دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال سوم، شماره دوازدهم، زمستان ۱۳۹۶
شماره شاپا: ۱۶۸۲-۰۱۶۹

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کوچکترین درجات نمایش‌های شبه‌جایگشتی یک‌به‌یک گروه‌های پوچ‌توان

مهدی غفارزاده *

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خوی، خوی، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۲/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۲/۱۶

چکیده

ماتریس شبه‌جایگشتی، ماتریسی نامنفرد روی میدان مختلط است که دارای اثر صحیح نامنفی باشد. برای گروه متناهی G، فرض کنید $p(G)$، کوچکترین درجه نمایش‌های جایگشتی یک‌به‌یک G را نشان دهد. هم‌چنین فرض کنید $q(G)$ و $c(G)$، به ترتیب کوچکترین درجات نمایش‌های یک‌به‌یک G به وسیله ماتریس‌های شبه‌جایگشتی روی میدان‌های $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{C}$ را نشان دهند. در این صورت $c(G) \leq q(G) \leq p(G)$. در این مقاله، ارتباط درجات فوق را در گروه‌های پوچتوان بررسی خواهیم کرد. در حقیقت، نشان می‌دهیم اگر G یک گروه پوچتوان متناهی باشد که دارای هیچ عامل مستقیم از مرتبه 6 نیست و $G = P_1 \times \cdots \times P_r$ تجزیه G به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی نابدیهی P_i باشد، آن‌گاه $c(G) = c(P_1) + \cdots + c(P_r)$. به عنوان یک نتیجه، نشان خواهیم داد که اگر G یک گروه پوچ‌توان از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه $c(G) = q(G) = p(G)$.

واژه‌های کلیدی: نمایش شبه‌جایگشتی، گروه پوچتوان، سرشت تحویل‌ناپذیر، اندیس شور، حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghaffarzadeh@iaukhoy.ac.ir

۱- بیان مسأله و مقدمات

تمام گروه‌های مورد بحث در این مقاله، متناهی هستند. فرض کنید G یک گروه خطی از درجه n باشد؛ یعنی یک گروه از خودریختی‌های یک فضای برداری مختلط $n-$بعدی یا به طور معادل یک گروه از ماتریس‌های نامنفرد $n \times n$ با درآیه‌های مختلط. وانگ در [۱۲]، یک گروه شبه‌جایگشتی از درجه n را به صورت یک گروه خطی تعریف کرد که هر عضو آن دارای اثر صحیح نامنفی است. علت چنین نام‌گذاری از این حقیقت ناشی می‌شود که اگر G یک گروه از جایگشت‌ها روی مجموعه‌ای مانند Ω از اندازه n باشد، آن‌گاه با عمل اعضای G روی فضای برداری مختلط با پایه Ω، یک گروه از ماتریس‌های نامنفرد با درآیه‌های ۰ و ۱ به دست می‌آوریم که یکریخت با G است. اثر ماتریس متناظر با یک عضو $x \in G$ برابر تعداد نقاطی از Ω است که توسط x ثابت نگه داشته می‌شوند. بنابراین، یک گروه جایگشتی از درجه n، دارای یک نمایش به صورت یک گروه شبه‌جایگشتی از درجه n است.

وانگ در [۱۲] و [۱۳] بررسی کرد که کدام خواص از گروه‌های جایگشتی به گروه‌های شبه‌جایگشتی تعمیم می‌یابند. بعداً هارتلی و همکاران [۴]، مطالعه شباهت‌های بین گروه‌های جایگشتی و شبه‌جایگشتی را با بررسی ارتباط کوچکترین درجه یک نمایش جایگشتی یک‌به‌یک و کوچکترین درجه یک نمایش شبه‌جایگشتی یک‌به‌یک ادامه دادند. این درجات در ادامه، معرفی خواهند شد.

ماتریس شبه‌جایگشتی، ماتریسی نامنفرد روی میدان مختلط است به طوری که اثر آن، یک عدد صحیح نامنفی باشد. بنابراین هر ماتریس جایگشتی روی $\mathbb{C}$، یک ماتریس شبه‌جایگشتی است. فرض کنید G یک گروه (متناهی) باشد. فرض کنید $p(G)$، کوچکترین درجه نمایش‌های جایگشتی یک‌به‌یک G را نشان دهد. بنا بر یک قضیه از کیلی، هر گروه با یک گروه از جایگشت‌ها یکریخت است. فرض کنید $q(G)$، کوچکترین درجه نمایش‌های یک‌به‌یک G به وسیله ماتریس‌های شبه‌جایگشتی روی میدان گویا $\mathbb{Q}$ را نشان دهد و $c(G)$، کوچکترین درجه نمایش‌های یک‌به‌یک G به وسیله ماتریس‌های شبه‌جایگشتی روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ باشد. با توجه به بحث بالا، واضح است که همواره،

$$c(G) \leq q(G) \leq p(G).$$

در مطالعات نظری و محاسباتی گروه‌های متناهی، معمولاً مفید است که یک نمایش جایگشتی روی مجموعه‌ای از اندازه تا حد امکان کوچک انتخاب کنیم. از این رو $p(G)$ به صورت گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. برای نمونه به [۵]، [۹] و [۱۴] مراجعه کنید. از آنجایی که $c(G)$ و $q(G)$، به عنوان تعمیم‌هایی از $p(G)$، کران‌های پایین مناسبی برای آن هستند و محاسبه آنها به طور مستقیم با استفاده از جدول سرشت گروه‌ها انجام می‌گیرد (قضیه ۲.۲ را ببینید)، لذا معقول به نظر می‌رسد که بدانیم تا چه اندازه، $c(G)$ و $q(G)$ به خوبی $p(G)$ عمل می‌کنند.

برای مثال، اگر $A = A_1 \times \dots A_r$ یک گروه آبلی باشد که در آن هر A_i، دوری از مرتبه توانی از یک عدد اول است، آن‌گاه طبق [۹، قضیه ۲] داریم:

$$p(A) = p(A_1) + \cdots + p(A_r) \qquad (۱)$$

نتیجه مشابه برای $c(A)$ و $q(A)$ در [۴] به‌دست آمده است که می گوید اگر A دارای هیچ عامل مستقیم از مرتبه 6 نباشد، آن‌گاه $c(A) = q(A) = p(A)$ و

$$c(A) = c(A_1) + \cdots + c(A_r). \qquad (۲)$$

در حقیقت، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که اگر A گروه دوری از مرتبه 6 باشد، آن‌گاه $p(A) = p(C_2) + p(C_3) = 5$ و $c(A) = q(A) = 4$، که در آن C_m گروه دوری از مرتبه m را نشان می‌دهد. مثال ۶.۲ را ببینید.

بعداً بهروش [۱]، نتیجه فوق را به کل گروه‌های آبلی تعمیم داد و نشان داد که اگر n بزرگترین عدد صحیح نامنفی باشد که A دارای جمعوند مستقیم یکریخت با C_6^n است، آن‌گاه

$$c(A) = q(A) = p(A) - n. \qquad (۳)$$

با توجه به اینکه هر گروه پوچ‌توان به صورت حاصل-ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود است، لذا طبیعی است بپرسیم که آیا می‌توان (۱)–(۳) را به کل گروه‌های پوچ‌توان تعمیم داد یا نه؟ در این راستا، جانسون [۹] و

رایت [۱۴] نشان داده‌اند که اگر H و K گروه‌های پوچ‌توان نابدیهی باشند، آن‌گاه

$$p(H \times K) = p(H) + p(K). \qquad (۴)$$

در [۳]، بهروش و غفارزاده نشان داده‌اند که اگر G یک p-گروه باشد که در آن p یک عدد اول است، آن‌گاه $q(G) = p(G)$ و اگر G دارای هیچ بخش یکریخت با یک گروه کواترینون تعمیم یافته نباشد؛ به ویژه، اگر p فرد باشد، آن‌گاه

$$c(G) = q(G) = p(G).$$

توجه کنیم که برای گروه کواترنیون $G = Q_8$ داریم:

$$c(G) = 4, \qquad q(G) = p(G) = 8.$$

(مثال ۵.۲ را ببینید). بنابراین، اگر H و K، دو p-گروه نابدیهی (به ازای یک p یکسان) باشند، آن‌گاه از (۴) نتیجه می‌شود که

$$q(H \times K) = q(H) + q(K).$$

بعداً در [۶]، نشان داده شده است که اگر H و K دو p-گروه نابدیهی (به ازای یک p یکسان) باشند، آن‌گاه

$$c(H \times K) = c(H) + c(K) \qquad (۵)$$

در این مقاله، نتایج اشاره شده در بالا را به رده گروه‌های پوچ‌توان تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۱.۱: فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان باشد که دارای هیچ عامل مستقیم C_6 نیست و فرض کنید

$$G = P_1 \times \ldots \times P_r$$

تجزیه G به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی نابدیهی باشد. در این صورت

$$c(G) = c(P_1) + \cdots + c(P_r).$$

وضعیت در مورد $q(G)$ به مراتب پیچیده‌تر است. به عنوان یک نمونه، گروه $G = Q_8 \times C_3$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که در مثال ۷.۲ نشان داده می‌شود، $q(G) = 8$، در حالی که $q(Q_8) = 8$ و $q(C_3) = 3$. لذا ممکن است یک گروه پوچ‌توان دارای هیچ عامل مستقیم C_6 نباشد، ولی

$$q(G) < q(P_1) + \cdots + q(P_r).$$

با این حال، همان‌طورکه در بالا اشاره شد، اگر G دارای هیچ بخش یکریخت با یک گروه کواترینون تعمیم یافته نباشد، آن‌گاه به ازای هر i، $1 \le i \le r$ داریم:

$$c(P_i) = q(P_i) = p(P_i).$$

از این رو، نتیجه زیر را از قضیه ۱.۱ به‌دست می‌آوریم.

نتیجه ۲.۱: فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان باشد که G دارای هیچ عامل مستقیم C_6 نیست و فرض کنید G دارای هیچ بخش یکریخت با یک گروه کواترینون تعمیم یافته نباشد؛ به ویژه اگر G از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه

$$c(G) = q(G) = p(G).$$

سازمان‌دهی این مقاله به صورت زیر است: ابتدا در بخش دوم، الگوریتم‌های محاسبه $p(G)$، $q(G)$ و $c(G)$ را برای گروه‌های متناهی ارائه خواهیم کرد. سپس در رده گروه‌های از مرتبه توانی از یک عدد اول، الگوریتم‌های ساده شده‌ای را بیان خواهیم کرد. لم‌های مقدماتی به منظور اثبات قضیه ۱.۱ ارائه خواهیم نمود. در نهایت، در بخش سوم، نتیجه اصلی این مقاله را اثبات خواهیم کرد.

مرجع اصلی درباره نظریه سرشت گروه‌های متناهی [۸] است. هم‌چنین، خواننده برای مطالعه بیشتر در زمینه نمایش‌های شبه‌جایگشتی یک‌به‌یک می‌تواند به [۱]–[۴]، [۶]، [۱۲] و [۱۳] مراجعه کند.

۲-کوچکترین درجات جایگشتی و شبه جایگشتی یک‌به‌یک گروه‌های متناهی

ابتدا الگوریتم های محاسبه $p(G)$، $q(G)$ و $c(G)$ را برای یک گروه متناهی G بیان می‌کنیم. لازم به ذکر است که اگر $H \le G$، آن‌گاه مغز H در G که با نماد H_G نشان می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_G = \bigcap_{g \in G} g^{-1} H g$$

و آن بزرگترین زیرگروه نرمال منحصر بفرد G است که مشمول در H می‌باشد.

قضیه ۱.۲: فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت

$$p(G) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} |G : H_i| \ : \ H_i \le G, \ \bigcap_{i=1}^{n} (H_i)_G = 1 \right\}.$$

اگر G یک p-گروه باشد که مرکز آن، $Z(G)$ دارای رتبه d است، آن‌گاه $d/2 \le n \le d$. به علاوه کران $n=d$ توسط یک نمایش جایگشتی از G به دست می‌آید.

اثبات. به [۹، بخش ۱ و قضیه ۳]، مراجعه کنید.

به منظور بیان الگوریتم‌های محاسبه $c(G)$ و $q(G)$، نمادگذاری‌های زیر را بیان می‌کنیم که در کل مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

فرض کنید G یک گروه باشد و فرض کنید $\mathcal{C}_i$، $0 \le i \le r$، رده‌های تزویجی گالوا روی $\mathbb{Q}$ برای سرشت‌های تحویل‌ناپذیر مختلط G باشند (صفحه ۱۸۲ مرجع [۸] را ببینید). به ازای هر i با $0 \le i \le r$، فرض کنید ψ_i یک نماینده از رده $\mathcal{C}_i$ باشد که در آن $\psi_0 = 1_G$. به ازای هر $1 \le i \le r$، فرض کنید

$$\Gamma(\psi_i) = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}\,(\psi_i)/\mathbb{Q}).$$

گروه گالوای متناظر با توسیع $\mathbb{Q}(\psi_i)/\mathbb{Q}$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\Psi_i = \sum_{\sigma\in\Gamma(\psi_i)} \psi_i^{\sigma}.$$

به عبارت دیگر، Ψ_i سرشتی از G است که از جمع مزدوج‌های گالوای ψ_i به‌دست آمده است. فرض کنید $K_i = \ker\psi_i$. به وضوح $K_i = \ker\Psi_i$. به ازای هر $I \subseteq \{0.1.\dots.r\}$، قرار می‌دهیم $K_I = \bigcap_{i\in I} K_i$. همچنین اندیس شور ψ_i روی میدان $\mathbb{Q}$ را با m_i نشان می‌دهیم. در نهایت این که، اگر χ یک سرشت غیراصلی از G باشد، از نماد $m(\chi)$ برای نشان دادن

$$m(\chi) = |\min\{\chi(g) : g \in G\}|$$

استفاده می‌کنیم. در حالی که برای $\chi = 1_G$ قرار می‌دهیم $m(\chi) = 0$.

قضیه ۲.۲: فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت

$$c(G) = \min\{\xi(1) + m(\xi) :\}, \quad \xi = \sum_{i\in I}\Psi_i,\ K_I = 1 \quad \text{for } I \subseteq \{1.\dots.r\}, \text{ and } K_J \neq 1 \text{ for } J \subset I$$

$$q(G) = \min\{\xi(1) + m(\xi) : \xi = \sum_{i\in I} m_i\Psi_i,\ K_I = 1 \text{ for } I \subseteq \{1.\dots.r\}, \text{ and } K_J \neq 1 \text{ for } J \subset I\}.$$

اثبات. به [۲، قضیه ۶.۳] و [۳، لم ۲.۲]، مراجعه کنید.

همانند $p(G)$، بلافاصله این سوال پیش می‌آید که در الگوریتم‌های بالا، چه تعداد از سرشت‌های Ψ_i برای محاسبه $c(G)$ و $q(G)$ لازم است و اینکه مقدار $m(\xi)$ چند است. در رده گروه‌های از مرتبه توانی از یک عدد اول، نتایج زیر را در این باره ذکر می‌کنیم.

لم ۳.۲: فرض کنید G یک p–گروه باشد که مرکز آن دارای رتبه d است. فرض کنید

$$c(G) = \xi(c) + m(\xi), \qquad \xi = \sum_{i\in I}\Psi_i$$

در شرایط قضیه ۲.۲ صدق کند. در این صورت

الف) $m(\xi) = \frac{1}{p-1}\sum_{i\in I}\Psi_i$.

ب) $|I| = d$.

مشابه (الف) و (ب) برای $q(G)$ نیز برقرار هستند.

اثبات. به [۶، قضیه ۳.۲]، مراجعه کنید.

قضیه ۴.۲: فرض کنید G یک p–گروه باشد. در این صورت $c(G) \le q(G) = p(G)$ و اگر G دارای هیچ بخش یکریخت با یک گروه کواترینون تعمیم یافته نباشد، آن‌گاه $c(G) = q(G) = p(G)$.

اثبات. [۳، قضیه ۲.۳] مراجعه کنید.

طریقه استفاده از الگوریتم‌های بالا را در چندین مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۵.۲: فرض کنید G گروه دو وجهی D_8 یا گروه کواترنیون Q_8 باشد. چون $Z(G)$ دوری است، لذا طبق قضیه ۱.۲،

$$p(G) = \min\{|G{:}H| : H \le G,\ H_G = 1\}.$$

گروه D_8 دارای زیرگروهی از مرتبه 2 با مغز بدیهی است، لذا $p(D_8) = 4$. در حالی که تمام زیرگروه‌های Q_8 نرمال هستند. از این رو، تنها زیرگروه Q_8 با مغز بدیهی، زیرگروه بدیهی است. پس $p(Q_8) = 8$. هم‌چنین از قضیه ۲.۲ و لم ۳.۲ می‌دانیم که

$$c(G) = \min\{2\Psi_i(1) :\ K_i = 1\},$$
$$q(G) = \min\{2m_i\Psi_i(1) : K_i = 1\}.$$

در هر حالت، تنها سرشت تحویل‌ناپذیر (مختلط) یک‌به‌یک G، یک سرشت از درجه 2 است، لذا

$$c(D_8) = q(D_8) = 4, \qquad c(Q_8) = 4.$$

چون اندیس شور سرشت فوق روی $\mathbb{Q}$ در گروه Q_8 برابر 2 است، لذا $q(Q_8) = 8$.

مثال ۶.۲: گروه $G = C_6 \cong C_2 \times C_3$ را در نظر بگیرید. G دقیقاً دارای دو سرشت خطی یک‌به‌یک λ_1 و λ_2 است. هم‌چنین λ_1 و λ_2 مزدوج گالوای هم هستند. واضح است که اگر x عضوی از مرتبه 2 در G باشد، آن‌گاه

$$\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = -1.$$

پس

$$c(G) = q(G) = (\lambda_1 + \lambda_2)(1) + m(\lambda_1 + \lambda_2) = 2 + 2 = 4.$$

هم‌چنین بنا بر رابطه (۱)،

$$p(G) = p(C_2) + p(C_3) = 5.$$

مثال ۷.۲: فرض کنید $G = Q_8 \times C_3$. فرض کنید φ تنها سرشت تحویل‌ناپذیر مختلط یک‌به‌یک Q_8 باشد و فرض کنید ψ_1 و ψ_2 سرشت‌های خطی غیراصلی C_3 باشند. توجه کنیم که ψ_1 و ψ_2 مزدوج گالوای هم هستند. قرار می‌دهیم:

$$\xi = \varphi \times 1 + 1 \times \psi_1 + 1 \times \psi_2.$$

در این صورت $m(\xi) = 3$. پس

$$c(G) \le \xi(1) + m(\xi) = 7.$$

از طرفی $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_3 \le G$، لذا

$$c(C_4 \times C_3) = 7 \le c(G).$$

این نتیجه می‌دهد که $c(G) = 7$. توجه کنیم که $1 \times \varphi$ دارای اندیس شور 2 است (فصل ۱۰ مرجع [۸] را ببینید)، لذا این برای محاسبه $q(G)$ مناسب نیست. ولی اگر تنها سرشت‌های تحویل‌ناپذیر یک‌به‌یک G، یعنی $\varphi \times \psi_1$ و $\varphi \times \psi_2$ که مزدوج گالوا هستند را در نظر بگیریم، آن‌گاه بنا بر [۸، تمرین ۹.۱۰]، اندیس شور هر دو سرشت فوق روی $\mathbb{Q}$ برابر 1 است. هم‌چنین کمترین مقدار سرشت $\eta = \varphi \times \psi_1 + \varphi \times \psi_2$ برابر -4 است که در یک عضو از مرتبه 2 رخ می‌دهد. پس

$$q(Q_8) = 8 \le q(Q_8 \times C_3) \le \eta(1) + m(\eta) = 4 + 4 = 8.$$

بنابراین $q(Q_8 \times C_3) = 8$. هم‌چنین

$$p(Q_8 \times C_3) = p(Q_8) + p(C_3) = 11.$$

این نشان می‌دهد که نامساوی‌های

$$c(G) < q(G), \qquad q(G) < p(G),$$

می‌توانند هم زمان در یک گروه رخ دهند.

اینک مقدمات اثبات قضیه ۱.۱ را فراهم می‌کنیم. ابتدا یک لم ساده ولی در عین حال مفید را بیان می‌کنیم.

لم ۸.۲: فرض کنید $G = H \times K$ که در آن $(|H|, |K|) = 1$. فرض کنید $\varphi \in \mathrm{Irr}(H)$ و $\psi \in \mathrm{Irr}(K)$. قرار می‌دهیم:

$$\Phi = \textstyle\sum_{\sigma \in \Gamma(\varphi)} \varphi^\sigma,$$
$$\Psi = \textstyle\sum_{\sigma \in \Gamma(\psi)} \psi^\sigma,$$
$$\chi = \varphi \times \psi \in \mathrm{Irr}(G),$$
$$\mathrm{X} = \textstyle\sum_{\sigma \in \Gamma(\chi)} \chi^\sigma.$$

در این صورت $X(1) = \Phi(1)\Psi(1)$.

اثبات. فرض کنید $m = |H|$ و $n = |K|$. فرض کنید ε_m و ε_n به ترتیب یک ریشه اولیه مختلط mام و nام واحد باشند. در این صورت $\mathbb{Q}(\varphi) \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_m)$ و $\mathbb{Q}(\psi) \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$. چون $(m, n) = 1$، لذا بنا بر [۷، قضیه ۱۲.۲۰]، $\mathbb{Q}(\varepsilon_m) \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_n) = \mathbb{Q}$. از این رو $\mathbb{Q}(\varphi) \cap \mathbb{Q}(\psi) = \mathbb{Q}$.

می‌دانیم $\mathbb{Q}(\varphi) \subseteq \mathbb{Q}(\chi)$ و $\mathbb{Q}(\psi) \subseteq \mathbb{Q}(\chi)$. چون $\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوا است، لذا بنا بر [۷، قضیه ۲۲.۱۸]، $\mathbb{Q}(\chi)/\mathbb{Q}(\psi)$ نیز گالوا خواهد بود و

$$|\mathbb{Q}(\chi) \colon \mathbb{Q}(\psi)| = |\mathbb{Q}(\varphi) \colon \mathbb{Q}|.$$

بنابراین

$$|\mathbb{Q}(\chi) \colon \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\chi) \colon \mathbb{Q}(\psi)||\mathbb{Q}(\psi) \colon \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\varphi) \colon \mathbb{Q}||\mathbb{Q}(\psi) \colon \mathbb{Q}|.$$

پس $|\Gamma(\chi)| = |\Gamma(\varphi)||\Gamma(\psi)|$. از این جا نتیجه می‌شود:

$$X(1) = \textstyle\sum_{\sigma \in \Gamma(\chi)} \chi^\sigma(1) = |\Gamma(\chi)|\chi(1) = (|\Gamma(\varphi)|\varphi(1))(|\Gamma(\psi)|\psi(1)) = \Phi(1)\Psi(1).$$

بنابراین اثبات کامل است.

فرض کنیم χ یک سرشت از گروه G باشد. مرکز χ، $Z(\chi)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(\chi)=\{g\in G:|\chi(g)|=\chi(1)\}.$$

به وضوح $Z(\chi)\trianglelefteq G$. هم‌چنین اگر $\mathfrak{X}$ یک نمایش از گروه G باشد که χ را القا می کند، آن‌گاه

$$Z(\chi)=\{g\in G:\ \mathfrak{X}(g)=\varepsilon I,\ \text{for some } \varepsilon\in\mathbb{C}\}.$$

توجه کنیم که اگر $g\in Z(\chi)$، عضوی از مرتبه n باشد، آن‌گاه ε یک ریشه مختلط nام واحد است. به علاوه طبق [۸، لم ۲۷.۲]، همواره داریم:

$$Z(\chi)/\ker\chi\le \mathrm{Z}(G/\ker\chi),$$

و اگر χ تحویل‌ناپذیر باشد، تساوی برقرار است.

لم ۹.۲: فرض کنید G یک گروه باشد و $\psi\in\mathrm{Irr}(G)$. فرض کنید مرتبه $z\in Z(\psi)$ به پیمانه $\ker\psi$ برابر عدد اول p باشد. قرار می‌دهیم $\Psi=\sum_{\sigma\in\Gamma(\psi)}\psi^{\sigma}$. در این صورت

$$\Psi(z)=-\frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

اثبات. بنا بر تعریف، یک ریشه اولیه pام واحد مانند ε وجود دارد به طوری که $\psi(z)=\varepsilon\psi(1)$. داریم $\mathbb{Q}(\varepsilon)\subseteq\mathbb{Q}(\psi)$. قرار می‌دهیم:

$$\Gamma=\Gamma(\psi),$$
$$\Gamma'=\Gamma(\mathbb{Q}(\psi)/\mathbb{Q}(\varepsilon)),$$
$$\Gamma''=\Gamma(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}).$$

چون همواره $\mathbb{Q}(\psi)/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوا با گروه گالوای آبلی است، لذا طبق [۱۰، قضیه ۲.۴.۶]، نگاشت تحدید

$$\phi:\Gamma\to\Gamma'',\quad \phi(\sigma)=\sigma|_{\mathbb{Q}(\varepsilon)}$$

یک یکریختی $\bar{\phi}:\frac{\Gamma}{\Gamma'}\cong\Gamma''$ را القا می کند:

$$\bar{\phi}(\bar{\sigma})=\sigma|_{\mathbb{Q}(\varepsilon)},\qquad \bar{\sigma}=\sigma\Gamma'.$$

پس

$$\Psi(z)=\sum_{\sigma\in\Gamma}\psi^{\sigma}(z)=\psi(1)\sum_{\sigma\in\Gamma}\varepsilon^{\sigma}=\psi(1)\sum_{\sigma\in\Gamma}\varepsilon^{\bar{\sigma}}=|\Gamma'|\psi(1)\sum_{\sigma\in\Gamma''}\varepsilon^{\sigma}.$$

توجه کنیم که $|\Gamma''|=p-1$ و

$$\sum_{\sigma\in\Gamma''}\varepsilon^{\sigma}=\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{p-1}=-1.$$

لذا

$$\Psi(z)=-|\Gamma'|\psi(1)=-\frac{|\Gamma|}{|\Gamma''|}\psi(1)=-\frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

لم ۱۰.۲: فرض کنید G یک p-گروه باشد و فرض کنید ψ یک سرشت تحویل‌ناپذیر غیراصلی G باشد. قرار دهید:

$$\Psi=\sum_{\sigma\in\Gamma(\psi)}\psi^{\sigma}.$$

در این صورت $m(\Psi)=\frac{1}{p-1}\Psi(1)$.

اثبات. یادآوری می‌کنیم که

$$m(\Psi)=|\min\{\Psi(g):g\in G\}|.$$

ابتدا نشان می‌دهیم $m(\Psi)\le\frac{1}{p-1}\Psi(1)$. برای این کار، کافی است $g\in G$ را دلخواه اختیار کنیم و نشان دهیم

$$\Psi(g)\ge-\frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

قرار می‌دهیم $K=\ker\psi$. اگر $g\in K$، نامساوی واضح است. لذا فرض کنید $o(gK)=n>1$. بنا بر [۸، لم ۱۵.۲]، $\psi(g)=\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i$، که در آن $s=\psi(1)$ و هر ε_i یک ریشه اولیه مختلط n_iام واحد با $n_i\mid n$ است. فرض کنید ε یک ریشه اولیه $|G|$ام واحد باشد. در این صورت

$$\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\psi)\subseteq\mathbb{Q}(\varepsilon),\quad \mathbb{Q}\subseteq\mathbb{Q}(\varepsilon_i)\subseteq\mathbb{Q}(\varepsilon).$$

قرار می‌دهیم:

$$\Gamma=\Gamma(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}),$$
$$\Gamma'=\Gamma(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}(\psi)),$$
$$\Gamma''=\Gamma(\psi),\quad \Gamma_i'=\Gamma(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q}(\varepsilon_i)),$$
$$\Gamma_i''=\Gamma(\mathbb{Q}(\varepsilon_i)/\mathbb{Q}).$$

در این صورت، طبق [۱۰، قضیه ۲.۴.۶]، نگاشت‌های تحدید $\phi_1:\Gamma\to\Gamma''$ و $\phi_2:\Gamma\to\Gamma_i''$، به ترتیب یکریختی‌های $\bar{\phi}_1:\Gamma/\Gamma'\cong\Gamma''$ و $\tilde{\phi}_2:\Gamma/\Gamma_i'\cong\Gamma_i''$ را القا می‌کنند که در آن

$$\bar{\phi}_1(\bar{\sigma})=\sigma|_{\mathbb{Q}(\psi)},\quad \tilde{\phi}_2(\tilde{\sigma})=\sigma|_{\mathbb{Q}(\varepsilon_i)}.$$

بنابراین

$$\Psi(g)=\sum_{\sigma\in\Gamma''}\Big(\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i\Big)^{\sigma}=\sum_{6\in\Gamma''}\Big(\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i\Big)^{\bar{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{\sigma\in\Gamma}\left(\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i\right)^{\sigma} = \frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{i=1}^{s}\sum_{\sigma\in\Gamma}\varepsilon_i^{\sigma}. \quad (۶)$$

فرض کنیم μ تابع موبیوس باشد: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mu(n)$ برابر جمع ریشه‌های اولیه مختلط nام واحد است. همواره $\mu(n) \in \{0,-1,1\}$. همچنین $\mu(n) = -1$ اگر و تنها اگر n مربع–آزاد و دارای تعداد فردی عامل اول باشد.

قرار می‌دهیم $d_i = \frac{|\Gamma|}{|\Gamma_i"|}$. برای یافتن یک کران پایین برای $\Psi(g)$ می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم که به ازای هر $1 \le i \le s$، $\mu(n_i) = -1$. لذا در ادامه (۶) داریم:

$$\Psi(g) = \frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{i=1}^{s} d_i\,\mu(n_i) \ge -\frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{i=1}^{s} d_i.$$

می‌دانیم $|\Gamma_i"| = \varphi(n_i)$ که در آن φ تابع اویلر است. پس

$$\Psi(g) \ge -\frac{1}{|\Gamma'|}\sum_{i=1}^{s}\frac{|\Gamma|}{\varphi(n_i)} = -|\Gamma"|\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{\varphi(n_i)}.$$

بنا بر فرضی که انجام داده‌ایم $\mu(n_i) = -1$، لذا $n_i > 1$. از طرفی $n_i | n$ و G یک p–گروه است، لذا $p | n_i$. پس

$$\varphi(p) = p - 1 \le \varphi(n_i).$$

از این رو

$$\Psi(g) \ge -|\Gamma"|\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{p-1} = -\frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

پس به ازای هر $g \in G$، $\Psi(g) \ge -\frac{1}{p-1}\Psi(1)$. در نتیجه همان‌طور که می‌خواستیم

$$m(\Psi) \le \frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

برای نامساوی عکس، توجه کنیم که $\psi \ne 1_G$، لذا G/K یک p–گروه نابدیهی است. از این رو

$$Z(\psi)/K = Z(G/K) \ne 1.$$

عضو $z \in Z(\psi)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که مرتبه آن به پیمانه K برابر p باشد. در این صورت طبق لم ۹.۲ داریم:

$$\Psi(z) = -\frac{1}{p-1}\Psi(1).$$

این نتیجه می‌دهد که $m(\Psi) \ge \frac{1}{p-1}\Psi(1)$. بنابراین اثبات کامل است.

لم ۱۱.۲: فرض کنید $G = P_1 \times \ldots \times P_r$، تجزیه گروه پوچ‌توان G به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی نابدیهی P_i باشد. به ازای هر i، $1 \le i \le r$، فرض کنید $\lambda_i \in \mathrm{Irr}(P_i)$ قرار می‌دهیم:

$$\psi = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_r \in \mathrm{Irr}(G),$$
$$\Psi = \sum_{\sigma\in\Gamma(\psi)}\psi^{\sigma},$$
$$I = \{i : 1 \le i \le r,\ \lambda_i \ne 1_{P_i}\}.$$

اگر $|G/\ker\psi| \ne 6$، آن‌گاه

$$2\Psi(1) \ge \sum_{i\in I} c(P_i/\ker\lambda_i).$$

اثبات. قرار می‌دهیم:

$$\Lambda_i = \sum_{\sigma\in\Gamma(\lambda_i)}\lambda_i^{\sigma},\ K_i = \ker\lambda_i,\ K = \ker\psi.$$

بنا بر لم ۸.۲، $2\Psi(1) = 2\prod_{i\in I}\Lambda_i(1)$. توجه کنیم که همواره

$$\prod_{i\in I}\Lambda_i(1) \ge \sum_{i\in I}\Lambda_i(1). \quad (۷)$$

مگر این که به ازای یک $j \in I$ داشته باشیم $\Lambda_j(1) = 1$. ولی بنا بر تعریف، $\Lambda_j(1) = 1$ اگر و تنها اگر $\mathbb{Q}(\lambda_j) = \mathbb{Q}$ و $\lambda_j(1) = 1$ این نتیجه می‌دهد که به ازای هر $x \in P_j$، $\lambda_j(x) \in \{-1,1\}$. چون هر سرشت خطی، یک همریختی به توی گروه ضربی $\mathbb{C}^{\times}$ است، لذا

$$\lambda_j(x^2) = \lambda_j(x)^2 = 1.$$

یعنی این که به ازای هر $x \in P_j$، $x^2 \in K_j$ بنابراین P_j/K_j یک 2-گروه آبلی مقدماتی است، ولی طبق [۸، لم ۲۷.۲]، P_j/K_j دارای مرکز دوری است. پس $|P_j/K_j| \le 2$. چون $\lambda_j \ne 1_{P_j}$، لذا $P_j/K_j \cong C_2$.

بنا بر فرض زیرگروه‌های P_j، $1 \le j \le r$، از مرتبه‌های نسبت به هم اول هستند. پس حداکثر به ازای یک $j \in I$ ممکن است داشته باشیم $\Lambda_j(1) = 1$. در این حالت

$$2\Psi(1) = 2\prod_{i\in I\setminus\{j\}}\Lambda_i(1) \geq 2\sum_{i\in I\setminus\{j\}}\Lambda_i(1). \quad (۸)$$

توجه داشته باشیم که Λ_i یک سرشت یک‌به‌یک با مقادیر صحیح برای گروه P_i/K_i است، لذا طبق لم ۱۰.۲ و قضیه ۲.۲ داریم:

$$\frac{p_i}{p_i-1}\Lambda_i(1) \geq c(P_i/K_i).$$

که در آن p_i عامل اول $|P_i|$ است. اگر به ازای یک $1 \leq i \leq r$، داشته باشیم $p_i \geq 5$، آن‌گاه

$$2\Lambda_i(1) = 2.\frac{p_i-1}{p_i-1}\Lambda_i(1) \geq \frac{p_i+2}{p_i-1}\Lambda_i(1) = \frac{p_i}{p_i-1}\Lambda_i(1)+\frac{2}{p_i-1}\Lambda_i(1) \geq \frac{p_i}{p_i-1}\Lambda_i(1)+2 \geq c(P_i/K_i)+2 = c(P_i/K_i)+c(P_j/K_j). \quad (۹)$$

بنابراین، اگر به ازای هر $1 \leq i \leq r$، $\Lambda_i(1) > 1$، یا به ازای یک $1 \leq i \leq r$، $p_i \geq 5$، آن‌گاه از روابط (۷) – (۹) نتیجه می‌شود که

$$2\Psi(1) \geq \sum_{i\in I} c(P_i/K_i).$$

پس در ادامه کافی است فرض کنیم G به فرم $P_1 \times P_2$ است که در آن P_1 یک 2-گروه و P_2 یک 3-گروه می‌باشد به طوری که $P_1/K_1 \cong C_2$ و $\Lambda_1(1) = 1$. چون

$$(|P_1|, |P_2|) = 1,$$

لذا

$$K = K_1 \times K_2 \implies G/K \cong P_1/K_1 \times P_2/K_2 \cong C_2 \times P_2/K_2.$$

بنا بر فرض $|G/K| \neq 6$، لذا $|P_2/K_2| \geq 3^a$ که در آن $a \geq 2$. حال از قضایای ۱.۲ و ۴.۲ نتیجه می‌شود که $c(P_2/K_2) \geq 6$. بنابراین

$$2\Psi(1) = 2\Lambda_1(1)\Lambda_2(1) = 2\Lambda_2(1) = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\Lambda_2(1)\right) \geq \frac{4}{3}c(P_2/K_2) \geq 2 + c(P_2/K_2) = \sum_{i\in I} c(P_i/K_i).$$

(لم ۱۰.۲ و قضیه ۲.۲ را ببینید. هم‌چنین توجه کنیم که اگر $u \geq 6$، آن‌گاه $\frac{4}{3}u \geq 2+u$). حال اثبات کامل است.

لم ۱۲.۲: فرض کنید $G = P_1 \times \ldots \times P_r$، تجزیه گروه پوچ‌توان G به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی G باشد که در آن P_1، 2-زیرگروه سیلوی G است و به ازای هر $2 \leq i \leq r$، $P_i \neq 1$. قرار می‌دهیم

$$\psi = \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_r,\ \lambda_i \in \mathrm{Irr}(P_i),\ \Psi = \sum_{\sigma\in\Gamma(\psi)} \psi^\sigma,$$
$$I = \{i : 2 \leq i \leq r,\ \lambda_i \neq 1_{P_i}\}.$$

در این صورت به ازای هر عامل اول p از مرتبه گروه $G/(P_1(\ker\psi))$ داریم:

$$\frac{p}{p-1}\Psi(1) \geq \sum_{i\in I} c(P_i/\ker\lambda_i).$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\Lambda_i = \sum_{\sigma\in\Gamma(\lambda_i)} \lambda_i^\sigma,\ K_i = \ker\lambda_i,\ K = \ker\psi.$$

چون به ازای هر $1 \leq i, j \leq r$، $(|P_i|, |P_i|) = 1$، لذا $K = K_1 \times \ldots \times K_r$. داریم

$$\Psi(1) = \prod_{i=1}^{r} \Lambda_i(1).$$

همانند اثبات لم ۱۱.۲، به ازای هر $i \in I$ داریم $\Lambda_i(1) > 1$؛ زیرا $2 \nmid |P_i|$. اگر $P_1 \neq 1$ و سرشت متناظر با آن، Λ_1، از درجه بزرگتر از یک باشد، آن‌گاه

$$\Psi(1) = \prod_{i=1}^{r} \Lambda_i(1) \geq 2\prod_{i\in I} \Lambda_i(1) \geq 2\sum_{i\in I} \Lambda_i(1) \geq \sum_{i\in I} c(P_i/K_i).$$

از این رو $\frac{p}{p-1}\Psi(1) > \Psi(1) \geq \sum_{i\in I} c(P_i/K_i)$ و حکم ثابت می‌شود.

در ادامه، فرض می‌کنیم $P_1 = 1$، یا $P_1 \neq 1$ و سرشت متناظر با آن Λ_1، از درجه ۱ باشد. اگر به ازای یک عدد اول p، $|G/P_1K| = p^r$، که در آن $r \geq 1$، آن‌گاه به ازای یک $2 \leq i \leq r$، $I \subseteq \{i\}$. می‌توانیم فرض کنیم $I = \{i\}$. لذا $\Psi(1) = \Lambda_i(1)$. در نتیجه

$$\frac{p}{p-1}\Psi(1) = \frac{p}{p-1}\Lambda_i(1) \geq c(P_i/K_i)$$

و حکم ثابت می‌شود. البته این در حالت $|I| = 1$ نیز برقرار است. لذا در ادامه، فرض می‌کنیم $|I| \geq 2$.

اگر به ازای یک عدد اول $p \neq 3$، $|G/P_1K| = 3p^r$، آن‌گاه $G/P_1K \cong P_2/K_2 \times P_3/K_3$ که در آن

$$P_2/K_2 \cong C_3, \qquad P_3 \in \mathrm{SyL}_p(G).$$

چون $p \neq 2$، لذا

$$\frac{3}{2}\Psi(1)=\frac{3}{2}\Lambda_2(1)\Lambda_3(1)=\frac{3}{2}.2.\Lambda_3(1)$$
$$=\Lambda_3(1)+2\Lambda_3(1)\geq 3+\frac{p}{p-1}\Lambda_3(1)$$
$$\geq c(P_2/K_2)+c(P_3/K_3).$$

به همین ترتیب

$$\frac{p}{p-1}\Psi(1)=\frac{p}{p-1}.2.\Lambda_3(1)\geq 3+$$
$$\frac{p}{p-1}\Lambda_3(1)\ \geq c(P_2/K_2)+c(P_3/K_3).$$

پس در ادامه، می‌توانیم فرض کنیم

$$|G/P_1K|\neq p^r,\ 3p^r.$$

در این صورت I را می‌توان به صورت اجتماع دو مجموعه مجزا از هم I_1 و I_2 نوشت که

$$\prod_{i\in I_1}\Lambda_i(1)\geq 4,\quad \prod_{i\in I_2}\Lambda_i(1)\geq 4.$$

توجه کنیم که اگر u و v دو عدد صحیح مثبت باشند که $u.v\geq 4$، آن‌گاه $uv\geq 2(u+v)$. بنابراین به ازای هر عامل اول p از $|G/P_1K|$ داریم:

$$\frac{p}{p-1}\Psi(1)>\Psi(1)\geq 2\left(\prod_{i\in I_1}\Lambda_i(1)+\right.$$
$$\left.\prod_{i\in I_2}\Lambda_i(1)\right)\geq 2\sum_{i\in I_1}\Lambda_i(1)+$$
$$2\sum_{i\in I_2}\Lambda_i(1)\geq\sum_{i\in I}c(P_i/K_i).$$

(توجه کنیم که Λ_i یک سرشت با مقادیر صحیح برای گروه P_i/K_i است، لذا طبق لم ۱۰.۲ و قضیه ۲.۲،

$$2\Lambda_i(1)\geq (c(P_i/K_i).)$$

حال اثبات کامل است.

۳- نتایج اصلی

با استفاده از لم‌های مقدماتی در بخش دوم و [۱، لم ۱۰.۲]، آماده‌ایم نتیجه اصلی این مقاله را اثبات کنیم.

اثبات قضیه ۱.۱. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم $P_1\in \mathrm{Syl}_2(G)$. بدیهی است که اگر $P_1=1$، آن‌گاه حکم به صورت $c(G)=c(P_2)+\cdots+c(P_r)$ خواهد بود.

بنا بر قضیه ۲.۲، سرشت‌های تحویل‌ناپذیر ψ_1، ...، ψ_s از گروه G وجود دارند به طوری که

$$c(G)=\xi(1)+m(\xi),$$
$$\xi=\sum_{i=1}^{s}\Psi_i,\quad \Psi_i=\sum_{\sigma\in\Gamma(\psi_i)}\psi_i^{\sigma},$$

و اگر به ازای هر $1\leq i\leq s$ قرار دهیم:

$$K_i=\ker\psi_i,\quad K_i^*=\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s}K_j$$

آن‌گاه $\bigcap_{i=1}^{s}K_i=1$ و $K_i^*\neq 1$.

ابتدا یک کران پائین برای $m(\xi)$ پیدا می‌کنیم. در بین زیرگروه‌های K_i، یک مجموعه از کوچکترین اندازه ممکن را تحت این شرط که دارای اشتراک بدیهی با P_1 هستند، انتخاب می‌کنیم و در صورت لزوم با شماره گذاری مجدد فرض می‌کنیم اینها متناظر با سرشت‌های ψ_1، ...، ψ_t هستند. در این صورت

$$\bigcap_{i=1}^{t}K_i\cap P_1=1, \tag{۱۰}$$

و اگر $X\subseteq\{1.\cdots.s\}$ که در آن $|X|<t$، آن‌گاه $\bigcap_{i\in X}K_i\cap P_1\neq 1$. حالت $t=0$ را به صورت $P_1=1$ تعبیر می‌کنیم.

چون G گروه پوچ‌توان است و به ازای هر $1\leq j\leq t$،

$$1\neq\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{t}(K_i\cap P_1)\trianglelefteq G,$$

لذا

$$\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{t}(K_i\cap P_1)\cap Z(G)=$$
$$\bigcap_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{t}(K_i\cap Z(P_1))\neq 1.$$

عضو x_j را در این اشتراک نابدیهی اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x=x_1\ldots x_t$. در این صورت x عضوی ار مرتبه 2 در $Z(G)\setminus\bigcup_{i=1}^{t}K_i$ خواهد بود. بنا بر لم ۹.۲ داریم:

$$\Psi_i(x)=-\Psi_i(1),\quad 1\leq i\leq t$$

حال در صورت لزوم با شماره گذاری مجدد، فرض می‌کنیم ψ_1، ...، ψ_u دقیقاً آنهایی هستند که $\Psi_i(x)=-\Psi_i(1)$. در این صورت به ازای هر $u+1\leq i\leq s$، $x\in K_i$.

چون به ازای هر i، $K_i^*\cap Z(G)\neq 1$، لذا می‌توان عضو $x_i\in K_i^*\cap Z(G)$ از مرتبه یک عدد اول p_i را اختیار کرد. قرار می‌دهیم $g=xx_{u+1}\ldots x_s$. در این صورت

$$g\in Z(G)\setminus\bigcup_{i=1}^{s}K_i\ .$$

بنا بر لم ۹.۲ داریم:

$$\Psi_i(g)=\Psi_i(x)=-\Psi_i(1),$$
$$1\leq i\leq u,$$
$$\Psi_i(g)=\Psi_i(x_i)=-\frac{1}{p_i-1}\Psi_i(1),\ u+$$
$$1\leq i\leq s.$$

بنابراین

$$c(G)=\xi(1)+m(\xi)\ge \xi(1)-\xi(g)\ge 2\sum_{i=1}^{u}\Psi_i(1)+\sum_{i=u+1}^{s}\frac{p_i}{p_i-1}\Psi_i(1). \qquad (۱۱)$$

زیرگروه‌های نرمال M_i از G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$M_i = \begin{cases} G_3K_i & 1\le i\le u, |G/K_i|=6\\ K_i & 1\le i\le u, |G/K_i|\ne 6 \\ P_1K & u+1\le i\le s,\end{cases}$$

که در آن G_3، 3-زیرگروه سیلوی G است. به سادگی دیده می‌شود که

$$M_i\cap P_j = \begin{cases} P_j & 1\le i\le u, |G/K_i|=6,\ 3\,|\,|P_j| \\ K_i\cap P_j & 1\le i\le u, |G/K_i|=6,\ 3\nmid |P_j| \\ K_i\cap P_j & 1\le i\le u, |G/K_i|\ne 6\\ P_1 & u+1\le i\le s,\ j=1\\ K_i\cap P_j & u+1\le i\le s,\ j\ne 1\end{cases}$$

(۱۲)

در مورد آخر، P_j از مرتبه فرد است، لذا زیرگروه‌های سیلوی M_i که از مرتبه فرد هستند همگی در K_i مشمول هستند.

نشان می‌دهیم $\bigcap_{i=1}^s M_i=1$. برای این کار، ابتدا توجه کنیم که اگر $1\le i\le u$ و $|G/K_i|=6$، آن‌گاه زیرگروه

$$\Omega_1(Z(G_3))=\{z\in Z(G_3): z^3=1\}$$

در K_i مشمول است؛ زیرا در غیر این صورت می‌توان عضو y را در $\Omega_1(Z(G_3))\backslash K_i$ انتخاب کرد. چون $x\notin K_i$، لذا $\langle xy\rangle\cap K_i=1$. پس با توجه به $|G/K_i|=6$ و $o(xy)=6$ داریم:

$$G\cong\langle xy\rangle\times K_i\cong C_6\times K_i$$

که یک تناقض با فرض است. فرض کنیم

$$I=\{1.\dots.s\},$$
$$J=I\backslash\{1\le i\le u: |G/K_i|=6\}.$$

چون $\bigcap_{i=1}^s K_i=1$، لذا

$$\bigcap_{i\in J}(K_i\cap Z(G_3))=1, \qquad (۱۳)$$

ولی $\bigcap_{i\in J}(K_i\cap G_3)\trianglelefteq G$ و G گروه پوچ‌توان است. پس $\bigcap_{i\in J}(K_i\cap G_3)=1$. این نتیجه می‌دهد که $\bigcap_{i=1}^s(M_i\cap G_3)=1$.

از طرفی طبق رابطه (۱۰) داریم $\bigcap_{i=1}^t(K_i\cap P_1)=1$. بنابراین $\bigcap_{i=1}^s(M_i\cap P_1)=1$. در نتیجه $\bigcap_{i=1}^s M_i=1$؛ زیرا در غیر این صورت، عضوی مانند x از مرتبه یک عدد اول p در $\bigcap_{i=1}^s M_i$ وجود دارد. با توجه به مطالب بالا، $p\ge 5$. ولی بنا بر تعریف زیرگروه‌های M_i، واضح است که هر M_i/K_i، 2-گروه یا ۳-گروه است. از این رو نمی‌توانند عضوی از مرتبه $p\ge 5$ داشته باشند. این نتیجه می‌دهد که

$$x\in\bigcap_{i=1}^s K_i=1,$$

ولی این یک تناقض است.

به ازای هر $1\le i\le s$، می‌دانیم

$$\psi_i=\lambda_{i1}\times\dots\times\lambda_{ir},\quad \lambda_{ij}\in \mathrm{Irr}(P_j)$$

چون به ازای هر $1\le i,j\le r$ با $i\ne j$ داریم $(|P_i|,|P_j|)=1$، لذا $\ker\lambda_{ij}=K_i\cap P_j$. قرار می‌دهیم

$$T=\{i:1\le i\le u,\ \lambda_{ij}\ne 1_{P_j}\},$$

و برای $2\le j\le r$ تعریف می‌کنیم:

$$T_j=\{i:1\le i\le u, |G/K_i|\ne 6,\ \lambda_{ij}\ne 1_{P_j}\}\cup\{i: u+1\le i\le s,\ \lambda_{ij}\ne 1_{P_j}\},$$

همچنین برای هر $1\le i\le s$ قرار می‌دهیم:

$$T_i'=\{j:1\le j\le r.\ \lambda_{ij}\ne 1_{P_j}\}.$$

اگر $1\le i\le u$ و $|G/K_i|\ne 6$، آن‌گاه بنا بر لم ۱۱.۲ داریم:

$$2\Psi_i(1)\ge\sum_{j\in T_i'}c(P_j/(P_j\cap K_i)) = \sum_{j\in T_i'}c(P_j/(P_j\cap M_i)). \qquad (۱۴)$$

(بنا بر رابطه (۱۲)، اگر $j\in T_i'$، آن‌گاه $P_j\cap K_i=P_j\cap M_i$.) اگر $1\le i\le u$ و $|G/K_i|=6$، آن‌گاه Ψ_i تنها سرشت شبه‌جایگشتی تحویل‌ناپذیر یک‌به‌یک گروه G/K_i روی $\mathbb{Q}$ است (مثال ۶.۲ را ببینید). پس $\Psi_i(1)=2$. چون $M_i=G_3K_i$، لذا $G/M_i\cong P_1/(P_1\cap M_i)\cong C_2$. پس

$$2\Psi_i(1)=4>c(P_1/(P_1\cap M_i)). \qquad (۱۵)$$

در نهایت، اگر $u+1\le i\le s$، آن‌گاه طبق لم ۱۲.۲ داریم:

$$\frac{p_i}{p_i-1}\Psi_i(1) \geq \sum_{j\in T_i';\, j\geq 2} c\big(P_j/(P_j\cap m_i)\big) = \sum_{j\in T_i';\, j\geq 2} c\left(P_j/\big(P_j\cap M_i\big)\right). \qquad (۱۶)$$

با قرار دادن روابط (۱۴) $-$(۱۶) در (۱۱) نتیجه می گیریم که

$$c(G) \geq \sum_{i\in T} c(P_1/(P_1\cap M_i)) + \sum_{j=2}^{r}\sum_{i\in T_j} c(P_j/(P_j\cap M_i)). \qquad (۱۷)$$

توجه کنیم که $\bigcap_{i=1}^{s} M_i = 1$، لذا

$$\cap_{i\in T}(M_i\cap P_1) = 1.$$

از این رو گروه P_1 را می‌توان در حاصل‌ضرب مستقیم

$$\mathrm{Dr}\prod_{i\in T} P_1/(P_1\cap M_i)$$

نشاند. بنابراین

$$c(P_1) \leq \sum_{i\in T} c(P_1/(P_1\cap M_i)). \qquad (۱۸)$$

همچنین به ازای هر $j\geq 2$، $\bigcap_{i\in T_j}(P_j\cap M_i) = 1$، لذا همانند بالا داریم:

$$c(P_j) \leq \sum_{i\in T_j} c\big(P_j/\big(P_j\cap M_i\big)\big). \qquad (۱۹)$$

از روابط (۱۷) $-$(۱۹) نتیجه می‌گیریم

$$c(G) \geq \sum_{j=1}^{r} c(P_j).$$

عکس تساوی فوق، به وضوح به ازای هر گروه دلخواه G با تجزیه مستقیم $G = P_1\times \ldots \times P_r$ برقرار است. از این رو

$$c(G) = \sum_{j=1}^{r} c(P_j)$$

و حکم ثابت می‌شود.

فهرست منابع

[1] Behravesh, H. (1997). The minimal degree of a faithful quasi–permutation representation of an abelian group. Glasgow Mathematical Journal, **39**, 51-57.

[2] Behravesh, H. (1997). Quasi–permutation representations of p-groups of class 2. Journal of London Mathematical Society, **55** (2), 251-260.

[3] Behravesh, H., & Ghaffarzadeh, G. (2011). Minimal degree of faithful quasi–permutation representations of p-groups. Algebra Colloquium, **18** (Spec1), 843-846.

[4] Burns, J. M., & Goldsmith, B., & Hartley, B., & Sandling, R. (1994). On quasi–permutation representations of finite groups. Glasgow Mathematical Journal, **36**, 301-308.

[5] Easdown, D., & Praeger, C. E. (1988). On minimal faithful permutation representations of finite groups. Bulletin of the Australian Mathematical Society, **38**(2), 207–220.

[6] Ghaffarzadeh, G., & Abbaspour, M. H. (2012). Minimal degrees of faithful quasi–permutation representations for direct product of p-groups. Proceedings–Mathematical Sciences, **122**(3), 329-334.

[7] Isaacs, I. M. (1994). Algebra: A Graduate Course. Brocks/Cole Publishing. Pacific Grove, CA.

[8] Isaacs, I. M. (2006). Character Theory of Finite Groups. AMS Chelsea Publishing. RI, Providence.

[9] Johnson, D. L. (1971). Minimal permutation representations of finite groups, American Journal of Mathematics, **93**(4). 857-866.

[10] Roman, S. (2006). Field Theory. Springer-Verlag, New York.

[11] Rose, J. S. (1978). A Course on Group Theory. Cambridge University Press.

[12] Wong, W. J. (1963). Linear groups analogous to permutation groups. Journal of the Australian Mathematical Society, **3**(2), 180-184.

[13] Wong, W. J. (1964). On linear p-groups, Journal of the Australian Mathematical Society, **4**(2), 174-178.

[14] Wright, D. (1975). Degrees of minimal embeddings for some direct Products. American Journal of Mathematics, **97**(4), 897-903.