$- ریختار (تکریختی نهایی) $g:B\longrightarrow C$، بتوان ریختار $f:B\longrightarrow A$ را به یک ریختار $\tilde{f}:C\longrightarrow A$ از رسته $\mathcal{C}$ بالا برد بطوریکه $\tilde{f}\circ g=f$.

فضای انژکتیو یک فضای توپولوژیکی است که با دارا بودن خاصیت گسترشی قوی برای تابع‌های پیوسته با مقادیر در آن معرفی می‌شود. رده‌بندی توپولوژیکی از طریق مفهوم انژکسیون با استفاده از دسته‌بندی جبری و ابزارهای نظریه رسته‌ها امکان‌پذیر است که در آن اشیاء انژکتیو در رسته فضاهای توپولوژیک نسبت به نشاننده‌ها بعنوان درونبری‌های[۸] حاصلضرب‌های دکارتی (با توپولوژی حاصلضربی) از فضای دونقطه‌ای سرپینسکی[۹] رده‌بندی می‌شوند ([۱۱]).

۳- نتایج

مفهوم نشاننده و انژکسیون تعمیم یافته در رسته فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته **GenTop** مطالعه می‌شوند جاییکه اشیاء، فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته (X, μ) بوده و $\{\emptyset\}\subset\mu\subset\mathcal{P}(X)$ تحت اجتماع دلخواه بسته است. برای ساختن رسته **GenTop** می‌توان بکمک مجموعه‌های باز تعمیم یافته، ریختارهای $f:(X,\mu)\longrightarrow(Y,\nu)$ را با شرط $f^{-1}(\nu)\subset\mu$ که همان (μ,ν)-پیوستگی است درنظر بگیریم.

تعریف ۱-۳.

هرگاه X و Y دو فضای **GT** باشند نگاشت یک به یک و(μ,ν)-پیوسته $f:(X,\mu)\longrightarrow(Y,\nu)$ را یک نشاننده تعمیم یافته گوییم اگر f یک (μ,ν)-همسانی از X بتوی تصویرش باشد.

تعریف ۲-۳

فضای توپولوژیک تعمیم یافته (D,λ) را انژکتیو تعمیم یافته گوییم اگر و تنها اگر برای هر دو فضای توپولوژیک تعمیم یافته X و Y و نشاننده تعمیم یافته $f: (X,\mu)\longrightarrow(Y,\nu)$، بتوان نگاشت (μ,λ)- پیوسته $h:(X,\mu)\longrightarrow(D,\lambda)$ را به یک نگاشت (ν,λ)- پیوسته $\hat{h}:(Y,\nu)\longrightarrow(D,\lambda)$ گسترش داد بطوریکه داشته باشیم: $\hat{h}\circ f=h$.

1. monomorphism
2. extremal
3. pullpack
4. subobject
5. well powered
6. injective
7. dual
8. retract
9. Sierpinski space

فضاهای تک نقطه‌ای از طریق تکریختی‌های پیوسته در رسته **GenTop**، اشیاء انژکتیو بدیهی هستند.

مثال ۳-۳

فضای دونقطه‌ای $S=\{a,b\}$ با توپولوژی $\lambda=\{\{a\},S\}$، یک فضای انژکتیو است که درآن نگاشت‌های (μ,λ)-پیوسته $h:(X,\mu)\longrightarrow(S,\lambda)$ دریک تناظر یک به یک با زیرمجموعه‌های μ- باز $h^{-1}(\{a\})$ قرار دارند و اگر X را بعنوان زیرفضای توپولوژیک (Y,ν) درنظر بگیریم آنگاه هر زیرمجموعه μ- باز X تحدیدی از زیرمجموعه ν- باز Y است و بنابراین نگاشت (μ,λ)-پیوسته h را می‌توان به نگاشت (ν,λ)-پیوسته $\tilde{h}:(Y,\nu)\longrightarrow(S,\lambda)$ گسترش داد.

برای خانواده اندیس دار $\{X_\alpha|\alpha\in J\}$ از اشیاء در یک رسته، حاصلضرب $\prod_\alpha X_\alpha$ شئی منحصر بفرد با تقریب یکریختی است که برای آن، ریختارهای تصویر $\pi_\alpha:\prod_{\alpha\in J} X_\alpha\longrightarrow X_\alpha$ دارای خاصیت جهانی[1] زیر هستند:

بازای هر خانواده از ریختارهای $\{f_\alpha:Y\longrightarrow X_\alpha|\alpha\in J\}$، ریختار یگانه $g:Y\longrightarrow\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ موجود است بطوریکه برای هر اندیس $\alpha\in J$ داشته باشیم: $f_\alpha=\pi_\alpha\circ g$. مجموعه زمینه شئی (X,μ) در رسته **GenTop** مجموعه X است بنابراین شئی حاصلضرب مجموعه اندیس دار از اشیاء در رسته **GenTop** دارای مجموعه زمینه‌ای است که حاصلضرب مجموعه‌های زمینه آن اشیاء می‌باشد. حاصل‌جمع $\sqcup_{\alpha\in J} X_\alpha$ با تقریب یکریختی شئی یگانه‌ای است که برای آن، ریختارهای انژکتیو $i_\alpha:X_\alpha\longrightarrow\sqcup_{\alpha\in J} X_\alpha$ دارای خاصیت جهانی زیر می باشند:

بازای هر خانواده از ریختارهای $\{f_\alpha:X_\alpha\longrightarrow Y|\alpha\in J\}$، ریختار منحصربفرد $g:\sqcup_{\alpha\in J} X_\alpha\longrightarrow Y$ موجود است بطوریکه برای هر اندیس $\alpha\in J$ داشته باشیم: $f_\alpha=g\circ i_\alpha$.

در رسته **GenTop**، شئی حاصلجمع خانواده اندیسدار از اشیاء دارای مجموعه زمینه‌ای است که اجتماع مجزا از مجموعه‌های زمینه آن اشیاء می‌باشد. در یک رسته، خانواده اندیس دار از ریختارهای با قلمرو مشترک $\{f_\alpha:X\longrightarrow Y_\alpha|\ \alpha\in J\}$ را چشمه[2] و خانواده اندیس‌دار از ریختارهای با برد مشترک $\{g_\alpha:X_\alpha\longrightarrow Y_\alpha|\alpha\in J\}$ را چاه[3] می‌خوانند. تابعگون[4] مجموعه زمینه U: **GenTop**$\longrightarrow$**Set** فضای توپولوژیک تعمیم یافته (X,μ) را به مجموعه X و نگاشت‌های (μ,ν)-پیوسته $f:(X,\mu)\longrightarrow(Y,\nu)$ را به تابع $f:X\longrightarrow Y$ می‌نگارد. تابعگون U را وفادار[5] (یک به یک) گوییم اگر هر دو شئی متمایز f و g در **GenTop** را به دو شئی متمایز Uf و Ug در **Set** بفرستد.

تعریف ۴-۳

فرض کنید مجموعه X و خانواده اندیس‌دار $\{\varphi_\alpha:X\longrightarrow U(Y_\alpha,\nu_\alpha)=Y_\alpha|\alpha\in J\}$ از ریختارها (چشمه) در رسته **Set** داده شده باشند آنگاه گوییم با روش یگانه یک ساختار ضعیف (بالابر آغازین[6]) روی X وجود دارد بطوری‌که برای φ_αها، چشمه $\{f_\alpha:(X,\mu)\longrightarrow(Y_\alpha,\nu_\alpha)|\alpha\in J\}$ دررسته **GenTop** با خاصیت جهانی زیر موجود باشد: اگر برای هر (Z,λ)، چشمه $\{g_\alpha:(Z,\lambda)\longrightarrow(Y_\alpha,\nu_\alpha)|\alpha\in J\}$ در رسته **GenTop** وجود داشته باشد بقسمی که برای ریختار $h:UZ\longrightarrow X$ داشته باشیم: $Ug_\alpha=\varphi_\alpha\circ h$ آنگاه ریختار $h':(Z,\lambda)\longrightarrow(X,\mu)$ موجود است بطوریکه $h=Uh'$ و برای $\alpha\in J$ داریم: $g_\alpha=f_\alpha\circ h'$.

در تعریف قبل با برگرداندن جهت نگاشت‌ها می‌توان مفهوم دوگان آنرا بیان کرد:

تعریف ۵-۳

فرض کنید مجموعه X و خانواده اندیس‌دار $\{\psi_\alpha:U(Y_\alpha,\nu_\alpha)=Y_\alpha\longrightarrow X|\alpha\in J\}$ از ریختارها(چاه) در رسته **Set** داده شده باشند آنگاه گوییم با روش یگانه

1. universal property
2. source
3. sink
4. functor
5. faithful
6. initial lift

یک ساختار قوی (بالابر نهایی[1]) (X,μ) روی X وجود دارد بطوریکه برای ψ_αها، چاه $\{f_\alpha:(Y_\alpha,\nu_\alpha)\longrightarrow(X,\mu)|\alpha\in J\}$ دررسته **GenTop** با خاصیت جهانی زیر موجود باشد: اگر برای هر (Z,λ)، چشمه $\{g_\alpha:(Y_\alpha,\nu_\alpha)\longrightarrow(Z,\lambda)|\alpha\in J\}$ در رسته **GenTop** وجود داشته باشد بقسمی که برای ریختار $h:X\longrightarrow UZ$ داشته باشیم: $Ug_\alpha=h\circ\psi_\alpha$ آنگاه ریختار $h^{\sim}:(X,\mu)\longrightarrow(Z,\lambda)$ موجود است بطوریکه $h=Uh^{\sim}$ و برای $\alpha\in J$ داریم: $g_\alpha=h^{\sim}\circ f_\alpha$.

وجود ساختارهای ضعیف هم ارز با وجود ساختارهای قوی است مشروط بر آنکه U تابعگون وفادار بوده و X مجموعه زمینه همه فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته باشد.

مثال ۶-۳

ساختار ضعیف چشمه تهی برای مجموعه X، فضای **GT** ناگسسته $(X,\{\emptyset\})$ می باشد و ساختار قوی چاه تهی برای مجموعه X، فضای **GT** گسسته است.

نتیجه ۷-۳ ([۹])

رسته **GenTop** همراه با تابعگون وفادار **U: GenTop⟶Set** یک رسته توپولوژیکی روی **Set** می‌باشد بقسمیکه ساختارهای ضعیف و (بطور مشابه) ساختارهای قوی همگی در آن موجود است بنابراین در رسته **GenTop**، حاصلضرب و حاصل جمع و روش یافتن آنها از طریق ساختارهای ضعیف و قوی بوسیله بالابرهای آغازین و نهایی از نمودارهای زمینه متناظر در رسته **Set** بدست می‌آیند.

قضیه ۸-۳ ([۹])

فرض کنید X یک مجموعه و خانواده اندیسدار $\{\varphi_\alpha:X\longrightarrow U(Y_\alpha,\nu_\alpha)=Y_\alpha|\alpha\in J\}$ یک چشمه در رسته **Set** باشد آنگاه: $(X,\mu)=(X,\{\cup_{\alpha\in J}\varphi^{-1}(M_\alpha)|M_\alpha\in\nu_\alpha\})$، ساختار ضعیف متناظر در رسته **GenTop** است.

قضیه ۹-۳ ([۹])

فرض کنید X یک مجموعه و خانواده اندیسدار $\{\psi_\alpha:U(Y_\alpha,\nu_\alpha)=Y_\alpha\longrightarrow X|\alpha\in J\}$ یک چاه در رسته **Set** باشد آنگاه:

$(X,\mu)=(X,\{M\subset X|\forall\alpha\in J,\psi_\alpha^{-1}(M)\in\nu_\alpha\})$،

ساختار قوی متناظر در رسته **GenTop** است.

به کمک مفهوم نشاننده تعمیم یافته به نتایجی درباره زیرفضاها، فضاهای خارج قسمتی و حاصلضرب سازار از فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته در رسته **GenTop** اشاره می‌کنیم:

تعریف ۱۰-۳

هرگاه چشمه در رسته **Set** شامل تنها یک نگاشت یک به یک $\varphi: X\longrightarrow U(Y,\nu)=Y$ باشد، آنگاه ساختار ضعیف روی X را زیرفضای (Y,ν) می نامیم که در این صورت φ بطور طبیعی نشاننده از مجموعه X است و اگر چاه در رسته **Set** شامل تنها یک نگاشت پوشای $\psi:U(Y,\nu)=Y\longrightarrow X$ باشد، آنگاه ساختار قوی روی X را خارج قسمت فضای توپولوژیک (Y,ν) می‌خوانیم.

برای فضای توپولوژیک تعمیم یافته (Y,ν) و زیرفضای $X\subset Y$ می‌نویسیم: $(Y,\nu)|X=(X,\nu|X)$ که درآن برای $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$ داریم: $\mathcal{A}|X=\{A\cap X|A\in\mathcal{A}\}$.

نتیجه ۱۱-۳

در رسته **GenTop** برای فضای توپولوژیک تعمیم یافته (Y,ν) و نشاننده تعمیم یافته $i:X\longrightarrow Y$، وجود ساختار زیرفضایی روی X بصورت $(Y,\nu)|X=(X,\nu|X)$ بیان می‌گردد و هرگاه نگاشت پوشای $q:Y\longrightarrow X$ در رسته **Set** داده شده باشد، ساختار فضای خارج قسمتی روی X بوسیله نگاشت q بصورت: $(X,\{M\subset X|q^{-1}(M)\in\nu\})$ بدست می‌آید.

تعریف ۱۲-۳

فرض کنید J یک مجموعه اندیس گذار و برای $\alpha\in J$ مجموعه‌های Y_α و حاصلضرب $X=\Pi_{\alpha\in J}\ Y_\alpha$ داده

1. final lift

شده باشند. اگر برای هر $\alpha\in J$ ، ν_α یک توپولوژی تعمیم یافته روی مجموعه Y_α باشد آنگاه خانواده $\beta=\{\prod_{\alpha\in J} N_\alpha | N_\alpha\in\nu_\alpha\}$ که درآن برای بجز تعداد متناهی اندیس α مجموعه های N_α بصورت $N_\alpha=\cup_{B\in\nu_\alpha} B$ داده شده اند، یک توپولوژی تعمیم یافته با پایه β روی X تعریف می‌کند. این فضای **GT** را حاصلضرب سازار فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته (Y_α,ν_α) می‌نامند.

حاصلضرب‌های سازار از فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته قوی، ظریف‌تر[1] از حاصلضرب‌های فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته با مجموعه‌های زمینه $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ می‌باشند. در حالت کلی، حاصلضرب رسته‌ای فضاهای **GT** یک توپولوژی نیست حتی اگر همه عامل‌ها، فضاهای توپولوژیک باشند در حالی‌که حاصلضرب سازار یک حاصلضرب توپولوژیک است و البته حاصلضرب‌های رسته‌ای فقط در حالت‌های خاص با حاصلضرب سازار یکی هستند.

مثال ۱۳-۳

برای مجموعه تک نقطه‌ای X_0 حاصلضرب تهی سازار، فضای توپولوژیک بدیهی $(X_0,\{\emptyset,X_0\})$ است در حالیکه حاصلضرب تهی، فضای توپولوژیک ناگسسته $(X_0,\{\emptyset\})$ می‌باشد. اگر مجموعه اندیس گذار J تک عضوی باشد آنگاه حاصلضرب سازار و حاصلضرب رسته‌ای با عامل یگانه، مساوی هستند و اگر یک Y_α تهی باشد، هر دو حاصلضرب سازار و حاصلضرب رسته‌ای با فضای توپولوژیک $(\emptyset,\{\emptyset\})$ یکسانند. در حالتی‌که مجموعه اندیس گذار J بیش از دو عضو داشته و برای هر $\alpha\in J$، Y_α ناتهی باشد آنگاه تساوی بین حاصلضرب سازار و حاصلضرب رسته ای با این مطلب معادل است که همه فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته (Y_α,ν_α) قوی بوده و حداکثر یک اندیس $\alpha\in J$ موجود باشد بطوریکه $\nu_\alpha\neq\{\emptyset, Y_\alpha\}$.

نتیجه ۱۴-۳ ([۹])

برای خانواده فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته $\{(Y_\alpha,\nu_\alpha)|\ \alpha\in J\}$ همراه با انژکسیون‌های طبیعی i_α، حاصل‌جمع در رسته **GenTop** بصورت فضای توپولوژیک تعمیم یافته $({}_{\alpha\in J} Y_\alpha,\mu)$ داده می‌شود که درآن $\mu=\{\cup_{\alpha\in J} i_\alpha N_\alpha | \forall \alpha\in J, N_\alpha\in\nu_\alpha\}$.

قضیه ۱۵-۳

حاصلضرب فضاهای انژکتیو تعمیم یافته تحت توپولوژی حاصلضربی سازار یک فضای انژکتیو تعمیم یافته است.

اثبات. فرض کنید $\{(Y_\alpha,\nu_\alpha)|\alpha\in J\}$ یک خانواده فضاهای انژکتیو تعمیم یافته و نگاشت (μ,λ)- پیوسته $f:X\longrightarrow\prod_{\alpha\in J}Y_\alpha$ داده شده باشد که درآن با تعریف (۱۲-۳)، λ توپولوژی تعمیم یافته تولید شده توسط پایه β روی حاصلضرب تعمیم یافته سازار $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ است. نگاشتهای تصویر π_α (λ,ν_α)-پیوسته حاصلضرب توپولوژیک تعمیم یافته $\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ را به فضاهای انژکتیو Y_α می‌نگارند بطوریکه برای هر $\alpha\in J$ ، ریختار های $\pi_\alpha\circ f: X\longrightarrow Y_\alpha$ نگاشت‌های (μ,ν_α)-پیوسته هستند. بااستفاده از تعریف (۲-۳) و نتیجه (۱۱-۳)، تحت نشاننده تعمیم یافته $i: X\longrightarrow X^\sim$ فضای توپولوژیک (X,μ) به یک فضای توپولوژیک تعمیم یافته $(X^\sim,\mu^\sim)$ گسترش می‌یابد که درآن داریم: $(X^\sim,\mu^\sim)|X=(X,\mu^\sim|X=\mu)$ و برای هر اندیس α نگاشت $(\mu^\sim,\nu_\alpha)$-پیوسته و یگانه $f^\sim_\alpha: X^\sim\longrightarrow Y_\alpha$ موجود است بقسمی که داشته باشیم: $f^\sim\circ i=\pi_\alpha\circ f$. از طرفی بنا به خاصیت جهانی حاصلضرب برای خانواده $\{f^\sim_\alpha:X^\sim\longrightarrow Y_\alpha|\alpha\in J\}$ از ریختارها، نگاشت (μ,λ)- پیوسته و یگانه $g: X^\sim\longrightarrow\prod_{\alpha\in J} Y_\alpha$ موجود است بطوریکه $f^\sim_\alpha=g\circ\pi_\alpha$. بنابراین حاصلضرب $\prod_{\alpha\in J}Y_\alpha$، یک فضای انژکتیو تعمیم یافته می‌باشد.

تعریف ۱۶-۳

فرض کنید (X,μ) زیرفضای توپولوژیک (Y,ν) تحت نشاننده تعمیم یافته $i:X\longrightarrow Y$ باشد، X را یک درونبری تعمیم یافته Y گوییم اگر نگاشت (ν,μ)- پیوسته $f:(Y,\nu)\longrightarrow(X,\mu)$ موجود باشد بطوریکه $f\circ i=id_X$ که درآن $\nu|X=\mu$.

قضیه ۱۷-۳

درونبری تعمیم یافته از فضای انژکتیو تعمیم یافته، یک فضای انژکتیو تعمیم یافته است.

اثبات. فرض کنید (D,λ) یک فضای انژکتیو تعمیم یافته باشد و بنا به تعریف (۱۶-۳)، زیرفضای توپولوژیک (X,μ) از D تحت نشاننده تعمیم یافته i و نگاشت (λ,μ)- پیوسته $j:D\longrightarrow X$ موجود باشد بطوریکه $j\circ i=id_X$ که درآن $\lambda|X=\mu$ اگر Y را زیرفضای X تحت نگاشت (ν,μ)- پیوسته $g:Y\longrightarrow X$ فرض کنیم دراین صورت بنا به خاصیت جهانی نشاننده تعمیم یافته، نگاشت $f:Y\longrightarrow D$ نیز (ν,λ)- پیوسته است. با استفاده از تعریف (۲-۳)، می توان f را به نگاشت منحصر بفرد $(\nu^{\sim},\lambda)$-پیوسته $f^{\sim}:Y^{\sim}\longrightarrow D$ چنان گسترش داد که نگاشت $(\nu^{\sim},\mu)$-پیوسته $j\circ f^{\sim}:Y^{\sim}\longrightarrow X$ باشد درنتیجه X فضای انژکتیو تعمیم یافته است.

نتیجه ۱۸-۳

فضای توپولوژیک X، انژکتیو تعمیم یافته است اگر و تنها اگر یک درونبری تعمیم یافته از فضای **GT** گسترش یافته $X^{\sim}$ تحت نشاننده $i: X\longrightarrow X^{\sim}$ باشد.

زیررسته **GenTop*** شامل فضاهای توپولوژیک تعمیم یافته (X,μ) در **GenTop** می‌باشد که درآن مجموعه‌های تک نقطه‌ای در X، μ-بسته هستند. قضیه زیر رابطه بین اشیاء **GenTop*** و فضاهای انژکتیو تعمیم یافته را نشان می‌دهد:

قضیه ۱۹-۳

هر فضای **GT** در رسته **GenTop*** را می‌توان درون یک فضای انژکتیو تعمیم یافته بفرم حاصلضرب روی فضای دونقطه‌ای سرپینسکی (با توپولوژی حاصلضربی سازار) نشانید.

اثبات. فرض کنید (X,μ) یک فضای **GT** در رسته **GenTop*** و $Y\subset\mathcal{P}(X)$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های μ- باز در X باشد. در اینصورت بنا به قضیه (۱۵-۳)، $D= S^Y$ فضای حاصلضرب روی S، یک فضای انژکتیو تعمیم یافته است که درآن $S=\{a,b\}$ فضای دونقطه‌ای سرپینسکی با توپولوژی تعمیم یافته $\nu=\{\{a\},S\}$ داده می شود. نگاشت $f:X\longrightarrow D$ را برای $x\in X$ و $U\in S$ با ضابطه: $f(x)(U)=a$، اگر $x\in U$ و درغیر اینصورت، آنرا با $f(x)(U)=b$ تعریف می کنیم. این نگاشت (μ,λ)- پیوسته است جاییکه λ توپولوژی حاصلضربی سازار می‌باشد و از طرفی، f نگاشت یک به یک است. اگر $U\subset X$ مجموعه μ- باز باشد داریم:

$$f(U)=\{f(x)|x\in U\}=\{f(x)|f(x)(U)=a\}=f(X)\cap\{g\in D|g(U)=\{a\}\}$$

درنتیجه $f(U)$ یک زیرمجموعه λ-باز در زیرفضای $f(X)\subset D$ می‌باشد و بنابراین f یک نشاننده تعمیم یافته X در فضای انژکتیو D است.

نتیجه ۲۰-۳

هر فضای انژکتیو تعمیم یافته دقیقاً یک درونبری تعمیم یافته از حاصلضرب روی فضای دونقطه‌ای سرپینسکی می‌باشد.

اثبات. بنا به قضیه (۱۷-۳)، هر درونبری تعمیم یافته، یک فضای انژکتیو تعمیم یافته است. اگر $D=S^Y$ یک فضای انژکتیو تعمیم یافته باشد آنگاه تحت همسانی تعمیم یافته، D یک زیرفضای حاصلضرب روی فضای سرپینسکی S است. در نتیجه، نگاشت همانی (λ, λ)- پیوسته از این زیرفضا بتوی خودش را می توان به تمام فضای S گسترش داد بگونه ای که درونبری تعمیم یافته حفظ شود و حکم ثابت می‌گردد.

تعریف ۲۱-۳

درونبری تعمیم یافته $f:X\longrightarrow Y$ را یک درونبری تعمیم یافته مطلق[1] می‌نامیم هرگاه f تنها نگاشت (μ,ν)- پیوسته‌ای باشد که برای فضای توپولوژیک تعمیم یافته D، بتوان نگاشت (μ,λ)-پیوسته $h:X\longrightarrow D$ را به نگاشت (ν,λ)-پیوسته $h^{\sim}: Y\longrightarrow D$ گسترش داد.

---

1. absolute

در تعریف درونبری تعمیم یافته، بجای زیرفضاهای دلخواه می‌توان زیرفضاهای چگال (بسته) را بکار برد که درآن بستار زیرفضا با فضای توپولوژیک تعمیم یافته یکسان است. در اینصورت فضاهای انژکتیو تعمیم یافته بنا به نتیجه (۱۸-۳)، درونبری‌های تعمیم یافته مطلق می‌باشند.

تعریف ۲۲-۳

فضای توپولوژیک تعمیم یافته D را زیر فضای انژکتیو-چگال[1] تعمیم یافته گوییم اگر D نسبت به همه زیرفضاهای چگال یک فضای **GT**، فضای انژکتیو تعمیم یافته باشد که درآن برای هر زیرفضای چگال (X,μ) در(Y,ν) تحت نشاننده تعمیم یافته $i:X\longrightarrow Y$ و هر نگاشت (μ,λ)- پیوسته $f:X\longrightarrow D$، یک نگاشت (ν,λ)- پیوسته گسترش یافته $g:Y\longrightarrow D$ موجود باشد بطوریکه $g\circ i=f$ و داریم: $\nu|X=\mu$.

نتیجه ۲۳-۳

هر فضای انژکتیو تعمیم یافته در رسته **GenTop***، یک فضای انژکتیو- چگال تعمیم یافته می‌باشد.

قضیه ۲۴-۳

هر فضای انژکتیو- چگال تعمیم یافته در رسته **GenTop***، یک فضای انژکتیو تعمیم یافته است.

اثبات. فرض کنید (X,μ) زیرفضای بسته (Y,ν) تحت نشاننده تعمیم یافته $i:X\longrightarrow Y$ و $f: X\longrightarrow D$ یک نگاشت (μ,λ)- پیوسته باشد. Σ را مجموعه همه زوج‌های $(Z_\alpha,f|_{Z_\alpha})$ از زیرفضاهای بسته در Y شامل X در نظر بگیرید بطوریکه نگاشت‌های (γ,λ)- پیوسته $f|_{Z_\alpha}:Z_\alpha\longrightarrow D$ به نگاشت f گسترش می‌یابند و داریم: $\mu|Z_\alpha=\gamma_\alpha$. زوج $(\Sigma,\leq)$ یک مجموعه جزئا مرتب با رابطه ترتیب جزیی $\leq$ است که بکمک نشاننده تعمیم یافته بصورت $(Z_\alpha,f|_{Z_\alpha})\leq(Z_\beta,f|_{Z_\beta})$ اگر و تنها اگر $Z_\alpha\subset Z_\beta$ و $f|_{Z_\beta}\circ i_{Z_\alpha}=f|_{Z_\alpha}$ تعریف می‌شود که در آن $i_{Z_\alpha}:Z_\alpha\longrightarrow Z_\beta$. خانواده $\{(Z_\alpha,f|_{Z_\alpha})\}_{\alpha\in J}$یک زنجیره (مجموعه تماماً مرتب) در Σ می‌باشد.

نگاشت $f|_Z:\ Z=\cup_{\alpha\in J}Z_\alpha\longrightarrow D$ باضابطه زیر $\forall\ z_\alpha\in Z_\alpha,\ f|_Z(z_\alpha)= f|_{Z_\alpha}(z_\alpha)$ یک نگاشت (γ,λ)- پیوسته است بطوریکه توپولوژی تعمیم یافته γ بوسیله پایه‌ای شامل اجتماع پایه‌های توپولوژی‌های تعمیم یافته γ_α تولید می‌شود. برای $U\in\lambda$ داریم:

$D\backslash f|_Z^{-1}(U)=D\backslash\cup f|_{Z_\alpha}^{-1}(U)=(D\backslash f|_{Z_\alpha}^{-1}(U))$

چون برای هر $\alpha\in J$، مجموعه$D\backslash f|_{Z_\alpha}^{-1}(U)$ در Z_α مجموعه‌ای γ- بسته بوده و هر Z_α در Y زیرفضایی ν-بسته می‌باشد. بنابراین، $D\backslash f|_{Z_\alpha}^{-1}(U)$ یک مجموعه ν-بسته در فضای توپولوژیک Y است. درنتیجه $D\backslash f|_Z^{-1}(U)$ در Y مجموعه ν-بسته می‌شود و در اینصورت، زیرمجموعه γ- بسته در Z می‌باشد و داریم: $f|_Z^{-1}(U)\in\gamma$. از اینرو $f|_Z:Z\longrightarrow D$ یک نگاشت (γ,λ)- پیوسته است و چون Dفضای انژکتیو- چگال تعمیم یافته بوده، نگاشت$f|_Z$ را می‌توان به یک نگاشت (ν,λ)-پیوسته $f|_{\tilde{Z}}:\tilde{Z}\longrightarrow D$ گسترش داد بطوریکه زوج $(\tilde{Z},f|_{\tilde{Z}})$ یک کران بالایی برای زنجیره $\{(Z_\alpha,f|_{Z_\alpha})\}_{\alpha\in J}$ می‌باشد. با استفاده از لم زرن، مجموعه مرتب Σ دارای یک عضو ماکسیمال $(M,f|_M)$ است که درآن نگاشت f به نگاشت (ν,λ)- پیوسته $f|_M:M\longrightarrow D$ گسترش می‌یابد بطوریکه M زیرفضای Y است. اگر$M\neq Y$ و عضو $y_0\in Y\backslash M$ موجود باشد آنگاه $N=M\cup\{y_0\}$ زیرفضای Y است. با درنظر گرفتن عضو $d_0\in D$، نگاشت (η,λ)- پیوسته $g:\{y_0\}\longrightarrow D$ را با ضابطه $g(y_0)=d_0$ تعریف می‌کنیم که درآن $\eta=\{\emptyset,\{y_0\}\}$ توپولوژی بدیهی است. با بهم چسبانیدن نگاشت‌های $f|_M$ و g، یک نگاشت (ν,λ)- پیوسته $h:N\longrightarrow D$ گسترش یافته از نگاشت $f|_M$ بدست می‌آید بطوریکه زوج (N,h) با شرط ماکسیمال بودن زوج $(M,f|_M)$ در تناقض می‌باشد. بنابراین، $Y=M$ و در نتیجه D فضای انژکتیو تعمیم یافته می‌باشد.

1. dense - injective space

فهرست منابع

[1] J. Adamek, H. Herrlich and G. E. Strecker, Abstract and concrete categories, John Wiley and sons,Inc., 1990.

[2] E. ـech, Topological spaces, Publishing House of Czechoslovak Acad. Sci., Wiley, London, 1966.

[3] Á . Császár, Foundations of General Topology, Pergamon Press, London, 1963.

[4] Á . Császár, Generalized open sets, Acta Math. Hungar., 75 (1997), 65-87.

[5] Á. Császár, Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar., 96 (2002), 351-357.

[6] Á. Császár, Generalized open sets in generalized topologies, Acta Math. Hungar., 106 (1-2) (2005), 53-66.

[7] Á. Császár, Monotonicity properties of operations on generalized topologies, Acta Math. Hungar., 108 (4) (2005), 351-354.

[8] Á . Császár, Product of generalized topologies}, Acta Math. Hungar., 123 (1-2) (2009), 127-132.

[9] E. Makai Jr., E. Peyghan and B. Samadi, Weak and strong structures and the T_3.5 property for generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 150 (1) (2016), 1-35.

[10] L. E. Saraiva, Generalized quotient topologies, Acta Math. Hungar., 132 (1-2) (2011), 168-173.

[11] D. S. Scott, Continuous lattice, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 274 (1972), 97-137.