دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی درمورد انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری در گراف‌ها

عبدالله آل‌هوز[۱*]، مریم باغی‌پور [۲]، ابراهیم هاشمی [۳]

[(۱)*] استادیار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود (نویسنده مسئول).
[۲)] دانشجوی دکترا، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.
[۳)] استاد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۰۹

چکیده

فرض کنیم G یک گراف ساده و همبند باشد. در این صورت برای راس دلخواه v از گراف G، عدد انتقال رأس v که با نماد $Tr_G(v)$ نمایش داده می‌شود، مجموع فاصله‌های راس v از بقیه رئوس گراف تعریف می‌شود. ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی گراف G به صورت $D^Q(G) = D(G) + Tr(G)$ تعریف می‌شود، جایی که $D(G)$ ماتریس فاصله گراف G و $Tr(G)$ ماتریس قطری متشکل از اعداد انتقال رئوس گراف G می‌باشد. در این مقاله، برای مینیمم مجموعه احاطه‌گری گراف G، ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری از گراف G، که آن را با نماد $MDD^Q(G)$ نمایش خواهیم داد، را تعریف کرده و برخی خواص مهم آن را بررسی می‌نماییم. همچنین انرژی ماتریس $MDD^Q(G)$ را به صورت مجموع مقادیر ویژه آن تعریف کرده و تعدادی کران بالا و پایین برای انرژی $ED_{D^Q}(G)$ و همچنین برای شعاع طیفی MDD^Q (بزرگترین مقدار ویژه ماتریس MDD^Q) ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: گراف، ماتریس فاصله، ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله، انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله، انرژی ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری.

[*] عهده‌دار مکاتبات
Email: a.alhevaz@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید G گراف با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یالی $E(G)$ باشد. یک گراف با $G=(V(G).E(G))$ نشان داده می‌شود. مرتبه‌ی G تعداد $n=|V(G)|$ از رئوسش و اندازه‌اش تعداد $m=|E(G)|$ از یال‌هایش می‌باشد. مجموعه رئوس مجاور به $v \in V(G)$ با $N_G(v)$ نشان داده می‌شود و درجه‌ی v برابر است با اندازه‌ی $N_G(v)$ و با $deg_G(v)$ نمایش داده می‌شود. گیریم Gیک گراف ساده، غیرجهت‌دار و همبند با مجموعه رئوس $V(G)$ باشد. فاصله‌ی بین دو رأس $u.v \in V(G)$ با نماد d_{uv} یا $d_c(u.v)$ نشان داده می‌شود که برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس u و v در G. ماکزیمم فاصله‌ی بین رئوس گراف G قطر گراف نامیده می‌شود. ماتریس فاصله از G با $D(G)$ نشان داده می‌شود که به صورت $D(G)=(d_{v_iv_j})_{v_i.v_j\in V(G)}$ تعریف می‌شود. برای گراف ساده‌ی همبند G از مرتبه‌ی n، ماتریس فاصله، ماتریسی متقارن و تحویل‌ناپذیر است. همچنین برای یک ماتریس مربعی M، مجموعه‌ی مقادیر ویژه همراه با چندگانگی آنها را طیف M می‌نامند. بزرگترین مقدار ویژه از M را شعاع طیفی M گویند. ماتریس فاصله و مفاهیم مرتبط با آن مانند طیف فاصله، شعاع طیفی و انرژی فاصله‌ای کاربردهای وسیعی در شیمی و علوم مختلف دیگر دارد.

امروزه بسیاری از پژوهشگران استفاده از شعاع طیفی ماتریس فاصله را برای توصیف ساختارهای مولکولی مورد استفاده قرار می‌دهند. از میان اولین نتایج به دست آمده، مرتبط با ماتریس فاصله، می‌توان به قضیه‌ی مهمی که در [8] ثابت شده است، اشاره کرد که فرمولی از دترمینان ماتریس فاصله برای درخت‌ها ارائه کردند. به دنبال آن و دیگر نتایج به دست آمده، محققانی از نظریه جبری گراف نیز به این موضوع علاقه‌مند شدند. [6,9]

عدد انتقال $Tr(v)$ از رأس v به صورت مجموع فاصله‌ی همه‌ی رئوس دیگر از رأس v یا به عبارتی دیگر $Tr_G(v)=\sum_{u\in V(G)} d_G(u.v)$ تعریف می‌شود. عدد انتقال یک گراف همبند G با $\sigma(G)$ نشان داده می‌شود که برابر است با مجموع فاصله‌های بین همه جفت‌های نامرتب از رئوس G. واضح است $\sigma(G)=\frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} Tr_G(v)$. گراف G منتظم از لحاظ عدد انتقال نامیده می‌شود، هرگاه $Tr_G(v)$ برای هر رأس $v\in V(G)$ ثابت باشد. برای $1\le i\le n$ به آسانی دیده می‌شود که $Tr_G(v_i)$ برابر است با مجموع سطر i ام از G. گیریم،

$$Tr(G)=diag(Tr_G(v_1).\dots.Tr_G(v_n))$$

ماتریس قطری از اعداد انتقال رئوس گراف G باشد. گیریم α عددی حقیقی باشد، ما به ترتیب نمادهای $\sigma_\alpha(G)$ و $\Gamma_\alpha(G)$ را برای $\sum_{\{u.v\}\subseteq V(G)} d(u.v)^\alpha$ و $\sum_{v\in V(G)} Tr(v)^\alpha$ استفاده می‌کنیم.

ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله از G ماتریسی $n\times n$ است که اولین بار توسط اچیچه و هنسن در [1,2] به صورت $D^Q(G)=D(G)+Tr(G)$ تعریف شد. واضح است $D^Q(G)$ ماتریسی تحویل‌ناپذیر، نامنفی، متقارن و نیمه معین مثبت است. بزرگترین مقدار ویژه از $D^Q(G)$ را شعاع طیفی می‌نامند و آن را با نماد $\rho(G)$ نمایش می‌دهند. گیریم $(\rho_1.\rho_2.\dots.\rho_n)$ نشان‌دهنده‌ی طیف $D^Q(G)$ باشد و فرض می‌کنیم $\rho_1\ge\rho_2\ge\cdots\ge\rho_n$. بنابر قضیه‌ی پرون - فروبنیوس، متناظر با $\rho(G)$ یک بردار ویژه نرمال مثبت یکتایی از $D^Q(G)$ وجود دارد که آن را بردار ویژه اصلی از G می‌نامند.

انرژی گراف G برای اولین بار در سال ۱۹۷۸ توسط ایوان گاتمن [7]، برای ماتریس مجاورت $A(G)$ با مقادیر ویژه $\lambda_1.\dots.\lambda_n$ به صورت $E(G)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|$ تعریف شد. به طور مشابه ما در [3] انرژی لاپلاسین بدون علامت فاصله را به صورت مجموع قدرمطلق مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله تعریف کردیم. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مقالات [14,15] مراجعه نمایید.

زیر مجموعه D از $V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گری ازگراف G نامیده می‌شود هرگاه هر عضو از مجموعه‌ی $V(G)\backslash D$ با تعدادی رئوس از مجموعه D مجاور باشد. هر مجموعه احاطه‌گری با کوچکترین اندازه را کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گری می‌نامند. اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گری از گراف G عدد احاطه‌گری نامیده می‌شود و با نماد $\eta(G)$ نشان داده می‌شود. در

[12,13]، ماتریس مینیمم احاطه‌گری و ماتریس فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری و همچنین انرژی‌های مرتبط با آنها تعریف شده و خواص آنها مورد بررسی قرار گرفته است. ما ماتریس لاپلاسین بدون علامت فاصله‌ی مینیمم احاطه‌گری از گراف G (به طور مختصر ماتریس MDD^Q) را به صورت $MDD^Q(G) := (p_{ij})$ تعریف می‌کنیم که:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 + Tr_i & if\ i = j\ and\ v_i \in D \\ Tr_i & if\ i = j\ and\ v_i \notin D \\ d(v_i.v_j) & otherwise. \end{cases}$$

از آنجا که ماتریس $MDD^Q(G)$، ماتریسی تحویل‌ناپذیر، نامنفی، متقارن و نیمه معین مثبت است، همه‌ی مقادیر ویژه آن نامنفی هستند. همچنین انرژی ماتریس $MDD^Q(G)$ را به صورت مجموع مقادیر ویژه آن تعریف می‌کنیم و با نماد $ED_{D^Q}(G)$ نشان می‌دهیم.

۲- قضایای اصلی

در این فصل، ابتدا برخی گزاره‌هایی را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت را بیان می‌کنیم و سپس نتایجی برای $ED_{D^Q}(G)$ ارائه می‌دهیم.

گزاره۱ [10]: فرض کنید b_i و a_i، $1 \le i \le n$، اعدادی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه همواره رابطه زیر برقرار است،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \le \frac{n^2}{4}(M_1M_2 - m_1m_2)^2$$

به طوری‌که $M_1 = max_{1\le i\le n} a_i$، $M_2 = max_{1\le i\le n} b_i$، $m_1 = min_{1\le i\le n} a_i$ و $m_2 = min_{1\le i\le n} b_i$.

گزاره ۲ [11]: فرض کنید b_i و a_i، $1 \le i \le n$، اعدادی حقیقی و نامنفی باشند، آن‌گاه همواره رابطه زیر برقرار است،

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{M_1M_2}{m_1m_2}} + \sqrt{\frac{m_1m_2}{M_1M_2}}\right)^2 (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$$

به طوری‌که $M_1 = max_{1\le i\le n} a_i$، $M_2 = max_{1\le i\le n} b_i$، $m_1 = min_{1\le i\le n} a_i$ و $m_2 = min_{1\le i\le n} b_i$.

گزاره۳ [5]: فرض کنید b_i و a_i، $1 \le i \le n$، اعدادی حقیقی و نامنفی باشند و اعداد حقیقی r و R وجود داشته باشند به طوری که برای هر $i = 1.2. \dots .n$ رابطه $r \le \frac{b_i}{a_i} \le R$ ($a_i \ne 0$) برقرار باشد، آن‌گاه همواره داریم،

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + rR\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le (r+R)\sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

علاوه بر این تساوی برقرار است اگر و فقط اگر برای حداقل یک i، $1 \le i \le n$، رابطه‌ی $b_i = a_i r$ یا $b_i = a_i R$ برقرار باشد.

قضیه۱. گیریم G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D باشد، آن‌گاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$ED_{D^Q}(G) = \eta(G) + 2\sigma(G).$$

برهان. فرض کنیم $\rho_1. \dots .\rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشد. با استفاده از رابطه‌ی $\sum_{i=1}^{n} \rho_i = Trace(MDD^Q(G))$ و این که مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ نامنفی هستند، رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود.

نتیجه۱: فرض کنیم G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$ED_{D^Q}(G) \ge n^2 - n + 1$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها $G \cong K_n$.

برهان. با توجه به اینکه همواره داریم، $\eta(G) \geq 1$ و $\sigma(G) \geq \frac{n^2-n}{2}$. همچنین تساوی در هر دو نامساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \cong K_n$، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

قضیه۲. گیریم G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D باشد. اگر $\rho_1. \dots . \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشند، در این صورت همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v).$$

برهان.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 &= \sum\nolimits_{j=1}^{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} q_{ij}q_{ji} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (q_{ii})^2 \\ &\quad + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} (q_{ij})^2 \\ &= \sum_{v\notin D} (Tr(v))^2 \\ &\quad + \sum_{v\in D} (1+Tr(v))^2 \\ &\quad + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} (q_{ij})^2 \\ &= \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) \\ &\quad + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v).\end{aligned}$$

نتیجه۲: فرض کنید G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D و قطر حداکثر ۲ باشد. اگر $\rho_1. \dots . \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشند و $M_1(G) = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)^2$، آن‌گاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 &= 4n^2(n-1) - 2m(4n-1) \\ &\quad + \eta(G)(4n-3) + M_1(G) \\ &\quad - 2\sum_{v\in D} \deg(v).\end{aligned}$$

برهان. گیریم $V(G) = \{v_1. v_2. \dots . v_n\}$ باشد. با توجه به این که قطر گراف حداکثر ۲ می‌باشد، رابطه‌ی $Tr(v) = 2n - \deg(v) - 2$ برقرار است. اکنون با استفاده از این حقیقت که $\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 = Trace(MDD^Q(G))^2$ داریم،

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \rho_i^2 &= \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v) \\ &= \sum_{v\in V(G)} (Tr(v))^2 + \eta(G) \\ &\quad + 2\sum_{v\in D} Tr(v) \\ &\quad + 2(2n(n-1) - 3m)\end{aligned}$$

اکنون با جایگذاری روابط زیر در تساوی فوق، حکم حاصل می‌شود،

$$\sum_{v\in V(G)} (Tr(v))^2 = 4n(n-1)^2 - 8m(n-1) + M_1(G)$$

$$\sum_{v\in D} Tr(v) = 2(n-1)\eta(G) - \sum_{v\in D} \deg(v).$$

اکنون، تعدادی کران برای $ED_{D^Q}(G)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه۳. فرض کنیم G گرافی همبند از مرتبه‌ی n باشد. اگر مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D،

و $\Delta = \det(MDD^Q(G))$

$$M = \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v)$$

باشد، آن‌گاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\sqrt{M + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}} \leq ED_{D^Q}(G) \leq \sqrt{nM}.$$

برهان. گیریم $\rho_1. \dots . \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشد. ابتدا نامساوی سمت راست را اثبات می‌کنیم. $a_i = 1$ و $b_i = \rho_i$ را در نامساوی کشی – شوارتز $(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$

جایگزین می‌کنیم. با استفاده از قضیه ۲، نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}{\rho_i}^2\right)$$

$$\left(ED_{D^Q}(G)\right)^2 \le n\left(\Gamma_2(G)+2\sigma_2(G)+\eta(G) + 2\sum_{v\in D}Tr(v)\right).$$

اکنون نامساوی سمت چپ را اثبات می‌کنیم. با استفاده از نامساوی $AM-GM$ (در این نامساوی، میانگین حسابی از یک مجموعه اعداد حقیقی نامنفی از میانگین هندسی از این مجموعه اعداد بزرگتر، مساوی است.) روی مجموعه‌ی $\{\rho_i\rho_j|1\le i\le n\}$ رابطه‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{1}{\binom{n}{2}}\sum_{1\le i<j\le n}\rho_i\rho_j \ge \left(\prod_{1\le i<j\le n}\rho_i\rho_j\right)^{\frac{1}{\binom{n}{2}}} = \left(\prod_{i=1}^{n}\rho_i\right)^{\frac{n-1}{\binom{n}{2}}} = \left(\prod_{i=1}^{n}\rho_i\right)^{\frac{2}{n}} = \Delta^{\frac{2}{n}}.$$

اکنون با توجه به رابطه‌ی زیر نتیجه حاصل می‌شود:

$$(ED_{D^Q}(G))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}{\rho_i}^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n}\rho_i\rho_j \ge \Gamma_2(G)+2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D}Tr(v) + n(n-1)\Delta^{\frac{2}{n}}.$$

قضیه۴. اگر ρ_1 بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشد، آن‌گاه همواره داریم،

$$\rho_1 \ge \frac{4\sigma(G)+\eta(G)}{n}.$$

برهان. گیریم $X=(\underbrace{1.1.\dots.1}_{n})^T$ برداری با درایه‌های یک باشد، آن‌گاه با استفاده از قضیه ریلی نامساوی زیر نتیجه می‌شود،

$$\rho_1 \ge \frac{X^T MDD^Q(G)X}{X^T X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}q_{ij}}{n} = \frac{1}{n}\left(2\sum_{1\le i<j\le n}d(v_i,v_j) + \sum_{i=1,v_i\notin D}^{n}Tr_{v_i} + \sum_{i=1,v_i\in D}^{n}\left(1+Tr_{v_i}\right)\right) = \frac{4\sigma(G)+\eta(G)}{n}.$$

اکنون با استفاده از گزاره‌های ۱و۲ و جایگزینی $a_i=1$ و $b_i=\rho_i$، دو کران پایین برای $ED_{D^Q}(G)$ نتیجه می‌گیریم.

قضیه۵. گیریم G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D باشد. اگر $\rho_1 \ge \rho_2 \ge \dots \ge \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشند و

$$M = \Gamma_2(G)+2\sigma_2(G)+\eta(G)+2\sum_{v\in D}Tr(v)$$

در این صورت همواره رابطه‌های زیر برقرار است،

$$(1)\; ED_{D^Q}(G) \ge \sqrt{nM - \frac{n^2}{4}(\rho_1-\rho_n)^2}$$

$$ED_{D^Q}(G) \ge \frac{2\sqrt{\rho_1\rho_n}}{\rho_1+\rho_n}\sqrt{nM}. \qquad (2)$$

گزاره ۴ [4]: فرض کنید a_i و b_i، $1\le i\le n$، اعدادی حقیقی و نامنفی باشند و اعداد حقیقی $A.b.a$ و B وجود داشته باشند به طوری که برای هر $i=1.2.\dots.n$ رابطه‌های $a\le a_i\le A$ و $b\le b_i\le B$ برقرار باشند، آن‌گاه همواره داریم،

$$\left|n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i - \sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}b_i\right| \le \beta(n)(A-a)(B-b)$$

به طوری‌که $\beta(n) = n\left[\frac{n}{2}\right](1-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right])$. (نماد $[x]$، نشان دهنده بخش صحیح عدد حقیقی x است.) همچنین تساوی در نامساوی فوق برقرار است اگر و تنها اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ و $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

اکنون با استفاده از گزاره‌ی ۴ و جایگزینی $a_i = b_i = \rho_i$ ، $a = b = \rho_n$ و $A = B = \rho_1$ کران پایین دیگری برای $ED_{D^Q}(G)$ نتیجه می‌گیریم.

قضیه۶. گیریم G گرافی ساده و همبند از مرتبه‌ی n با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D باشد. اگر $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشند و

$$M = \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v),$$

آن‌گاه همواره داریم:

$$ED_{D^Q}(G) \geq \sqrt{nM - \beta(n)(\rho_1 - \rho_n)^2}. \qquad (3)$$

برهان. با جای‌گذاری $a_i = 1$، $b_i = \rho_i$، $R = \rho_1$ و $r = \rho_n$ در گزاره‌ی ۳ نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه۳: با توجه به این که $\beta(n) = n\left[\frac{n}{2}\right](1-\frac{1}{n}\left[\frac{n}{2}\right]) \leq \frac{n^2}{4}$ ، آن‌گاه بنابر نامساوی (3)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$ED_{D^Q}(G) \geq \sqrt{nM - \beta(n)(\rho_1 - \rho_n)^2} \geq \sqrt{nM - \frac{n^2}{4}(\rho_1 - \rho_n)^2}.$$

از رابطه‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت که نامساوی (3) از نامساوی (1) قوی‌تر است.

قضیه۷. فرض کنیم G گرافی ساده و همبند از با مینیمم مجموعه‌ی احاطه‌گری D باشد. اگر $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$ مقادیر ویژه ماتریس $MDD^Q(G)$ باشند و

$M = \Gamma_2(G) + 2\sigma_2(G) + \eta(G) + 2\sum_{v\in D} Tr(v)$,

آن‌گاه همواره رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$ED_{D^Q}(G) \geq \frac{n\rho_1\rho_n + M}{\rho_1 + \rho_n}.$$

فهرست منابع

[1] Aouchiche M, and Hansen P, (2014). Distance spectra of graphs: a survey, Linear Algebra Appl.

[2] Aouchiche M, and Hansen P,(2013). Two Laplacians for the distance matrix of a graph, Linear Algebra Appl.

[3] Alhevaz A, Baghipur M, and Paul S, (2017). On spectrum of the graphs obtained by generalization of the join and lexicographic product graph operations.

[4] Biernacki M. Pidek H, and Ryll-Nardzewski C, (1950). Sur une in egalite entre des integrales definies, (French) Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska.

[5] Diaz J.B, and Metcalf F.T, (1963). Stronger forms of a class of inequalities of G, Polya–G. Szego, and L.V, Kantorovich, Bull, Amer, Math.

[6] Edelberg M, Garey M.R, and Graham R.L,(1976). On the distance matrix of a tree, Discrete Math.

[7] Gutman I,(2001). The energy of a graph: Old and new results, in: A. Betten, A. Kohnert, R. Laue, A. Wassermann (Eds), Algebraic Combinatorics and Applications, SpringerVerlag, Berlin.

[8] Graham R.L, and Pollack H.O, (1971). On the addressing problem for loops witching, Bell System Tech. J.

[9] Graham R.L,and Lovász L, (1978). Distance matrix polynomials of trees, Adv. Math.

[10] Ozeki N, (1968). On the estimation of inequalities by maximum and minimum values, J. College Arts Sci, Chiba Univ.

[11] Polya G, and Szego G, (1972). Problems and Theorems in Analysis, Series, Integral Calculus, Theory of Functions (Classics in Mathematics), Springer, Berlin.

[12] Rajesh Kanna M.R, Dharmendra B.N, and Sridhara G, (2013). The minimum dominating energy of a graph, Int. J. Pure Appl. Math.

[13] Rajesh KannaM.R, Dharmendra B.N, and Sridhara G, (2014). Minimum dominating distance energy of a graph, J. Indones. Math.

[14] Xing R, Zhou B, and Li J, (2014). On the distance signless Laplacian spectral radius of graphs, Linear Multilinear Algebra **.**

[15] Xing R, and Zhou B, (2013). On the distance and distance signless Laplacian spectral radii of bicyclic graphs, Linear Algebra Appl.