دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره سیزدهم، بهار ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

JNRM
پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی در مورد مدول‌های k- بی‌تاب

مریم سلیمی

استادیار، گروه ریاضی، واحد تهران شرق، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۵/۲۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۲/۲۲

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی و نوتری باشد. در [7]، مدول‌های $k-$ بی‌تاب به‌عنوان تعمیمی از مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی تعریف شده‌اند. بدین معنا که مدول‌های بی‌تاب، مدول ۱- بی‌تاب و مدول‌های انعکاسی، مدول ۲- بی‌تاب باشند. در این مقاله، برخی از ویژگی‌های مدول‌های بی‌تاب، انعکاسی و در حالت کلی $k-$ بی‌تاب را مورد بررسی قرار می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که برای $R-$ مدول M با فرض $G-\dim_R(M)<\infty$، M مدول $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Spec}(R)$، به طوری‌که $\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}})\leq k-1$، M_{p} مدول $k-$ بی‌تاب باشد، و برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Spec}(R)$ به طوری‌که $\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}})\geq k$ داشته باشیم $\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})\geq k$. بعلاوه، با استفاده از فرمول آسلندر - بریدجر، ثابت می‌کنیم M مدول $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Spec}(R)$، به طوری‌که $\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}})\leq k-1$، M_{p} مدول $k-$ بی‌تاب باشد، و برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Spec}(R)$ به طوری‌که $\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}})\geq k$ داشته باشیم $\text{G-dim}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})\leq\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}})-k$. همچنین ثابت می‌کنیم که روی حلقه‌های گورنشتاین و موضعی با بعد k، کلاس مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی و کلاس مدول‌های $k-$ بی‌تاب معادلند. در پایان شرایط لازم و کافی برای این که حاصل‌ضرب تانسوری مدول‌های $k-$ بی‌تاب مدول $k-$ بی‌تاب شود را به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مدول $k-$ بی‌تاب، مدول انعکاسی، مدول ماکزیمال کوهن – مکالی.

* عهده‌دار مکاتبات
Email: maryamsalimi@ipm.ir

۱ - مقدمه

در سراسر این مقاله، R حلقه‌ای جابه‌جایی، یکدار و نوتری است و تمام $R-$ مدول‌ها، متناهی مولد در نظر گرفته می‌شوند. برای $R-$ مدول M، همریختی طبیعی $\delta_M : M \to Hom_R\left(Hom_R\left(M,R\right),R\right)$ به صورت $\delta_M\left(m\right)\left(\psi\right)=\psi\left(m\right)$، برای هر $m \in M$ و هر $\psi \in Hom\left(M,R\right)$ تعریف می‌شود. $R-$ مدول M، بی‌تاب (انعکاسی) نامیده می‌شود هرگاه δ_M یک به یک (یکریختی) باشد. در [2]، بلشاف ویژگی‌هایی از مدول‌های انعکاسی را روی حلقه‌های گورنشتاین با بعد کم بررسی کرد. او ثابت کرد که اگر R حلقه‌ای موضعی و گورنشتاین با بعد حداکثر ۲ و M یک $R-$ مدول انعکاسی باشد آن‌گاه $G-\dim_R M = 0$. این مقاله، شامل نتایجی در مورد مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی با بعد گورنشتاین متناهی است که نتایج بلشاف [۲، گزاره [1.1] و [2]، گزاره [1.7] را تعمیم می‌دهد.

در [7]، مشک مدول‌های $k-$ بی‌تاب را برای $k \geq 0$ معرفی کرد. در واقع او توسیعی از مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی را ارائه کرد، بدین معنا که مدول‌های بی‌تاب، مدول ۱- بی‌تاب و مدول‌های انعکاسی، مدول ۲- بی‌تاب باشند. در ادامه مقاله، به بررسی ویژگی‌های مدول‌های $k-$ بی‌تاب می‌پردازیم. ثابت می‌کنیم که کلاس مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی و کلاس مدول‌های $k-$ بی‌تاب روی حلقه‌های موضعی و گورنشتاین با بعد k معادلند.

۲- پیش‌نیازها

در این بخش، مفاهیم و اصطلاحات مورد نیاز در بخش‌های بعد را بیان می‌کنیم.

در [1]، آسلندر و بردیجر بعد گورنشتاین را برای یک مدول متناهی مولد معرفی کردند، تا بدین وسیله توصیفی از حلقه‌های گورنشتاین ارائه دهند. شبیه بعد پروژکتیو، این بعد به وسیله یک تحلیل از مدول‌ها با ویژگی‌های همولوژیکی مناسب به نام مدول‌های انعکاسی کامل تعریف می‌شود. برای معرفی این مدول‌ها، نیاز به معرفی همریختی طبیعی دوگان داریم.

تعریف ۲-۱: فرض کنید N یک $R-$ مدول باشد. همریختی طبیعی دوگان
$$\delta_N : N \to Hom_R\left(Hom_R\left(N,R\right),R\right)$$
یک $R-$ همریختی است که به‌صورت $\delta_N\left(n\right)\left(\psi\right)=\psi\left(n\right)$، تعریف می‌شود. به‌عبارت دیگر، برای هر $n \in N$ همریختی $\delta_N : Hom_R\left(N,R\right) \to R$ به صورت $\psi \to \psi\left(n\right)$ معرفی می‌شود.

ملاحظه ۲-۲. فرض کنید N یک $R-$ مدول باشد. $R-$ مدول $Hom_R\left(N,R\right)$ دوگان N نامیده می‌شود و $R-$ مدول $Hom_R\left(Hom_R\left(N,R\right),R\right)$ دوگان مضاعف مدول N نامیده می‌شود. نماد N^* را برای مدول $Hom_R\left(N,R\right)$ به‌کار می‌بریم.

تعریف ۲-۳: مدول M، مدول بی‌تاب نامیده می‌شود هرگاه همریختی طبیعی دوگان $\delta_M : M \to M^{**}$ یک به یک باشد. همچنین مدول M، مدول انعکاسی نامیده می‌شود هرگاه همریختی طبیعی دوگان $\delta_M : M \to M^{**}$ یکریختی باشد. در واقع، مدول M بی‌تاب است هرگاه $K_M = 0$ و انعکاسی است هرگاه $K_M = C_M = 0$ که در آن $K_M = \mathrm{Ker}\left(\delta_M\right)$ و $C_M = \mathrm{Coker}\left(\delta_M\right)$ است.

همان‌طور که از نام مدول انعکاسی کامل مشخص است، یک مدول انعکاسی کامل یک مدول انعکاسی با ویژگی‌های بیشتری است. این ویژگی‌ها مربوط به صفر شدن Ext مدول‌هایی است که از همریختی طبیعی دوگان به دست می‌آیند.

تعریف ۲-۴: $R-$ مدول G انعکاسی کامل نامیده می‌شود هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $R-$ مدول G متناهی مولد باشد.

(۲) G انعکاسی باشد.

(۳) برای هر $i \geq 1$، داشته باشیم $\operatorname{Ext}_R^i(G,R)=0=\operatorname{Ext}_R^i(G^*,R)$.

مثال ۲-۵. هر $R-$ مدول پروژکتیو و متناهی مولد، یک مدول انعکاسی کامل است.

تعریف ۲-۶: یک $G-$ تحلیل افزوده برای M رشته‌ای دقیق به‌صورت زیر است:

$$G^+ = \dots \xrightarrow{\partial_{i+1}^G} G_i \xrightarrow{\partial_i^G} G_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}^G} \dots \xrightarrow{\partial_i^G} G_0 \xrightarrow{\tau} M \to 0$$

که در آن G_i یک مدول انعکاسی کامل است. یک $G-$ تحلیل برای M که به G^+ وابسته است رشته‌ای است که از حذف کردن M از G^+ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$G = \dots \xrightarrow{\partial_{i+1}^G} G_i \xrightarrow{\partial_i^G} G_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}^G} \dots \xrightarrow{\partial_i^G} G_0 \to 0$$

از آنجایی که هر $R-$ مدول متناهی مولد یک تحلیل از $R-$ مدول‌های متناهی مولد و پروژکتیو دارد و هر $R-$ مدول پروژکتیو و متناهی مولد یک مدول انعکاسی کامل است، بنابراین هر $R-$ مدول متناهی مولد یک $G-$ تحلیل دارد.

تعریف ۲-۷: اگر M دارای یک $G-$ تحلیل مانند G باشد به طوری‌که برای هر $i \ ? \ 0$، داشته باشیم $G_i = 0$، آن‌گاه می‌گوییم بعد گورنشتاین M متناهی است. به ویژه، بعد گورنشتاین M، کوتاه‌ترین طول چنین تحلیل‌هایی است:

$$G-\dim_R(M) = \inf\{\sup\{n \geq 0 \mid G_n \neq 0\} \mid$$

G } یک $G-$ تحلیل برای M است

بعد گورنشتاین یک $R-$ مدول متناهی مولد ارتباط نزدیکی با عمق آن مدول دارد. این مطلب به فرمول آسلندر – بریدجر معروف است:

قضیه ۲-۸. [۱، قضیه ۱۳-۴] فرض کنید (R,m,k) یک حلقه موضعی باشد. اگر برای $R-$ مدول M داشته باشیم $G-\dim_R(M)<\infty$ آن‌گاه

$$G-\dim_R(M)+\operatorname{depth}_R(M)=\operatorname{depth}R$$

به ویژه، اگر $M \neq 0$، آن‌گاه $\operatorname{depth}_R(M) \leq \operatorname{depth}R$.

قضیه ۲-۹. [۷، نتیجه ۲۱] برای $R-$ مدول M داریم $G\text{-}\dim_R(M) \leq \operatorname{pd}_R(M)$ و تساوی برقرار است هرگاه $\operatorname{pd}_R(M)$ متناهی باشد.

۳- مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی روی حلقه‌های منظم و گورنشتاین

در بخش قبل دیدیم که هر مدول آزاد و متناهی مولد، انعکاسی است. در سال ۱۹۵۸، سر ثابت کرد که هر مدول انعکاسی، آزاد است، هرگاه R یک حلقه موضعی منظم با بعد حداکثر ۲ باشد. بعدها، ساموئل این نتیجه را به صورت زیر توسیع داد:

فرض کنید R حلقه‌ای موضعی منظم از بعد حداکثر ۳ باشد. در این‌صورت $R-$ مدول M، انعکاسی است اگر و تنها اگر $\operatorname{pd}_R M \leq 1$ و برای هر ایده‌ال اول غیرماکزیمال p، $R_{\mathrm{p}}-$ مدول M_{p} آزاد باشد.

اخیراً، بلشاف سؤال مشابهی را برای این‌گونه مدول‌ها روی حلقه‌های گورنشتاین با بعد کم در نظر گرفت. طبق قضیه ۲-۹، برای $R-$ مدول M، نامساوی $G\text{-}\dim_R(M) \leq \operatorname{pd}_R(M)$ برقرار است. این مطلب، سؤالی طبیعی را در مورد نتایج سر و ساموئل ایجاد می‌کند. در [۲]، بلشاف نتایج زیر را ثابت کرد:

۱) اگر R حلقه‌ای موضعی و گورنشتاین با بعد حداکثر ۲ و M یک $R-$ مدول انعکاسی باشد، آن‌گاه $G\text{-}\dim_R(M)=0$.

۲) اگر R حلقه‌ای موضعی و گورنشتاین با بعد ۳ باشد. آن‌گاه $R-$ مدول M، انعکاسی است اگر و تنها

$\text{G-dim}_R(M) \leq 1$ و برای هر ایده‌آل اول غیر ماکزیمال $\mathfrak{p}$، $\text{G-dim}_R(M_{\mathfrak{p}}) = 0$.

این بخش شامل مطالبی در مورد مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی با بعد گورنشتاین متناهی است. در واقع، در این بخش نتایج بلشاف [۲]، سر [۹]، و ساموئل [۸] را تعمیم می‌دهیم. ابتدا، گزاره زیر را می‌آوریم که در اثبات قضیه اصلی مکرراً از آن استفاده می‌کنیم.

گزاره ۳-۱: [۳، گزاره۱-۴-۱] موارد زیر برقرارند:

(۱) M مدول بی‌تاب است اگر و تنها اگر

(i) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R)$، $M_{\mathfrak{p}}$ مدول بی‌تاب باشد،

(ii) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$ داشته باشیم $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$.

(۲) M مدول انعکاسی است اگر و تنها اگر

(i) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$، $M_{\mathfrak{p}}$ مدول انعکاسی باشد، و

(ii) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 2$ داشته باشیم $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 2$.

قضیه زیر حالت خاصی از گزاره ۳. ۱ است و تعمیمی از [۲، گزاره ۱-۱] و [۲، گزاره ۷-۱] است.

قضیه ۳-۲. اگر $\text{G-dim}_R(M)$ متناهی باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) M مدول بی‌تاب است اگر و تنها اگر

(i) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(R)$، $M_{\mathfrak{p}}$ مدول بی‌تاب باشد،

(ii) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$ داشته باشیم

$$\text{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - 1.$$

(۲) M مدول انعکاسی است اگر و تنها اگر

(i) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \leq 1$، $M_{\mathfrak{p}}$ مدول انعکاسی باشد، و

(ii) برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ به طوری که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 2$ داشته باشیم

$$\text{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - 2.$$

برهان. (۱) فرض کنید M مدول بی‌تاب باشد. طبق گزاره ۳-۱، کافیست ثابت کنیم که برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$، داریم $\text{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - 1$. توجه کنید طبق گزاره ۳-۱، برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$، داریم $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$.

حال با استفاده از فرمول آسلندر - بریدجر، داریم:

$$\text{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - \text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - 1$$

برعکس، طبق گزاره ۳-۱، کافیست نشان دهیم برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$، داریم $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$. طبق فرض و با استفاده از فرمول آسلندر - بریدجر، داریم:

$$\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - \text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \text{G-dim}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \leq \text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) - 1$$

بنابراین برای هر $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$، به طوری‌که $\text{depth}(R_{\mathfrak{p}}) \geq 1$، داریم $\text{depth}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \geq 1$.

(۲) مشابه (۱) ثابت می‌شود.

نتایج زیر به طور مستقیم از قضیه ۳-۲ نتیجه می‌شوند و می‌توان آنها را در [۲]، [۸] و [۷] مشاهده کرد.

نتیجه ۳-۳: فرض کنید (R,m) حلقه‌ای منظم (گورنشتاین) باشد به طوری که $\dim(R) \le 2$. اگر M یک $R-$ مدول انعکاسی باشد آن‌گاه $(\text{G-dim}_R(M)=0)\,\text{pd}_R(M)=0$.

برهان. طبق [۳، قضیه ۷-۲-۲] (قضیه ۲-۸) بعد پروژکتیو M (بعد گورنشتاین M) متناهی است، زیرا R حلقه‌ای منظم (گورنشتاین) است. طبق فرض برای هر $\mathrm{p}\in \text{Spec}(R)$، داریم $\text{depth}(R_{\mathrm{p}})\le 2$. اگر $\text{depth}(R_{\mathrm{p}})=2$ آن‌گاه طبق قضیه ۳-۲ (۲)، داریم $(\text{G-dim}_R(M_{\mathrm{p}})=0)\,\text{pd}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})=0$. در غیر این صورت طبق قضیه ۳-۲ (۲)، M_{p} مدول انعکاسی است و طبق [۳، تمرین ۱۹-۴-۱] داریم:

$$\begin{aligned}\text{depth}R_{\mathrm{p}}(M_{\mathrm{p}}) &= \\ &\text{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(\text{Hom}_{\mathrm{p}}(M_{\mathrm{p}},R_{\mathrm{p}})\right)\\ &\ge \min\left\{2,\text{depth}(R_{\mathrm{p}})\right\}\end{aligned}$$

بنابراین

$(\text{G-dim}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})=0)\,\text{pd}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})=0$.

نتیجه ۳-۴: فرض کنید (R,m) حلقه‌ای منظم (گورنشتاین) با بعد ۳ باشد. $R-$ مدول M، انعکاسی است اگر و تنها اگر $(\text{G-dim}_R(M)\le 1)\,\text{pd}_R(M)\le 1$ و برای هر ایده‌ال اول غیرماکزیمال p داشته باشیم $(\text{G-dim}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})=0)\,\text{pd}_{R_{\mathrm{p}}}(M_{\mathrm{p}})=0$.

برهان. مشابه نتیجه ۳,۳ اثبات می‌شود.

۴- مدول‌های $k-$ بی‌تاب

در [۷]، مشک مدول‌های $k-$ بی‌تاب را برای $k\ge 0$ معرفی کرد. در واقع، او توسیعی از مدول‌های بی‌تاب و انعکاسی ارائه کرد، بدین معنا که مدول‌های بی‌تاب، مدول ۱- بی‌تاب و مدول‌های انعکاسی، مدول ۲- بی‌تاب باشند.

اولین نتیجه این بخش، تعمیمی از گزاره ۳-۱ برای مدول‌های $k-$ بی‌تاب است. به عنوان کاربرد، نشان می‌دهیم که کلاس مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی و کلاس مدول‌های $k-$ بی‌تاب روی حلقه‌های موضعی و گورنشتاین با بعد k معادلند. در پایان، شرایط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب تانسوری مدول‌های $k-$ بی‌تاب مدول $k-$ بی‌تاب شود را به دست می‌آوریم.

تعریف ۴-۱: فرض کنید M یک $R-$ مدول و $(\pi): P_1 \xrightarrow{u} P_0 \xrightarrow{f} M \to 0$ یک تحلیل پروژکتیو برای M باشد. دوگان آسلندر برای M را با نماد $D(M)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D(M)=\text{Coker}\left(u^*:P_0^*\to P_1^*\right)$$

به‌عبارت دیگر، با دوگان کردن (π) رشته دقیق

$$(\pi^*):0\to M^*\xrightarrow{f^*}P_0^*\xrightarrow{u^*}P_1^*\to D(M)\to 0$$

به‌دست می‌آید.

گزاره ۴-۲: [۷، گزاره ۵] فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد و فرض کنید $\delta_M: M\to M^{**}$ همریختی طبیعی دوگان باشد. اگر $K_M=\text{Ker}\delta_M$ و $C_M=\text{Coker}\delta_M$، آن‌گاه یکریختی‌های طبیعی زیر را داریم:

$$K_M\cong \text{Ext}_R^1(D(M),R)$$
$$C_M\cong \text{Ext}_R^2(D(M),R)$$

علاوه بر این، این $i\ge 3$ داریم:

$$\text{Ext}_R^i(D(M),R)\cong \text{Ext}_R^{i-2}(M^*,R)$$

با بررسی تعریف ۲-۳ و گزاره ۴-۲، مشک مدول‌های $k-$ بی‌تاب را به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۴-۳: $R-$ مدول M، $k-$ بی‌تاب نامیده می‌شود هرگاه برای هر $1\le i\le k$، داشته باشیم $\text{Ext}_R^i(D(M),R)=0$. بنابراین، مدل‌های ۱-

بی‌تاب همان مدول‌های بی‌تاب و مدول‌های ۲- بی‌تاب همان مدول‌های انعکاسی هستند. برای $k \geq 3$، مدول M، $k-$ بی‌تاب است اگر M مدول انعکاسی باشد و برای $1 \leq i \leq k-2$، داشته باشیم $\mathrm{Ext}_R^i\left(M^*, R\right)=0$. طبق تعریف، هر مدول، ۰- بی‌تاب است.

ملاحظه ۴-۴. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد. در این‌صورت M مدول $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، M_{p}، $R_{\mathrm{p}}-$ مدول $k-$ بی‌تاب باشد.

تعریف ۴-۵: $R-$ مدول M در شرط ($\tilde{S}_k$) صدق می‌کند هرگاه برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ داشته باشیم $\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right) \geq \min\left\{k, \mathrm{depth} R_{\mathrm{p}}\right\}$.

گزاره ۴-۶. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد به طوری‌که $G-\dim_R M<\infty$ و $k \geq 0$ یک عدد صحیح باشد. در این‌صورت موارد زیر معادلند:

(i) M مدول $k-$ بی‌تاب است.

(ii) M در شرط ($\tilde{S}_k$) صدق می‌کند.

برهان. طبق [۷، قضیه ۴۲] هرگاه بعد گورنشتاین M به طور موضعی متناهی باشد موارد (i) و (ii) معادلند. از طرف دیگر متناهی بودن بعد گورنشتاین M با متناهی بودن بعد گورنشتاین M به طور موضعی معادلند.

قضیه زیر یکی از نتایج مهم این بخش است که گزاره ۳.۱ را برای مدول‌های $k-$ بی‌تاب تعمیم می‌دهد.

قضیه ۴-۷. فرض کنید M یک $R-$ مدول باشد به طوری‌که $G-\dim_R(M)<\infty$.

در این صورت M مدول $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر

(i) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، به طوری که $\mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right) \leq k-1$، M_{p} مدول $k-$ بی‌تاب باشد، و

(ii) برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ به طوری که $\mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right) \geq k$ داشته باشیم $\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right) \geq k$.

به علاوه، طبق فرمول آسلندر - بریدجر، مدول M، $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ به طوری که $\mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right) \leq k-1$، M_{p} مدول $k-$ بی‌تاب باشد، و برای هر $\mathrm{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ به طوری که $\mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right) \geq k$ داشته باشیم $\mathrm{G\text{-}dim}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right) \leq \mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right)-k$.

برهان. فرض کنید M یک $R-$ مدول $k-$ بی‌تاب باشد، در این صورت (i) به وضوح برقرار است و طبق گزاره ۴-۶ مدول M در شرط ($\tilde{S}_k$) صدق می‌کند، بنابراین (ii) برقرار است.

برعکس، چون $G-\dim_R(M)<\infty$، طبق گزاره ۴-۶ کافی است نشان دهیم که M در شرط ($\tilde{S}_k$) صدق می‌کند، اگر $\mathrm{depth}(R_{\mathrm{p}}) \geq k$، آن‌گاه طبق (ii) داریم $\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right) \geq k$ و بنابراین $\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right) \geq \min\left\{k, \mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right)\right\}$.

در غیر این صورت، طبق (i)، M_{p} مدول $k-$ بی‌تاب است، پس M_{p} در شرط ($\tilde{S}_k$) صدق می‌کند. بنابراین، M مدول $k-$ بی‌تاب است.

در ادامه، نشان می‌دهیم که روی حلقه‌های موضعی و گورنشتاین با بعد k، کلاس مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی و کلاس مدول‌های $k-$ بی‌تاب با هم معادلند.

یادآور می‌شویم که روی حلقه موضعی R، مدول M، ماکزیمال کوهن - مکالی نامیده می‌شود هرگاه $\mathrm{depth}_R(M)=\dim_R(M)=\dim R$.

نتیجه ۴-۸: فرض کنید R حلقه‌ای موضعی و گورنشتاین با بعد k باشد و فرض کنید M یک $R-$ مدول ناصفر باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر معادلند.

(i) M مدول $k-$ بی‌تاب است.

(ii) $G-\dim_R(M)=0$.

(iii) M مدول ماکزیمال کوهن - مکالی است.

برهان. طبق قضیه ۴-۷، (ii) از (i) نتیجه می‌شود. (iii)$\Rightarrow$(ii): فرض کنید $G-\dim_R(M)=0$، در این‌صورت حکم از فرمول آسلندر - بریدجر نتیجه می‌شود. (i)$\Rightarrow$(iii): فرض کنید M یک $R-$ مدول ماکزیمال کوهن - مکالی باشد، بنابراین M_{p} یک $R_{\mathrm{p}}-$ مدول ماکزیمال کوهن - مکالی برای هر $\mathrm{p}\in\mathrm{Supp}(M)$ است. بنابراین M در شرط $(\tilde{S}_k)$ صدق می‌کند و لذا طبق گزاره ۴-۶، M مدول $k-$ بی‌تاب است.

در [۵، نتیجه ۶-۲] و [۶]، هونیکه و ویگند مطلب زیر را ثابت کردند:

فرض کنید R یک حلقه اشتراک کامل باشد و M و N، $R-$ مدول‌های ناصفر باشند به طوری‌که برای هر $i\geq 1$، داشته باشیم $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$. اگر $M\underset{R}{\otimes}N$ یک مدول ماکزیمال کوهن - مکالی باشد، آن‌گاه M و N مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی هستند.

در ادامه، شرایط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضرب تانسوری مدول‌های $k-$ بی‌تاب مدول $k-$ بی‌تاب شود را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۴-۹. فرض کنید که R یک حلقه اشتراکی کامل با بعد $\dim(R)=k$ باشد و فرض کنید M و N ، $R-$ مدول‌های ناصفر باشند به طوری‌که برای هر $i\geq 1$ داشته باشیم: $\mathrm{Tor}_i^R(M,N)=0$ در این‌صورت $M\underset{R}{\otimes}N$ مدول $k-$ بی‌تاب است اگر و تنها اگر M و N مدول‌های $k-$ بی‌تاب باشند.

برهان. ابتدا فرض کنید که $M\underset{R}{\otimes}N$ یک مدول $k-$ بی‌تاب باشد. طبق نتیجه ۴-۸ مدول $M\underset{R}{\otimes}N$ یک مدول ماکزیمال کوهن - مکالی است. حال طبق [۵، نتیجه ۶-۲]، M و N مدول‌های ماکزیمال کوهن - مکالی است، بنابراین طبق نتیجه ۴-۸، M و N مدول‌های $k-$ بی‌تاب هستند.

برعکس، فرض کنید $\mathrm{p}\in\mathrm{Supp}(M)$، از آنجایی که M مدول $k-$ بی‌تاب است بنابراین M در شرط $(\tilde{S}_k)$ صدق می‌کند. بنابراین

$$\begin{aligned}
&\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\underset{R_{\mathrm{p}}}{\otimes}N_{\mathrm{p}}\right)=\\
&\quad \mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right)\\
&\quad +\mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(N_{\mathrm{p}}/\left(\mathrm{p}R_{\mathrm{p}}\right)N_{\mathrm{p}}\right)\\
&\quad \geq \mathrm{depth}_{R_{\mathrm{p}}}\left(M_{\mathrm{p}}\right)\\
&\quad \geq \min\left\{k,\mathrm{depth}\left(R_{\mathrm{p}}\right)\right\}
\end{aligned}$$

لذا $M\underset{R}{\otimes}N$ در شرط $(\tilde{S}_k)$ صدق می‌کند و طبق گزاره ۴-۶ حکم برقرار است. ■

فهرست منابع

[1] M Auslander, M Bridger, (1969). Stable module theory, American Mathematical Society, Providence.

[2] R Belshoff, (2009). Remarks on reflexive modules, Covers, and envelopes, Beiträge Algebra Geom.

[3] W Bruns, J Herzog, (1993), Cohen - Maculay Rings, Cambridge University press, Cambridge, University press,

[4] E Enochs, O.M.G Jenda, (2000). Relative Homological Algebra, de Gruyter Expositions in Mathematics, Vol. 30, Walter de Gruyter and Co Berlin.

[5] C Huneke, R Weigand, (1994). Tensor Products of modules and the rigidity of Tor, Math. Ann.

[6] C Huneke, R Weigand, (2007). Correction to "Tensor Products of Modules and the rigidity of Tor", Math. Annalen.

[7] V Masiek, (2000). Gorenstein dimension and torsion of modules over Commutative Noetherian rings, Comm. Algebra.

[8] P Samuel, (1964). Anneaux gradués factoriels et modules réflexifs, Bull.

[9] J.-P Serre, (1958). Classes des Corps Cyclotomiques, Sem. Bourbaki .