

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## نتایجی از تعمیم نامساوی بورخ و عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته یک ایدال نسبت به یک مدول کوهن - مکالی

محمد توحیدی<sup>۱</sup>، امیر مافی<sup>۲\*</sup>، خدیجه احمدی آملی<sup>۳</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشجوی دکتری گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

<sup>(۲)</sup> دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران (نویسنده مسئول).

<sup>(۳)</sup> استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۱۲/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۴/۱۳

### چکیده

فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی با هیأت مانده‌ای نامتناهی  $k = A/m$ ،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد. فرض کنید  $G_A(I)$  و  $R_A(I)$ ، به ترتیب جبر ریس و حلقه مدرج وابسته  $I$  و  $l(I)$  نشان دهنده‌ی بسط تحلیلی  $I$  باشد. نامساوی بورخ بیان می‌کند که  $l(I) + \inf \{ \text{depth } A/I^n : n \geq 1 \} \leq \dim A$  و تساوی زمانی برقرار است که  $G_A(I)$  کوهن - مکالی باشد. بنابراین در این حالت می‌توان با محاسبه عمق حلقه مدرج وابسته  $I$ ، بیان کرد  $\text{depth } G_A(I) = l(I) + \inf \{ \text{depth } A/I^n : n \geq 1 \}$ . ما در این مقاله نتایج را به حالت مدولی تعمیم می‌دهیم و نشان خواهیم داد برای عمق مدول مدرج وابسته  $I$  نسبت به  $M$ ؛ یعنی  $\text{depth } G_M(I)$ ، این تساوی در حالت مدولی حتی اگر  $G_M(I)$  لزوماً کوهن - مکالی نباشد نیز برقرار است و تعمیم نامساوی بورخ را ثابت خواهیم کرد. همچنین به محاسبه عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته به یک ایدال نوعاً همبرش کامل نسبت به مدول  $M$  در یک حلقه موضعی کوهن - مکالی خواهیم پرداخت و نتایجی را درباره‌ی ایدال‌های با انحراف تحلیلی کوچکتر یا مساوی یک با عدد تقلیل حداکثر دو نسبت به مدول  $M$  به دست می‌آوریم.

**واژه‌های کلیدی:** مدول مدرج وابسته، عدد بورخ، همبرش کامل، انحراف تحلیلی، بسط تحلیلی، عدد تقلیل.

۱. مقدمه

فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی و  $I \subseteq A$  ایدالی از  $A$  باشد. ارتفاع ایدال  $I$  با  $ht(I)$  و بسط تحلیلی  $I$  آن با  $l(I)$  نشان داده می‌شود که بنا بر تعریف نورثکات و ریس [۲۲] داریم  $l(I) = \dim_{\oplus_{n \geq 0} I^n / mI^{n+1}}$  که در آن  $\dim(-)$  نشان دهنده‌ی بعد کرول است. حلقه مدرج  $\oplus_{n \geq 0} I^n / mI^{n+1}$  را فیبر مخروطی<sup>۴</sup> ایدال  $I$  می‌نامند و با  $F(I)$  نشان داده می‌شود. هوکبا و هونیکه [۱۶] انحراف تحلیلی<sup>۵</sup> ایدال  $I$  را به صورت تفاضل  $l(I) - ht(I)$  تعریف کرده‌اند. این مقدار با  $ad(I)$  نشان داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که  $ht(I) \leq l(I) \leq \dim A$  و ایدال  $I$  هم مضرب<sup>۶</sup> نامیده می‌شود هرگاه  $ht(I) = l(I)$  [۱۴]. به عبارتی، ایدال‌های با انحراف تحلیلی صفر هم مضرب نامیده می‌شوند. برای مثال، ایدال‌های  $m$ -اولیه<sup>۷</sup> همواره هم‌مضرب هستند. زیر حلقه  $A[t] = \oplus_{n \geq 0} I^n t^n$  از حلقه مدرج  $A$  و  $-A$  مدول  $G_A(I) = \oplus_{n \geq 0} I^n / I^{n+1}$  به ترتیب، جبر ریس<sup>۸</sup> و حلقه مدرج وابسته  $I$  می‌باشند. برای دیدن محاسبات مربوط به حلقه مدرج وابسته و جبر ریس ایدال‌های هم مضرب [۱۴] را ملاحظه کنید. اخیراً، بسیاری از ویژگی‌های جالب در رابطه با جبرهای ریس و حلقه‌های مدرج وابسته به ایدال‌هایی با انحراف تحلیلی کوچک بیان شده است. برای مثال [۱۱]، [۱۲]، [۱۶]، [۷] را ملاحظه کنید. این نتایج عمدتاً مربوط به ویژگی‌های گرنشتاین و کوهن - مکالی جبرهای ریس و حلقه‌های فرم از ایدال‌هایی با انحراف تحلیلی ۱ یا ۲ می‌باشد. همچنین نتایج ارزنده‌ای با احتساب شرایط خاصی روی ایدال  $I$  برای کوهن - مکالی بودن چنین حلقه‌هایی به دست آمده است. برای مثال به [۱۳] یا [۲۹] مراجعه شود.

از این‌جا به بعد فرض می‌کنیم  $A$  یک حلقه موضعی با تنها ایدال ماکسیمال  $m$  است و هیأت مانده‌ای  $k = A/m$  نیز نامتناهی است. یادآوری می‌کنیم که ایدال  $J \subseteq I$  یک تقلیل از  $I$  نامیده می‌شود هرگاه عددی صحیح مانند  $n \geq 0$  وجود داشته باشد به طوری که  $I^{n+1} = JI^n$ . این ایدال تقلیل مینیمال نامیده می‌شود هرگاه هیچ تقلیل دیگری از  $I$  مشمول در  $J$  وجود نداشته باشد. این مفاهیم توسط نورثکات و ریس [۲۲] معرفی شده‌اند. آنها ثابت کرده‌اند که تقلیل‌های مینیمال از  $I$  همواره وجود دارد و مفهومی مرتبط با بسط تحلیلی ایدال  $I$  را بیان کرده‌اند [۲۲ بخش ۲، قضیه ۱]. تعداد مینیمال مولدهای  $I$  را با  $\mu(I)$  نشان می‌دهیم. بنابر [۲۲، بخش ۴، قضیه ۱]،  $l(I)$  به عنوان تعداد مینیمال مولدهای هر تقلیل مینیمالی از  $I$  در نظر گرفته می‌شود. به عبارتی برای هر تقلیل مینیمال  $J$  از  $I$ ،  $l(I) = \mu(J)$ . علاوه بر این، برای تقلیل داده شده‌ی  $J$  از  $I$ ، عدد تقلیل  $I$  نسبت به  $J$  با  $r_J(I)$  نشان داده می‌شود و به صورت  $r_J(I) = \min \{n \mid I^{n+1} = JI^n\}$  تعریف می‌شود. همچنین عدد تقلیل  $I$  را با نماد  $r(I)$  نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم  $J$  یک تقلیل مینیمال از است  $r(I) = \min \{r_J(I) \mid J \text{ is a minimal reduction of } I\}$ . در ادامه، عدد تقلیل  $r(I)$  مستقل نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر تقلیل مینیمال  $J$  از  $I$ ،  $r(I) = r_J(I)$ .

ارتفاع ایدال  $I$  که با  $ht(I)$  نشان داده می‌شود برابر است با  $\inf \{\dim A_P \mid P \in \text{Ass}(A/I)\}$  اگر  $h := ht(I)$ ، آن‌گاه عدد مینیمال موضعی ایدال  $I$  را با نماد  $r_h(I)$  نشان می‌دهیم که به صورت  $r_h(I) = \max \{r(I_P) \mid P \in V(I), ht(P) = h\}$  تعریف می‌شود. در ادامه، ایدال  $I$  در  $A$  را نآمیخته نامیم

2. Height  
3. Analytic spread  
4. Fiber cone  
5. Analytic deviation  
6. Equimultiple  
7.  $m$ -primary  
8. Rees algebra

بورخ<sup>۱</sup> [۵] بیان می‌کند که برای هر ایدال  $I$ ،  

$$\inf \{ \text{depth } A/I^n : n \geq 1 \} + l(I) \leq \dim A$$
 و تساوی زمانی برقرار است که  $G_A(I)$  کوهن - مکالی باشد و  $\langle h \rangle$  [۹]. (همچنین [۲۷] را ملاحظه کنید). بنابراین، اگر  $G_A(I)$  کوهن - مکالی باشد، می‌توان نوشت  

$$\text{depth } G_A(I) = \inf \{ \text{depth } A/I^n : n \geq 1 \} + l(I)$$
 واضح است که نمی‌توان انتظار داشت چنین فرمولی در حالت کلی برقرار باشد. زیرا حلقه‌های موضعی  $(A, m)$  وجود دارند به طوری که کوهن - مکالی هستند و  $\text{depth } G_A(m) = 0$ . برای دیدن مثال‌های متنوع به [۱۰] مراجعه شود.

وقتی که  $M = A$  و  $l(I) = ht(I)$ ؛ یعنی هنگامی که  $I$  دارای انحراف تحلیلی صفر است، بسیاری از محققین راجع به ویژگی کوهن - مکالی بودن  $G_A(I)$  بحث و تبادل نظر نموده و نتایج زیادی به دست آورده‌اند. در حالی که برای انحراف تحلیلی مثبت چنین کاری صورت نگرفته است. هر چند که تلاش‌های قابل ملاحظه‌ای برای حالتی که انحراف تحلیلی یک ایده‌آل یک یا دو می‌باشد انجام گرفته است [۱۱]، [۱۶]، [۱۹]. وقتی که انحراف تحلیلی یک یا دو است هوکابا و هونیکه [۱۶]، قضیه ۹، ۲، [۱۷]، قضیه ۱، ۲ [۱۸] نشان داده‌اند که اگر  $(A, m)$  یک حلقه کوهن - مکالی موضعی با هیأت مانده‌ای نامتناهی و  $I$  نوعاً همبرش کامل با انحراف تحلیلی یک و عدد تقلیل حداکثر یک باشد، آن‌گاه حلقه ریس و حلقه مدرج وابسته هر دو تحت شرایطی کوهن - مکالی هستند. این شرایط توسط تعدادی از مؤلفین تعمیم داده شده است [۱۳]، [۱۹]. آنچه که در این مقاله مد نظر ما است این است که نتایجی را که درباره‌ی حلقه‌ها و ایده‌آل‌هاست به حالت مدولی تعمیم دهیم.

**تعریف ۱:** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$  - مدول متناهی و  $I \subseteq A$  ایدالی از  $A$  باشد با

هرگاه تمام ایدال‌های اول وابسته  $A/I$  دارای ارتفاع یکسانی باشند. به بیانی دیگر؛ هرگاه به ازای هر ایدال اول وابسته  $ht(P) = ht(I)$ ،  $P \in \text{Ass}(A/I)$  فرض کنیم  $I$  ایده‌آلی از  $A$  باشد. یادآوری می‌کنیم که ایدال  $I$  همبرش کامل<sup>۱</sup> نامیده می‌شود هرگاه  $I$  به طور مینیمال توسط یک  $A$  - رشته منظم تولید شده باشد؛ به عبارتی هرگاه  $ht(I) = \mu(I)$ . ایدال  $I$  تقریباً همبرش کامل<sup>۲</sup> نامیده می‌شود هرگاه  $\mu(I) = ht(I) + 1$  و  $I_P$  به ازای هر ایدال اول مینیمال  $P \in \text{Min}(A/I)$  همبرش کامل باشد. علاوه بر این،  $I$  نوعاً همبرش کامل<sup>۳</sup> نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر ایدال اول مینیمال  $P \in \text{Min}(A/I)$  داشته باشیم  $ht(I_P) = ht(I)$  یا [۱۵] [۳۰]. زارزونلا [۳۰]، لم ۱، ۲ نشان داده است که هر تقلیل مینیمال از یک ایدال نوعاً همبرش کامل با انحراف تحلیلی ۱ تقریباً همبرش کامل است.

برادمن [۴] ثابت کرده است که اگر  $A$  کوهن - مکالی و  $I$  یک ایدال نوعاً همبرش کامل از  $A$  باشد به طوری که  $ad(I) = 1$  و  $r(I) = 0$ ، آن‌گاه

$$\text{depth } G_A(I) = \min \{ \dim A, \text{depth } A/I + ht(I) + 1 \}$$

و

$$\text{depth } R_A(I) = \min \{ \dim A + 1, \text{depth } A/I + ht(I) + 2 \}$$

(همچنین [۱۵] را ملاحظه کنید). فرمول مشابهی نیز نشان داده شده است که در آن  $I$  یک ایدال نوعاً همبرش کامل با  $ad(I) = 1$  و  $r(I) \leq 1$  است [۳۰]. هدف ما در این مقاله به دست آوردن فرمول‌هایی از این دست برای محاسبه عمق جبر ریس و حلقه مدرج وابسته یک ایدال همبرش کامل نوعی نسبت به مدول کوهن - مکالی  $M$  با انحراف تحلیلی ۱ و عدد تقلیل حداکثر ۱ در یک حلقه کوهن - مکالی موضعی است. از طرف دیگر، نامساوی

1. Complete intersection

2. Almost complete intersection

3. Generically complete intersection

4. Burch's inequality

**تعریف ۴:** ارتفاع ایدال  $I$  نسبت به  $M$  را با نماد

$$ht_M(I) \text{ نشان می‌دهیم و آن را به صورت } \inf \{ \dim M_P \mid P \in \text{Supp}(M/IM) \}$$

تعریف می‌کنیم. اگر  $h := ht_M(I)$ ، آن‌گاه عدد مینیمال موضعی ایدال  $I$  نسبت به  $M$  را به صورت

$$r_h(I, M) =$$

$$\max \{ r(I_P, M_P) \mid P \in V(I), ht_M(P) = h \}$$

تعریف می‌کنیم. همچنین، انحراف تحلیلی ایدال  $I$  نسبت به  $M$  را به صورت تفاضل  $l_M(I) - ht_M(I)$  تعریف

می‌کنیم و آن را با نماد  $ad_M(I)$  نشان می‌دهیم. در لم ۵ ثابت می‌کنیم  $ht_M(I) \leq l_M(I) \leq \dim M$

بنابراین همواره داریم  $ad_M(I) \geq 0$ . در ادامه، ایدال  $I$  هم‌مضرب نسبت به  $M$  نامیده می‌شود هرگاه  $ht_M(I) = l_M(I)$

**تعریف ۵:** ایدال  $I$  در  $A$  را نامیخته نسبت به  $M$

می‌نامیم هرگاه تمام اول‌های وابسته  $M/IM$  دارای ارتفاع یکسانی باشند. به بیانی دیگر؛ هرگاه به ازای هر ایدال اول وابسته  $P \in \text{Ass}(M/IM)$

$$ht_M(P) = ht_M(I)$$

**تعریف ۶:** ایدال  $I$  در  $A$  همبرش کامل نسبت به  $M$

نامیده می‌شود هرگاه  $I$  به طور مینیمال در  $A$  توسط یک

$M$  - رشته منظم تولید شده باشد. به عبارتی؛ هرگاه

$$\mu(I) = ht_M(I) \text{ تقریباً همبرش کامل}$$

نسبت به  $M$  نامیده می‌شود هرگاه

$$\mu(I) = ht_M(I) + 1 \text{ و } I_P \text{ به ازای هر ایدال اول}$$

مینیمال  $P \in \text{Supp}(M/IM)$  همبرش کامل

می‌باشد. علاوه بر این،  $I$  نوعاً همبرش کامل نسبت به

$M$  نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر ایدال اول مینیمال

$$P \in \text{Supp}(M/IM), I_P \text{ همبرش کامل باشد. به}$$

عنوان دست‌آوردی از نتایج ارائه شده، ما در این مقاله به

دنبال اثبات قضیه اساسی زیر خواهیم بود: (نتیجه ۳ را

ملاحظه کنید.)

$ht(I) \geq 1$  مدول مدرج وابسته  $I$  نسبت به  $M$  عبارت

است از  $G_A(I) -$  مدول

$$G_M(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M$$

ریس ایدال  $I$  نسبت به  $M$  را با نماد  $R_M(I)$  نشان

$$\text{می‌دهیم و به صورت } R_M(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M t^n$$

می‌کنیم. فیبر مخروطی ایده‌آل  $I$  نسبت به  $M$  با نماد

$$F_M(I) \text{ نشان داده می‌شود و تعریف می‌کنیم}$$

$$F_M(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / m I^{n+1} M$$

**تعریف ۲:** بسط تحلیلی ایده‌آل  $I$  نسبت به  $M$  را با

نماد  $l_M(I)$  نشان می‌دهیم و آن را به صورت

$$l_M(I) = \dim F_M(I) \text{ تعریف می‌کنیم.}$$

**تعریف ۳:** [۲۶، تعریف ۱.۱] فرض کنید  $M$  یک

$A -$  مدول نوتری و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد. ایدال

$J \subseteq I$  یک تقلیل از  $I$  نسبت به  $M$  نامیده می‌شود

هرگاه عدد طبیعی  $m$  وجود داشته باشد به طوری که به

$$\text{ازای هر } n \geq m, J I^n M = I^{n+1} M \text{ کوچک‌ترین}$$

$m$  ای که در این رابطه صدق می‌کند را با  $r_J(I, M)$

نشان می‌دهیم. این ایدال تقلیل مینیمال نامیده می‌شود

هرگاه هیچ تقلیل دیگری از  $I$  مشمول در  $J$  وجود نداشته

باشد. علاوه بر این، عدد تقلیل  $I$  نسبت به  $M$  را با نماد

$$r(I, M) \text{ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف}$$

می‌کنیم:

$$r(I, M) = \min \{ r_J(I, M) \mid$$

$J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  است

**تذکر ۱.** بنا بر تعمیم [۲۲، بخش ۴، قضیه ۱] در حالت

مدولی،  $l_M(I)$  را به عنوان تعداد مینیمال مولدهای یک

(هر) تقلیل مینیمالی از  $I$  نسبت به  $M$  در نظر می‌گیریم.

به عبارتی؛ اگر  $J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$

$$\text{باشد، آن‌گاه } l_M(I) = \mu(J)$$

<sup>1</sup>. Associated graded module

قضیه [۱] آمده است فرموله کنیم. برای مثال با استفاده از محاسباتی که درباره‌ی عدد بورخ در بخش [۳] به دست آمده است به نتایجی در بخش [۴] مانند نتیجه [۲] و نتیجه [۳] دست می‌یابیم. همچنین، با استفاده از نتایج هوکابا و مارلی [۱۸] که در آن عمق  $G_A(I)$  و  $R_A(I)$  به هم ربط داده شده‌اند، می‌توانیم مقدار دقیق  $depth R_M(I)$  را برای اغلب مواردی که در این جا بررسی می‌کنیم به دست آوریم (قضیه ۲، قضیه ۴ و قضیه ۵ را ملاحظه کنید). سرانجام در بخش آخر، تعمیمی از نامساوی بورخ را ثابت می‌کنیم و نشان می‌دهیم اگر  $G_M(I)$  کوهن - مکالی باشد، آن گاه تساوی برقرار است. یعنی؛  $I_M(I) + B(I, M) = \dim M$ . (قضیه ۶ را ملاحظه کنید).

به منظور ثابت کردن نتایج فوق معمولاً آنها را به حالت  $ht_M(I) = 0$  محدود می‌کنیم. این امکان وجود دارد، زیرا تحت فرضیات قضیه [۱] نشان داده می‌شود که تقلیل‌های مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  منحصرأ وجود دارد. برای دیدن نتایج مشابه که شامل برخی از حالت‌های خاص مورد بحث ما است می‌توان به [۱] یا [۱۳] مراجعه نمود.

### ۱. پیش نیازها

در سرتاسر این مقاله،  $(A, m)$  همواره نشان دهنده‌ی یک حلقه موضعی با ایدال ماکسیمال  $m$  و هیأت مانده‌ای نامتناهی  $k = A/m$  است. همچنین فرض می‌کنیم  $M$  یک  $A$ -مدول متناهی و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد.

**تعریف ۷:** ([۲۶]، تعریف ۱۰.۲) فرض کنید  $M$  یک  $A$ -مدول نوتری و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد. عضو  $x$  از  $A$  را به طور صحیح وابسته<sup>۲</sup> روی  $I$  نسبت به  $M$  گوئیم اگر عددی طبیعی چون  $s$  وجود داشته باشد به طوری که  $x^s M \subseteq \sum_{i=1}^s x^{s-i} I^i M$ .

**قضیه ۱.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه کوهن - مکالی موضعی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد به طوری که  $ad_M(I) \leq 1$ ،  $r(I, M) \leq 2$  و  $r_h(I, M) \leq 1$  که در آن  $h = ht_M(I)$ . در مجموع، فرض کنید  $I$  ناآمیخته نسبت به  $M$  باشد هرگاه  $ad_M(I) = 1$  یا  $r(I, M) = 2$ . در این صورت

$$\inf \{ depth M / I^n M : n \geq 1 \} + l_M(I) - 1 \leq depth G_M(I) \leq$$

$$\inf \{ depth M / I^n M : n \geq 1 \} + l_M(I) + 1$$

علاوه بر این، اگر  $r(I, M) \leq 1$  و  $I$  یک ایدال نوعاً همبرش کامل با  $ad_M(I) = 1$  باشد یا  $depth M / IM \neq depth M / I^2 M$  و

$$depth G_M(I) = ht_M(I) > 0$$

$$\inf \{ depth M / I^n M : n \geq 1 \} + l_M(I).$$

برای سادگی، مقدار

$$\inf \{ depth M / I^n M : n \geq 1 \}$$

ایدال  $I$  نسبت به  $M$  نام گذاری می‌کنیم و آن را با  $B(I, M)$  نشان خواهیم داد. توجه داریم که برادمن [۳] ثابت کرده است که عمق  $A/I^n$  دارای مقدار ثابتی است، به طوری که وی آن را برای ایدال‌هایی که تقریباً همبرش کامل هستند، محاسبه کرده است [۴]. در چنین حالتی، این مقدار تقریبی با تعمیم روی حالت مدولی با  $B(I, M)$  مطابقت دارد اما این در حالت کلی برقرار نیست (گزاره‌های ۱، ۲ و ۳ را ملاحظه کنید). در واقع، در بخش [۳] این مقاله، عدد بورخ ایدال‌هایی را محاسبه خواهیم کرد که تحت فرضیات قضیه ۱ هستند و در بخش [۴]، عمق حلقه‌های مدرج وابسته به آنها را بررسی خواهیم کرد. بنابراین، با مقایسه‌ی مستقیم از هر دو محاسبات می‌توانیم مستقیماً گزاره‌ای را در که در

<sup>1</sup>. Burch number

<sup>2</sup>. Integrally dependent

**تعریف ۸:** ([۲۶]، نتیجه ۱.۵) مجموعه تمام عضوهای  $A$  که به طور صحیح وابسته روی  $I$  نسبت به  $M$  هستند یک ایدال  $A$  است. این ایدال بستار صحیح  $I$  نسبت به  $M$  نامیده می‌شود و با  $\bar{I}^{(M)}$  نشان داده. همچنین، می‌گوییم  $I$  به طور صحیح بسته<sup>۲</sup> نسبت به  $M$  است هرگاه  $\bar{I}^{(M)} = I$ . هر ایدال ماکسیمال  $A$  یک ایدال به طور صحیح بسته است.

ایده‌های مهم درباره‌ی تقلیل و بستار صحیح یک ایدال در حلقه جابجایی نوتری  $A$  توسط نورثکات و ریس [۲۲] معرفی گردیده است.

**تعریف ۹:** ([۲۴]) فرض کنید  $m$  یک عنصر ناصفر از  $A$  - مدول  $M$  و  $j$  بزرگ‌ترین عدد صحیح باشد به طوری که  $m \in I^j M$ . تصویر  $m$  در  $I^j M / I^{j+1} M$  را با نماد  $m^*$  نشان می‌دهیم و آن را فرم آغازین<sup>۳</sup>  $m$  می‌نامیم. اگر  $L$  زیر مدولی از  $M$  باشد، آن‌گاه  $L^*$  نشان دهنده‌ی زیر مدول مدرجی از  $G_M(I)$  است که توسط تمام  $l^*$ هایی تولید می‌شود که در آن  $l \in L$ . در این حالت داریم  $G_{M/L}(I) \cong G_M(I) / L^*$ .

والابرها و والا [۲۸]، نتیجه ۲.۷] محکی را تعیین کرده‌اند برای وقتی که رشته‌ای از فرم‌های آغازین عناصر  $A$ ، تشکیل یک رشته منظم در حلقه مدرج وابسته می‌دهند. در واقع، آنها شرط لازم و کافی را برای رشته‌ای از عناصر  $a_1, \dots, a_k$  بیان کرده‌اند به طوری که دارای این ویژگی باشند که رشته  $a_1^*, \dots, a_k^*$  یک  $G_A(I)$  - رشته منظم باشد. ما در این‌جا نتیجه‌ی فوق را برای مدول‌ها تعمیم می‌دهیم، با این فرض که فرم‌های آغازین از عناصر  $a_1, \dots, a_k$  از درجه ۱ هستند.

**لم ۱.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$  - مدول و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد. فرض کنید

یک  $a_1, \dots, a_k$  یک  $M$  - رشته منظم باشد. قرار دهید  $J = (a_1, \dots, a_k)$ . در این صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

-  $a_1^*, \dots, a_k^*$  یک  $G_M(I)$  - رشته منظم است.

- به ازای هر  $i \geq 1$ ،  $I^i M \cap JM = I^{i-1} JM$ .

و در این حالت داریم:

$$G_M(I) / (a_1^*, \dots, a_k^*) M \cong G_{M/JM}(I).$$

**برهان.** به [۲۴]، قضیه ۳] مراجعه شود.

نتایج زیر به منظور کاستن برخی اثبات‌ها برای حالتی که ارتفاع یک ایدال نسبت به مدول  $M$  برابر صفر است به کار گرفته خواهد شد.

**تذکر ۲.** فرض کنید  $r_h(I, M) \leq 1$  و  $P \supseteq I$  یک ایدال اول باشد به طوری که  $h = ht_M(P)$ . در این صورت،  $I_P$  یک ایدال  $PA_P$  - اولیه است که  $r(I_P, M_P) \leq 1$  و در این حالت عدد تقلیل  $r_j(I_P, M_P)$  مستقل از تقلیل مینیمال  $J$  نسبت به  $M$  است (برای مثال [۲۱]، گزاره ۲.۵.۴] را ملاحظه کنید). به ویژه، به ازای هر تقلیل  $J'$  از  $I_P$ ،  $I_P^2 M_P = J' I_P M_P$ . از طرف دیگر، توجه داریم که اگر  $I$  ناآمیخته نسبت به  $M$  باشد، آن‌گاه  $r_h(I, M) =$

$$\max \{r(I_P, M_P) \mid P \in \text{Supp}(M / IM)\}.$$

**لم ۲.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکانی،  $M$  یک  $A$  - مدول کوهن - مکانی و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد به طوری که  $ad_M(I) = 1$ . فرض کنید  $I$  نوعاً همبرش کامل نسبت به  $M$  و  $J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد و  $ht_M(I) = h$ . در این صورت یک مجموعه مینیمال از مولدهای  $a, a_1, \dots, a_h$  در  $J$  وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ)  $a_1, \dots, a_h$  یک  $M$  - رشته منظم است.

---

1. Integral closure  
2. Integrally closed  
3. Initial form

www.SID.ir

لم ۳. فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  یک ایدال با  $ad_M(I) = 1$  باشد. همچنین فرض کنید  $I$  نآمیخته نسبت به  $M$  باشد و  $r_h(I, M) \leq 1$  که  $h = ht_M(I)$ . اگر  $J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد، آن گاه یک مجموعه مینیمال از مولدهای  $a, a_1, \dots, a_h$  در  $J$  وجود دارد که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند: (آ)  $a_1, \dots, a_h$  یک  $M$ -رشته منظم است. (ب) به ازای هر  $P \in Supp(M/IM)$

$$I_P^2 M_P = (a_1, \dots, a_h)_P I_P M_P \quad (ج)$$

$((a_1, \dots, a_h) : a)M \cap I^2 M = (a_1, \dots, a_h)IM$   
 (د) اگر  $h \geq 1$  و  $I^3 M = JI^2 M$ ، آن گاه به ازای هر  $n \geq 1$

$$I^{n+1} M \cap (a_1, \dots, a_h)M = (a_1, \dots, a_h)I^n M$$

به ویژه،  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $G_M(I)$ -رشته منظم است.

**برهان.** با توجه به فرض، چون  $l_M(I) = h + 1$  پس یک مجموعه مولد خوب برای  $J$  نسبت به  $M$  مانند  $a, a_1, \dots, a_h$  وجود دارد. در این صورت (آ) مشابه اثبات [۱]، لم ۶ [۲] یا [۱۳]، لم ۲ [۲] ثابت می‌شود. با به کارگیری آنچه که در تذکر ۲ آمده است، قسمت (ب) فوراً نتیجه می‌شود؛ زیرا به ازای هر  $P \in Supp(M/IM)$  می‌توان دید که  $(a_1, \dots, a_h)_P$  یک تقلیل از  $I_P$  نسبت به  $M_P$  است. حال قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم. اگر  $h = 0$ ، آن گاه به دنبال اثبات  $(0 : a)M \cap I^2 M = 0$  هستیم، یا به طور معادل به ازای هر  $P \in MinSupp M$  می‌خواهیم نشان دهیم  $(0 : a)_P M_P \cap I_P^2 M_P = 0$ . اگر  $I \not\subseteq P$ ، آن گاه بنابر شرط (ب) از تعریف ۱۰ داریم که  $a \notin P$  و لذا  $(0 : a)_P M_P = 0$ . اگر  $P \supseteq I$ ، آن گاه  $I_P^2 M_P = 0$  در هر حالت  $(0 : a)_P M_P \cap I_P^2 M_P = 0$  همان طور که می‌خواستیم.

(ب) به ازای هر ایدال اول مینیمال  $P \in Supp(M/IM)$

$$I_P M_P = (a_1, \dots, a_h)_P M_P$$

(ج)  $a \in I$  یک عضو نامقسوم علیه صفر روی  $M$  است.  
 (د) به ازای هر  $n, m \geq 1$

$$((a_1, \dots, a_h)^m : a^n)M \cap I^m M = (a_1, \dots, a_h)^m M$$

(ه) اگر  $h \geq 1$  و  $I^2 M = JIM$ ، آن گاه برای هر  $n \geq 1$  و به ازای هر  $i = 1, \dots, n-1$  داریم:

$$(a_1, \dots, a_h)^i M \cap I^n M = (a_1, \dots, a_h)I^{n-i} M$$

به ویژه،  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $G_M(I)$ -رشته منظم است.

**برهان.** گزاره‌های (آ)، (ب) و (ج) مشابه اثبات [۳۰]، لم ۲.۲ [۲] برای حالت مدولی ثابت می‌شوند. برای (د) و (ه) نیز کافی است اثباتی را که در [۱۶]، لم ۲.۶ و تذکر ۲.۱ [iii] آمده است در حالت مدولی به کار بگیریم. برای حالتی که ایدال  $I$  دارای انحراف تحلیلی ۱ و عدد تقلیل حداکثر ۲ است، ابتدا به تعریف زیر نیاز داریم [۱]

[۱۳] را ملاحظه کنید.

**تعریف ۱۰:** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$ -مدول،  $I$  یک ایدال در  $A$  باشد. فرض کنید  $J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد و  $l = l_M(I)$ . در این صورت، مجموعه مولد  $a_1, \dots, a_l$  برای  $J$  را یک مجموعه مولد خوب<sup>۱</sup> نسبت به  $M$  می‌نامیم هرگاه:

- (آ) به ازای هر  $P \in V(I)$  با  $i = ht_M(P) < l$
- (ب) به ازای هر  $1 \leq i \leq l$  و هر  $P \in Ass(M / (a_1, \dots, a_j)M) \setminus V(I)$  که  $0 \leq j < i$  داشته باشیم  $a_i \notin P$
- در هر حلقه موضعی با هیأت مانده‌ای نامتناهی، هر تقلیل مینیمال  $J$  از  $I$  دارای یک مجموعه خوب از مولدهاست [۱]، لم ۳، ۲ [۳] یا [۱۳]، لم ۰.۱.

1. Good

$$= JI^n M \cap (a_1, \dots, a_h)M$$

چون  $r_J(I, M) \leq 2$

در این صورت  $x = b_1 a_1 + \dots + b_h a_h + ba$  که در آن  $b_i, b \in I^n M$  بنا بر این بنا به فرض استقراء،  $b \in I^n M \cap (a_1, \dots, a_h)M = (a_1, \dots, a_h)I^{n-1}M$

در نتیجه  $ba \in (a_1, \dots, a_h)I^n M$  و لذا  $x \in (a_1, \dots, a_h)I^n M$  علاوه بر این بنا بر لم ۱،  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $G_M(I)$  رشته منظم است.

مثال‌های زیادی از ایدال‌های هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ وجود دارد. به ویژه، کار اخیر کورسو و همکاران [۸]، کورسو و پولینی [۶]، [۷] و پولینی و اولریچ [۲۳] نشان می‌دهد که چگونه می‌توان چنین ایدال‌هایی را زنجیروار به دست آورد.

مثال زیر مثالی از یک ایدال هم‌مضرب با عدد تقلیل ۲ است که به طور صحیح بسته می‌باشد.

**مثال ۱.** فرض کنید

$$A = k[[X, Y, T_1, \dots, T_n]] / (X^3 Y)$$

$$= k[[x, y, t_1, \dots, t_n]]$$

که در آن  $k$  یک میدان و  $n \geq 3$  است.  $A$  یک حلقه کوهن - مکالی  $(n+1)$  - بعدی است و  $I = (xy, t_1, \dots, t_n) \subseteq A$  یک ایدال هم‌مضرب با  $ht(I) = n$  و عدد تقلیل ۲ است که به طور صحیح بسته می‌باشد؛ زیرا  $A/I$  تقلیل یافته<sup>۱</sup> است.

در مجموع، برای به دست آوردن ایدال‌هایی با انحراف تحلیلی یک و عدد تقلیل کوچک‌تر یا مساوی دو با عدد تقلیل موضعی یک می‌توانیم فرآیندی را که در مثال زیر آمده است پی بگیریم.

**مثال ۲.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$  - مدول و  $I \subset A$  یک ایدال نوعاً همبرش کامل نسبت به  $M$  با  $ht_M(I) = h$  باشد. فرض کنید  $I$  نامیخته نسبت به  $M$  باشد،  $r(I, M) = 0$  و  $ad_M(I) = 1$ . در این صورت

حال فرض می‌کنیم که  $h > 0$ . می‌خواهیم نشان دهیم که به ازای هر  $P \in Ass M / (a_1, \dots, a_h)IM$

$$((a_1, \dots, a_h) : a)_P M_P \cap I_P^2 M_P$$

$$= (a_1, \dots, a_h)_P I_P M_P$$

فرض کنیم  $P \in Ass M / (a_1, \dots, a_h)IM \subseteq Ass M / (a_1, \dots, a_h)M \cup Ass M / IM$ .

اگر  $P \in Ass M / IM \subseteq Supp M / IM$  آن‌گاه طبق قسمت (ب)،

$I_P^2 M_P = (a_1, \dots, a_h)_P I_P M_P$  فرض کنیم  $P \in Ass M / (a_1, \dots, a_h)M$  در این صورت  $ht_M(P) = h$ . زیرا از آن‌جا که  $M$  کوهن - مکالی است، پس  $M / (a_1, \dots, a_h)M$  نیز کوهن - مکالی است و لذا تمام عناصر  $Ass M / (a_1, \dots, a_h)M$  مینیمال هستند. بنابراین  $ht_{M/(a_1, \dots, a_h)M}(P) = 0$  و در نتیجه

$$ht_M(P) = ht_{M/(a_1, \dots, a_h)M}(P) + h = 0 + h = h$$

بنابراین اگر  $P \supseteq I$ ، آن‌گاه  $P \in Supp M / IM$  و در این حالت دیدیم

اگر  $I_P^2 M_P = (a_1, \dots, a_h)_P I_P M_P$  حال اگر  $I \not\subseteq P$ ، آن‌گاه بنا بر شرط (ب) از تعریف (۱۰) داریم  $a \notin P$  بنابراین

$$((a_1, \dots, a_h) : a)_P M_P = (a_1, \dots, a_h)_P M_P$$

در هر حالت،

$$((a_1, \dots, a_h) : a)_P M_P \cap I_P^2 M_P$$

$$= (a_1, \dots, a_h)_P I_P M_P$$

و (ج) ثابت می‌شود.

برای اثبات (د) ابتدا فرض می‌کنیم  $n = 1$ . بنا بر (ج) داریم:

$I^2 M \cap (a_1, \dots, a_h)M \subseteq (a_1, \dots, a_h)IM$  و  $((a_1, \dots, a_h) : a)M \cap I^2 M = (a_1, \dots, a_h)IM$  لذا  $I^2 M \cap (a_1, \dots, a_h)M = (a_1, \dots, a_h)IM$  حال فرض کنیم  $n > 1$  و حکم برای  $n-1$  برقرار باشد. فرض کنیم  $x \in I^{n+1}M \cap (a_1, \dots, a_h)M$

<sup>1</sup>. Reduced



**تذکره ۳.** اگر  $J$  یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد، آن گاه  
 $Supp(M/IM) = Supp(M/JM)$  زیرا اگر  
 $P \in Supp(M/JM)$  ولی  $I \not\subseteq P$ ، آن گاه  
 چون برای  $n \gg 0$  داریم  $I^{n+1}M = JI^nM$   
 خواهیم داشت  $M_P = J_P M_P$ . از آن جا طبق لم  
 ناکایاما،  $M_P = 0$  که یک تناقض است. بنابراین  
 $Supp(M/JM) \subseteq Supp(M/IM)$  عکس  
 شمول واضح است.

**تذکره ۴.** فرض کنید  $I$  ایدالی از  $A$  و  $M$  یک  $A$  -  
 مدول باشد. در این صورت  
 $grade(I, M) \leq \mu(I)$   
 نتیجه‌ی زیر برای حالت حلقه‌ای معروف است. ما آن را  
 برای حالت مدولی ثابت می‌کنیم.

**لم ۵.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن -  
 مکالی،  $M$  یک  $A$  - مدول کوهن - مکالی و  $I$  ایدالی  
 از  $A$  باشد. در این صورت  
 $ht_M(I) \leq l_M(I) \leq \dim M$ .

**برهان.** فرض کنید  $l_M(I) = s$  و  $J$  یک تقلیل  
 مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد. در این صورت طبق  
 تذکره ۱، ۲،  $\mu(J) = s$ . از تذکره ۳ نتیجه می‌شود که  
 $\dim(M/IM) = \dim(M/JM)$  بنابراین  
 $grade(I, M) = grade(J, M)$  چون  $M$   
 کوهن - مکالی است، پس  
 $grade(I, M) = ht_M(I)$  بنابر تذکره ۴ داریم  
 $grade(J, M) \leq \mu(J)$  بنابراین

$ht_M(I) \leq l_M(I)$  برای نامساوی دیگر توجه داریم  
 که بنابر تعریف ۱،  $F_M(I)$  خارج قسمتی از  $G_M(I)$   
 است. بنابراین  $l_M(I) \leq \dim G_M(I) = \dim M$

محاسبه عدد بورخ

$I = (a_1, \dots, a_h, a_{h+1})$  که در آن  $a_1, \dots, a_h$  یک  
 $M$  - رشته منظم است و به ازای هر ایدال اول  $P$  که  
 $P \supseteq I$  و  $ht_M(P) = h$  داریم  
 $I_P = (a_1, \dots, a_h)_P$ . قرار دهید  $B := A/(a_1^2)$   
 $N := M/(a_1^2)M$

و  
 $J := (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_h, \bar{a}_{h+1})M \subset N$   
 که در آن  $\bar{a}_i = a_i + (a_1^2)M$  از آن جا که  
 $N/JM = M/IM$ ، پس  $J$  ناآمیخته نسبت به  
 $M$  است و داریم  $ht_M(J) = h-1$ . علاوه بر این،  
 به ازای هر  $q \supseteq I$  با  $ht_M(q) = h-1$  داریم  
 $J_q = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_h)_q M$

بنابراین  $J_q^2 = (\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_h)_q J_q M$   
 هم مضرب نسبت به  $M$  است با عدد تقلیل ۱، و این  
 یعنی عدد تقلیل موضعی  $J$  مساوی ۱ است. چون  
 $JM = (\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_h, \bar{a}_{h+1})JM$ ، داریم  
 $ad_M(J) = 1$  و  $r(J, M) = 1$ . به طریق مشابه  
 با در نظر گرفتن ایدال‌های تقریباً همبرش کامل به دست  
 آمده در [۲۵] و انجام فرآیندی که در مثال ۲ بیان شده  
 است، می‌توانیم ایدال  $J$  را طوری به دست آوریم که  
 $depth(N/JM) < \dim(N/JM) - 1$ .

در لم زیر تعمیمی از یک نتیجه منسوب به هوکابا و  
 مارلی [۱۸، قضیه ۱۰.۳] را بیان می‌کنیم که ارتباط  
 دهنده‌ی عمق با مدول مدرج وابسته و جبر ریس یک  
 ایدال نسبت به یک مدول است. ما از آن برای محاسبه‌ی  
 عمق جبر ریس استفاده خواهیم کرد (قضیه ۵ را ملاحظه  
 کنید).

**لم ۴.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$   
 یک  $A$  - مدول کوهن - مکالی و  $I \subseteq A$  یک ایدال  
 باشد. در این صورت  $depth G_M(I) \leq depth M$   
 و اگر  $depth G_M(I) < depth M$ ، آن گاه  
 $depth R_M(I) = depth G_M(I) + 1$

فرض می‌کنیم

$$\text{depth } M / I^2 M < \text{depth } M / IM$$

در این صورت، با به کارگیری پی در پی لم - عمق<sup>۱</sup> برای رشته دقیق (۱) به ازای  $i = 0, \dots, k-1$  نتیجه می‌شود که  $\text{depth } A_i M / I_i^2 M = \text{depth } M / I^2 M$  و (آ) ثابت می‌شود.

فرض می‌کنیم

$$\text{depth } M / IM < \text{depth } M / I^2 M$$

در این صورت، از (۱) برای  $i = 0$  می‌توان به دست آورد که

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M < \text{depth } M / IM - 1$$

و نیزه،  $\text{depth } A_1 M / I_1^2 M < \text{depth } M / IM$  و با استفاده از (آ) برای هر  $i = 1, \dots, k$  داریم:

$$\text{depth } A_i M / I_i^2 M =$$

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M = \text{depth } M / IM - 1.$$

این قسمت (ب) را ثابت می‌کند.

حال فرض می‌کنیم

$$\text{depth } M / IM = \text{depth } M / I^2 M$$

حالت، با قرار دادن  $i = 0$  در (۱) داریم:

$$\text{depth } M / IM = \text{depth } M / I^2 M$$

$$= \text{depth } A_1 M / I_1^2 M$$

$$\text{یا } \text{depth } M / I^2 M = \text{depth } M / IM$$

$$\text{یا } = \text{depth } A_1 M / I_1^2 M + 1$$

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M > \text{depth } M / IM$$

$$= \text{depth } M / I^2 M$$

اگر

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M = \text{depth } M / IM - 1$$

آن‌گاه از (آ) نتیجه می‌شود که

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M =$$

$$\text{depth } A_k M / I_k^2 M = \text{depth } M / IM - 1$$

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M > \text{depth } M / IM \quad \text{اگر}$$

آن‌گاه با استفاده از (ب) داریم

این بخش را با ثابت کردن لمی آغاز می‌کنیم که برای کنترل عمق‌ها در روند استقراء بسیار مناسب است.

**لم ۶.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن-مکالی و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد. فرض کنید  $a_1, \dots, a_k$  یک خانواده از عناصر در  $I \setminus I^2$  باشد به طوری که  $a_1^*, \dots, a_k^*$  یک  $G_M(I)$ -رشته منظم است. همچنین فرض کنید

$$I_k := I / (a_1, \dots, a_k) \quad \text{و} \quad A_k := A / (a_1, \dots, a_k)$$

( $k \geq 1$ ) در این صورت

$$\text{depth } M / I^2 M < \text{depth } M / IM \quad \text{اگر (آ)}$$

آن‌گاه

$$\text{depth } A_k M / I_k^2 M = \text{depth } M / I^2 M$$

(ب) اگر  $\text{depth } M / IM < \text{depth } M / I^2 M$ ، آن‌گاه

$$\text{depth } A_k M / I_k^2 M = \text{depth } M / IM - 1$$

(ج) اگر  $\text{depth } M / IM = \text{depth } M / I^2 M$

آن‌گاه

$$\text{depth } A_k M / I_k^2 M \geq \text{depth } M / IM - 1$$

**برهان.** از آن‌جا که خانواده  $a_1^*, \dots, a_k^*$   $G_M(I)$ -منظم است، پس  $a_1, \dots, a_k$  تشکیل یک  $M$ -رشته منظم در  $A$  می‌دهد و به ازای هر  $i = 1, \dots, k$  داریم

$$(a_1, \dots, a_i)M \cap I^2 M = (a_1, \dots, a_i)IM$$

برای هر  $i = 0, \dots, k-1$  می‌توانیم هم‌ریختی

$$A_i M / I_i^2 M \rightarrow A_{i+1} M / I_{i+1}^2 M$$

بگیریم (که در آن  $A_0 := A$  و  $I_0 := I$ )، که هسته‌ی

$$(a_{i+1})M / ((a_{i+1}) \cap I_i^2)M$$

$$= (a_{i+1})M / (a_{i+1})I_i M$$

$$\cong A_i M / I_i M$$

با  $M / IM$  یکرخت است. بنابراین به ازای هر

$i = 0, \dots, k-1$  رشته دقیق زیر را داریم:

$$0 \rightarrow M / IM \rightarrow A_i M / I_i^2 M$$

$$\rightarrow A_{i+1} M / I_{i+1}^2 M \rightarrow 0 \quad (۱)$$

<sup>1</sup>. Depth-Lemma

به طوری که هسته‌ی  $M / I^n M \rightarrow A_1 M / I_1^n M$  را در نظر بگیریم

با  $(a_1)M / (I^n \cap (a_1))M \cong (a_1)M / (a_1)I^{n-1}M$  یکرخت است. بنابراین به ازای هر  $n \geq 2$ ، رشته دقیق زیر را داریم:

$$0 \rightarrow M / I^{n-1}M \rightarrow M / I^n M \rightarrow A_1 M / I_1^n M \rightarrow 0 \quad (۲)$$

و لذا با استقراء روی  $n$  و  $h$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \text{depth } M / I^n M &\geq \\ \min \{ \text{depth } M / I^{n-1}M, \text{depth } A_1 M / I_1^n M \} & \\ \geq \text{depth } M / IM. & \end{aligned}$$

**لم ۷.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول تصویری و  $I$  ایدالی از  $A$  باشد با  $ht_M(I) = 0$ . همچنین فرض کنید وجود داشته باشد  $a \in I$  به طوری که یک عضو نامقسوم علیه صفر روی  $M$  باشد. در این صورت

$$\text{depth } M / aIM = \text{depth } M / IM \quad (آ)$$

$$\text{depth } M / IM < \dim M / IM$$

(ب)  $\text{depth } M / aIM = \text{depth } M / IM - 1$  هرگاه

$$\text{depth } M / IM = \dim M / IM$$

**برهان.** رشته‌های دقیق زیر را در نظر می‌گیریم:

$$0 \rightarrow IM \rightarrow M \rightarrow M / IM \rightarrow 0, \quad (۳)$$

$$(۴)$$

$$0 \rightarrow IM / aIM \rightarrow M / aIM \rightarrow M / IM \rightarrow 0.$$

ابتدا فرض می‌کنیم که

$$\text{depth } M / IM < \dim M / IM$$

صورت از (۳) داریم

$$\text{depth } IM = \text{depth } M / IM + 1$$

$$\text{depth } IM / aIM = \text{depth } M / IM$$

$$a \notin Z_A(IM). \text{ این نتیجه به همراه (۴) ثابت می‌کند}$$

$$\text{که } \text{depth } M / aIM = \text{depth } M / IM \text{ و}$$

بنابراین (آ) ثابت می‌شود.

حال فرض می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \text{depth } A_2 M / I_2^2 M &= \\ = \text{depth } A_k M / I_k^2 M &= \text{depth } M / IM - 1 \end{aligned}$$

در غیر این صورت

$$\text{depth } A_1 M / I_1^2 M = \text{depth } M / IM$$

تکرار استدلال فوق برای  $i = 1, \dots, k-1$  می‌توانیم

نتیجه بگیریم که به ازای هر  $i = 2, \dots, k$

$$\text{depth } A_i M / I_i^2 M \geq \text{depth } M / IM - 1$$

بنابراین در هر حالت به ازای  $i = 1, \dots, k$  داریم

$$\text{depth } A_i M / I_i^2 M \geq \text{depth } M / IM - 1 \quad (ج)$$

ثابت می‌شود.

برای ایدال‌های هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ می‌توانیم

عدد بورخ را به روش زیر محاسبه کنیم:

**گزاره ۱.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی

کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی

و  $I$  یک ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد به

طوری که  $r(I, M) \leq 1$ . در این صورت

$$B(I, M) = \text{depth } M / IM.$$

**برهان.** اثبات را با استقراء روی  $h := ht_M(I)$  انجام

می‌دهیم. فرض کنیم  $J = (a_1, \dots, a_h)$  یک تقلیل

مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد که

$$I^2 M = JIM$$

$G_M(I)$  - رشته منظم است.

اگر  $h = 0$ ، آن‌گاه به ازای هر  $n \geq 2$ ،  $I^n M = 0$

و لذا برای هر  $n \geq 1$

$$\text{depth } M / I^n M =$$

$$\text{depth } M = \dim M \geq \text{depth } M / IM$$

حال فرض می‌کنیم  $h > 0$  و قرار می‌دهیم

$$A_1 := A / (a_1) \text{ و } I_1 := I / (a_1). \text{ در این صورت،}$$

$A_1$  یک حلقه کوهن - مکالی و  $I_1$  یک ایدال

هم‌مضرب نسبت به  $M$  است که  $r(I_1, M) \leq 1$  و

$$ht_{M_1}(I_1) = h - 1.$$

از طرف دیگر، به ازای هر  $n \geq 2$  می‌توانیم هم‌ریختی پوشای

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM$$

حال فرض می‌کنیم

$$\text{depth } M / IM = \dim M / IM$$

در این صورت بنابر لم ۷ داریم:

$$\text{depth } M / I^2 M =$$

$$\text{depth } M / aIM = \text{depth } M / IM - 1$$

و می‌توان به استقراء نشان داد که برای هر  $n \geq 2$ ,

$$\text{depth } M / I^{n+1} M = \text{depth } M / aI^n M =$$

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM - 1.$$

حال فرض می‌کنیم  $h > 0$  و

$$J = (a_1, \dots, a_h, a_{h+1})$$

آمده است، یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد

$$\text{با } I^2 M = JIM \text{ در این صورت، رشته } a_1, \dots, a_h$$

یک  $-G_M(I)$  رشته منظم است و اگر قرار دهیم

$$A_1 := A / (a_1) \text{ و } I_1 := I / (a_1) \text{ آن‌گاه } A_1 \text{ یک}$$

حلقه کوهن - مکالی و  $I_1$  یک ایدال نوعاً همبرش کامل

نسبت به  $M$  است با  $ad_M(I_1) = 1$

$$\text{و } r(I_1, M) \leq 1 \text{ و } ht_M(I_1) = h - 1 \text{ بار دیگر، از}$$

رشته دقیق (۲) به ازای هر  $n \geq 1$ ، رشته دقیق زیر را

داریم:

$$0 \rightarrow M / I^{n-1} M \rightarrow M / I^n M$$

$$\rightarrow A_1 M / I_1^n M \rightarrow 0,$$

و ادعا با استقراء روی  $h$  و  $n$  ثابت می‌شود.

برای عدد تقلیل کوچکتر یا مساوی ۲ و عدد تقلیل موضعی

کوچکتر یا مساوی ۱ نتیجه‌ی زیر را داریم:

**گزاره ۳.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی

کوهن - مکالی،  $M$  یک  $-A$  مدول تصویری و  $I$

ایدالی از  $A$  باشد به طوری که  $ad_M(I) = 1$

$$\text{و } r(I, M) \leq 2 \text{ و } r_h(I, M) \leq 1 \text{ که در آن}$$

$h = ht_M(I)$  فرض کنید  $I$  نامیخته نسبت به  $M$

باشد. در این صورت

$$B(I, M) \geq$$

$$\min \{ \text{depth } M / I^2 M, \text{depth } M / IM - 1 \}$$

$$\text{.depth } M / IM = \dim M / IM = \dim M$$

از (۳) داریم  $\text{depth } IM = \dim M$  و لذا

$$\text{.depth } IM / aIM = \dim M - 1$$

از (۴) نیز نتیجه می‌شود

$$\text{depth } M / aIM = \dim M - 1 = \text{depth } M / IM - 1$$

و بنابراین (ب) ثابت می‌شود.

برای ایدال‌های با انحراف تحلیلی ۱ که دارای عدد

تقلیل کوچکتر یا مساوی ۱ هستند نتیجه‌ی زیر را داریم

به طوری که محاسباتی را که برادمن [۴] برای

ایدال‌های تقریباً همبرش بیان کرده است بازایی

می‌کند.

**گزاره ۲.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی

کوهن - مکالی،  $M$  یک  $-A$  مدول تصویری و  $I$

ایدالی از  $A$  باشد که  $ad_M(I) = 1$  و

$$r(I, M) \leq 1 \text{ همچنین فرض کنید } I \text{ نوعاً همبرش}$$

کامل نسبت به  $M$  باشد. در این صورت

$$B(I, M) =$$

$$\min \{ \text{depth } M / IM, \dim M / IM - 1 \}.$$

**برهان.** نشان خواهیم داد اگر

$$\text{depth } M / IM < \dim M / IM$$

هر  $n \geq 2$

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM$$

$$\text{و } \text{depth } M / IM = \dim M / IM$$

برای آن‌گاه برای هر  $n \geq 2$

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM - 1$$

دو گزاره را با استقراء روی  $h := ht_M(I)$  ثابت خواهیم

کرد.

فرض کنیم  $h = 0$ . در این صورت برای هر  $n \geq 1$  و

به ازای  $a \notin Z_A(IM)$  ای مشخص داریم

$$I^{n+1} M = aI^n M$$

$$\text{و } \text{depth } M / IM < \dim M / IM$$

کارگیری لم ۷ با استفاده از استقراء روی  $n$  برای هر

$n \geq 1$  نتیجه می‌شود که

$$\text{depth } M / I^{n+1} M =$$

علاوه بر این،  
نسبت به  $M$  باشد به طوری که  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $I$   $G_M(I)$  - رشته منظم است.

از رشته دقیق (۲) برای هر  $n \geq 3$ ، با استقراء روی  $n$  و  $h$  و بنابر لم ۶ داریم:

$$\begin{aligned} & \text{depth } M / I^n M \geq \\ \min \{ & \text{depth } M / I^{n-1} M, \text{depth } A_1 M / I_1^n M \} \\ & \geq \min \{ \text{depth } M / I^2 M, \text{depth } M / IM - 1, \\ & \text{depth } A_1 M / I_1^2 M \} \\ & \geq \min \{ \text{depth } M / I^2 M, \text{depth } M / IM - 1 \}. \end{aligned}$$

برای (آ) ابتدا فرض می‌کنیم

در این صورت، از نامساوی نتیجه می‌شود که  $\text{depth } M / I^2 M < \text{depth } M / IM$  و لذا  $\text{depth } M / I^n M \geq \text{depth } M / I^2 M$  و  $B(I, M) = \text{depth } M / I^2 M$  از طرف دیگر، اگر  $\text{depth } M / IM < \text{depth } M / I^2 M$ ، آن‌گاه بنابر لم ۶

$$\text{depth } A_h M / I_h^2 M = \text{depth } M / IM - 1$$

و با به‌کارگیری نتایج به دست آمده برای  $h = 0$  نتیجه می‌شود که

$$\text{depth } A_h M / I_h^3 M = \text{depth } M / IM - 1$$

با استفاده از رشته دقیق زیر

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow & A_i M / I_i^2 M \rightarrow A_i M / I_i^3 M \\ \rightarrow & A_{i+1} M / I_{i+1}^3 M \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (۵)$$

به ازای هر  $i = 0, \dots, h-1$ ، به همراه این واقعیت

که در این حالت برای هر  $i = 0, \dots, h-1$  داریم

$$\text{depth } A_i M / I_i^2 M = \text{depth } M / IM - 1$$

و همچنین با در نظر گرفتن این که

$$\begin{aligned} \text{depth } A_h M / I_h^3 M &= \text{depth } A_h M \\ &= \text{depth } M / IM \end{aligned}$$

داریم

$$\text{depth } M / I^3 M = \text{depth } M / IM - 1$$

در نتیجه  $B(I, M) = \text{depth } M / IM - 1$

(آ) تساوی برقرار است هرگاه  $ht_M(I) > 0$  و

$$\text{depth } M / I^2 M \neq \text{depth } M / IM$$

(ب)

$$B(I, M) =$$

$$\min \{ \text{dim } M / IM - 1, \text{depth } M / IM \}$$

و  $\text{depth } M / IM = \text{depth } M / I^2 M$  هرگاه  $h = 0$

**برهان.** ابتدا فرض می‌کنیم  $h = 0$ . در این صورت،

وجود دارد  $a \notin Z_A(I^2 M)$  به طوری که برای هر

$$I^{n+1} M = a I^n M, \quad n \geq 2$$

به کارگیری پی در پی لم ۷ برای هر  $n \geq 2$ ، اگر

$$\text{depth } M / IM < \text{dim } M / IM$$

آن‌گاه داریم  $\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM$

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM$$

و برای هر  $n \geq 3$  داریم

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / IM - 1$$

بنابراین، در هر حالت به این نتیجه می‌رسیم که

$$B(I, M) =$$

$$\min \{ \text{dim } M / IM - 1, \text{depth } M / IM \}$$

و (ب) ثابت می‌شود.

حال نامساوی بیان شده را ثابت خواهیم کرد. ابتدا حالت

$h = 0$  را در نظر می‌گیریم. از (ب) می‌توانیم فرض

کنیم  $\text{depth } M / I^2 M \neq \text{depth } M / IM$ . اگر

$$\text{depth } M / I^2 M < \text{depth } M / IM$$

از لم ۷ نتیجه می‌شود که برای  $n \geq 3$

$$\text{depth } M / I^n M = \text{depth } M / I^2 M$$

نهائماً، اگر  $\text{depth } M / IM < \text{depth } M / I^2 M$ ، با

استفاده‌ی مجدد از لم ۷ می‌توانیم نتیجه بگیریم که به

ازای هر  $n \geq 3$

$$\text{depth } M / I^n M \geq \text{depth } M / IM$$

حال فرض کنیم  $h > 0$  و  $J = (a_1, \dots, a_h, a_{h+1})$

همانند آن‌چه که در لم ۳ آمده است، تقلیل مینیمالی از

**ایدال‌های هم‌مضرب**

این بخش را با محاسبه عمق جبر ریس و مدول مدرج وابسته از ایدال هم‌مضرب با عدد تقلیل ۱ آغاز می‌کنیم. به ویژه، برای ویژگی کوهن - مکالی [۲۷، گزاره ۴.۷] را بازیابی می‌کنیم.

**قضیه ۲.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I \subseteq A$  یک ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد به طوری که  $r(I, M) \leq 1$  در این صورت (ا)  $depth G_M(I) = depth M / IM + ht_M(I)$  (ب) اگر  $ht_M(I) \geq 2$ ، آن‌گاه

$$depth R_M(I) = depth M / IM + ht_M(I) + 1$$

**برهان.** برای حالتی که  $ht_M(I) = 0$ ، اثبات را با استقراء انجام می‌دهیم. قرار دهید  $h := ht_M(I)$ . فرض کنیم  $h = 0$ . در این صورت  $I^2M = 0$  و لذا  $G_M(I) = M / IM \oplus IM$  بنابراین

$$depth G_M(I) = \min \{ depth M / IM, depth IM \} = depth M / IM$$

حال فرض کنیم  $h > 0$  و  $J = (a_1, \dots, a_h) \subseteq I$  یک تقلیل مینمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد به طوری که  $I^2M = JIM$  در این صورت،  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $G_M(I)$ -رشته منظم است و

$$G_M(I) / (a_1^*, \dots, a_h^*) \cong G_{A_h M}(I_h)$$

$$I_h = I / (a_1, \dots, a_h) \text{ و } A_h = A / (a_1, \dots, a_h)$$

بنابراین

$$depth G_M(I) = depth G_{A_h M}(I_h) + h$$

$I_h$  یک ایدال هم‌مضرب نسبت به  $M$  است با  $ht_M(I_h) = 0$  و  $r(I_h, M) \leq 1$  پس نتیجه می‌گیریم که

$$depth G_{A_h M}(I_h) = depth A_h M / I_h M = depth M / IM$$

و بنابراین داریم

$$depth G_M(I) = depth M / IM + ht_M(I).$$

برای اثبات قسمت (ب) کافی است لم ۴ را به کار بگیریم.

**نتیجه ۱.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I \subseteq A$  ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد که  $r(I, M) \leq 1$  در این صورت

$$depth G_M(I) = B(I, M) + l_M(I)$$

**برهان.** کافی است قضیه ۲ و گزاره ۱ را به کار بگیریم.

**تذکر ۵.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I \subseteq A$  ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد که  $r(I, M) = 1$ . همچنین فرض کنید  $ht_M(I) = 0$  در این صورت به ازای هر  $n > 1$ ،  $I^n M = 0$  و

$$depth R_M(I) =$$

$$\min \{ depth M / IM + 1, \dim M \}.$$

علاوه بر این، گزاره‌های زیر به طور بدیهی هم‌ارزند:

$$(أ) R_M(I) \text{ کوهن - مکالی است.}$$

$$(ب) depth G_M(I) \geq \dim M - 1$$

$$(ج) depth M / IM \geq \dim M - 1$$

در ادامه حالتی را فرض می‌کنیم که در آن ایدال‌های هم‌مضرب دارای عدد تقلیل ۲ هستند.

**قضیه ۳.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  ایدال هم‌مضربی از  $A$  نسبت به  $M$  باشد. فرض کنید  $r(I, M) \leq 2$  و  $I$  به طور صحیح بسته یا نامیخته نسبت به  $M$  باشد به طوری که  $r_h(I, M) \leq 1$  و

$$h = ht_M(I) \text{ در این صورت}$$

$$\min \{ depth M / IM - 1, depth M / I^2 M \}$$

$$+ ht_M(I) \leq depth G_M(I) \leq$$

$$\min \{ depth M / IM, depth M / I^2 M \}$$

$$+ ht_M(I)$$

کارگیری نتایج به دست آمده برای ایدال‌های با ارتفاع صفر علاوه بر این،  
 داریم: اگر  $ht_M(I) = 0$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} depth G_M(I) &= \\ \min \{ depth M / IM, depth A_h M / I_h^2 M \} + h & \\ \text{در آخر، بنابر لم ۶ داریم که اگر} & \\ depth M / IM \neq depth M / I^2 M & \text{، آن‌گاه} \\ \min \{ depth M / IM, depth A_h M / I_h^2 M \} & \\ = \min \{ depth M / IM - 1, depth M / I^2 M \}. & \\ \text{اگر } depth M / IM = depth M / I^2 M & \text{، آن‌گاه} \\ \text{داریم:} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \{ depth M / IM, depth M / I_h^2 M \} & \\ \geq depth M / IM - 1 & \\ \text{بنابراین، (ب) ثابت می‌شود و در هر حالتی نامساوی‌های} & \\ \text{قضیه برقرار می‌باشند.} & \end{aligned}$$

**نتیجه ۲.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  یک ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد. فرض کنید  $r(I, M) \leq 2$  و  $r_h(I, M) \leq 1$  باشد به طوری که  $ht_M(I) = h$  در این صورت

$$\begin{aligned} B(I, M) + l_M(I) - 1 & \\ \leq depth G_M(I) & \\ \leq B(I, M) + l_M(I) + 1. & \end{aligned}$$

علاوه بر این،

$$\begin{aligned} depth G_M(I) = B(I, M) + l_M(I) & \text{ هرگاه} \\ ht_M(I) = 0 \text{ یا این که } ht_M(I) > 0 & \\ \text{.} depth M / IM \neq depth M / I^2 M & \end{aligned}$$

**برهان.** به طور مستقیم از قضیه ۳ و گزاره ۱ نتیجه می‌شود. با به کارگیری مجدد لم ۴ برای جبر ریس داریم:

**قضیه ۴.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$ -مدول کوهن - مکالی و  $I$  یک ایدال هم‌مضرب  $A$  نسبت به  $M$  باشد. فرض کنید

$$\begin{aligned} depth G_M(I) &= \\ \min \{ depth M / IM, depth M / I^2 M \} & \\ \text{و } ht_M(I) > 0 & \text{ (ب) اگر} \\ depth M / I^2 M \neq depth M / IM & \text{، آن‌گاه} \\ depth G_M(I) &= \\ \min \{ depth M / IM - 1, depth M / I^2 M \} & \\ + ht_M(I). & \end{aligned}$$

**برهان.** فرض کنید  $h = 0$ . در این صورت  $I^3 M = 0$  بنابراین

$$G_M(I) = M / IM \oplus IM / I^2 M \oplus I^2 M$$

$$\min \{ depth M / IM, depth G_M(I) = depth IM / I^2 M, depth I^2 M \}.$$

با به کارگیری لم - عمق برای رشته‌های دقیق زیر

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow IM \rightarrow M \rightarrow M / IM \rightarrow 0, & \\ 0 \rightarrow I^2 M \rightarrow M \rightarrow M / I^2 M \rightarrow 0, & \\ 0 \rightarrow IM / I^2 M \rightarrow M / I^2 M \rightarrow M / IM \rightarrow 0, & \\ 0 \rightarrow I^2 M \rightarrow IM \rightarrow IM / I^2 M \rightarrow 0, & \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} depth G_M(I) &= \\ \min \{ depth M / IM, depth M / I^2 M \}. & \end{aligned}$$

حال فرض کنیم  $h > 0$ . فرض می‌کنیم  $J = (a_1, \dots, a_h)$  همان‌طور که در لم ۲ آمده است، یک تقلیل مینیمال از  $I$  نسبت به  $M$  باشد. قرار دهید  $A_h := A / J$  و  $I_h := I / J$ . چون  $a_1^*, \dots, a_h^*$  یک  $G_M(I)$  رشته منظم است، پس  $G_M(I) / (a_1^*, \dots, a_h^*) \cong G_{A_h M}(I_h)$  و لذا  $depth G_M(I) = depth G_{A_h M}(I_h) + h$

علاوه بر این،  $A_h$  یک حلقه کوهن - مکالی و  $I_h$  یک ایدال هم‌مضرب نسبت به  $M$  است با  $r(I_h, M) \leq 2$  و  $ht_M(I_h) = 0$ ، بنابراین، با به

علاوه بر این، اگر  
 $depth M / IM \neq depth M / I^2M$   
 و  $ht_M(I) > 0$ ، آن‌گاه  
 $depth G_M(I) = B(I, M) + l_M(I)$ .  
 همچنین برای جبر ریس با استفاده از لم ۴ نتیجه‌ی زیر  
 را برای محاسبه عمق آن به دست می‌آوریم:

**قضیه ۵.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی  
 کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$  - مدول کوهن - مکالی  
 و  $I$  ایدآل  $A$  باشد با  $ad_M(I) = 1$ ،  
 $r(I, M) \leq 2$  و  $r_h(I, M) \leq 1$ . همچنین فرض  
 کنید  $I$  ناآمیخته نسبت به  $M$  باشد و  
 $h = ht_M(I) \geq 2$ . در این صورت

$$\begin{aligned} & \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M \} \\ & + ht_M(I) + 1 \\ & \leq depth R_M(I) \\ & \leq \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M \} \\ & + ht_M(I) + 2. \end{aligned}$$

علاوه بر این، اگر

$$\begin{aligned} & depth M / I^2M \neq depth M / IM \text{، آن‌گاه} \\ & depth R_M(I) = \\ & \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M + 1 \} \\ & + ht_M(I). \end{aligned}$$

### تعمیم نامساوی بورخ

فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی و  $I$  ایدآلی از  
 $A$  باشد. نامساوی زیر به نامساوی بورخ معروف است:  
 $l(I) + \inf \{ depth A / I^n : n \geq 1 \} \leq \dim A$   
 تساوی زمانی برقرار است که  $G_A(I)$  کوهن - مکالی  
 باشد. این مطلب توسط ایزنباد و هونیکه ثابت شده  
 است [۹، گزاره ۳.۳]. در این بخش می‌خواهیم نامساوی  
 را در حالت مدولی ثابت کنیم و نشان می‌دهیم تساوی  
 زمانی برقرار است که  $G_M(I)$  کوهن - مکالی باشد.  
 برای اثبات نامساوی بورخ برای مدول‌ها به لم زیر نیاز

$r(I, M) \leq 2$  باشد و  $I$  به طور صحیح بسته یا  
 ناآمیخته نسبت به  $M$  باشد با  $r_h(I, M) \leq 1$  که در  
 آن  $h = ht_M(I) \geq 3$ . در این صورت

$$\begin{aligned} & \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M \} \\ & + ht_M(I) \\ & \leq depth R_M(I) \\ & \leq \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M \} \\ & + ht_M(I) + 1. \end{aligned}$$

علاوه بر این، اگر

$$\begin{aligned} & depth M / I^2M \neq depth M / IM \text{، آن‌گاه} \\ & depth R_M(I) = \\ & \min \{ depth M / IM, depth M / I^2M + 1 \} \\ & + ht_M(I). \end{aligned}$$

**مثال ۳.** فرض کنید  $I = (xy, t_1, \dots, t_n)$  ایدآلی باشد  
 که در مثال ۱ داده شده است. به آسانی می‌توان دید که  
 $depth M / IM = \dim M / IM = 1$   
 و  $depth M / I^2M = 0$ . بنابراین در این حالت داریم  
 $depth G_M(I) = B(I, M) + l_M(I) = n$   
 $(< \dim G_M(I) = n + 1)$   
 و  $B(I, M) = depth M / I^2M = 0$ .

علاوه بر این،

$$\begin{aligned} & depth R_M(I) = n + 1 (< \dim R_M(I) = n + 2) \\ & \text{بار دیگر با به کارگیری محاسبات مربوط به عدد بورخ که} \\ & \text{در گزاره ۳ آمده است، داریم:} \end{aligned}$$

**نتیجه ۳.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی  
 کوهن - مکالی،  $M$  یک  $A$  - مدول تصویری و  $I$   
 یک ایدآل  $A$  باشد با  $ad_M(I) = 1$ ،  
 $r(I, M) \leq 2$  و  $r_h(I, M) \leq 1$  که  
 $h = ht_M(I)$ . همچنین فرض کنید  $I$  ناآمیخته  
 نسبت به  $M$  باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} & B(I, M) + l_M(I) - 1 \leq \\ & depth G_M(I) \leq B(I, M) + l_M(I) + 1. \end{aligned}$$



**لم ۹.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$ -مدول و  $I$  یک ایدآل در  $A$  باشد. در این صورت

$$l_M(I) + B(I, M) \leq \dim M.$$

**برهان.**

$$\begin{aligned} l_M(I) &= \dim G_M(I) / mG_M(I) \\ &\leq \dim G_M(I) - \text{grade}(mG, G_M(I)) \end{aligned}$$

(بنابر لم ۸)

سرانجام نتیجه‌ی ایزنباذ و هونیکه [۹، گزاره ۳.۳] را برای مدول‌ها تعمیم می‌دهیم. اما قبل از آن به لم زیر نیاز داریم:

**لم ۱۰.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A$ -مدول و  $I$  یک ایدآل در  $A$  باشد. اگر  $x \in m \setminus I$  و  $x^*$  یک عضو  $G_M(I)$ -منظم باشد، در این صورت

$$\begin{aligned} l_M((I, x)/(x)) &= l_M(I) \\ \overline{M} &= M/xM \end{aligned}$$

که در آن  $\overline{M} = M/xM$

**برهان.** قرار دهید  $T := A/(x)$  و

$$\begin{aligned} K &:= (I, x)/(x) \\ \text{فرض کنید } R_M(I) &= \bigoplus_{n \geq 0} I^n M t^n \text{ و } \\ T_M(K) &= \bigoplus_{n \geq 0} K^n \overline{M} t^n \end{aligned}$$

ابتدا نشان می‌دهیم که  $T_M(K) = R_M(I)/(x)R_M(I)$

توجه داریم که

$$K^n \overline{M} = \frac{(I^n, x)}{(x)} \overline{M} =$$

$$\frac{I^n M + xM}{xM} \cong \frac{I^n M}{xM \cap I^n M}$$

چون  $x^*$ ،  $G_M(I)$ -منظم است، پس به ازای هر  $n$  داریم  $xM \cap I^n M = xI^n M$ . بنابراین

$$\frac{I^n M}{xM \cap I^n M} \cong \frac{I^n M}{xI^n M}.$$

و لذا یکریختی‌های زیر را به دست می‌آوریم:

داریم. اثبات مشابه آن چیزی است که در [۲۰، لم ۲.۱] آمده است و از نمادهای به کار رفته در آن‌جا استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $G = G_A(I)$  و

$$B(I, M) = \inf \{ \text{depth } M / I^n M : n \geq 1 \}$$

**لم ۸.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی و  $M$  یک  $A$ -مدول باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \text{grade}(mG, G_M(I)) &= \\ \inf \{ \text{depth } M / I^n M : n \geq 1 \}. \end{aligned}$$

**برهان.** فرض کنید  $r = \text{grade}(mG, G_M(I))$  و

$s = B(I, M)$ . حکم را با استقراء روی  $r$  ثابت می‌کنیم. فرض کنیم  $r = 0$ . در این صورت  $mG \subseteq P \in \text{Ass } G_M(I)$  وجود دارد که بنابراین به ازای  $f \in G_M(I)$  همگن داریم  $P = (0 :_G f)$ . حال فرض کنید  $n = \deg(f)$ . چون  $mf = 0$  پس داریم  $m \in \text{Ass}_R G_M(I)_n \subseteq \text{Ass } M / I^{n+1} M$ . بنابراین  $\text{depth } M / I^n M = 0$

حال فرض می‌کنیم  $r > 0$ . همچنین فرض می‌کنیم  $a \in m$  به‌گونه‌ای باشد که تصویر آن در  $G_R(I)$ ،  $G_M(I)$ -منظم است. در این صورت به سادگی نتیجه

می‌شود که  $a$  روی  $M / I^n M$  به ازای هر  $n \geq 1$  منظم است. لذا نتیجه می‌گیریم که  $s > 0$ . قرار می‌دهیم

$$\overline{S} = A/aA, \quad n = mG, \quad \overline{N} = M/aM.$$

با استفاده از قضیه والابراگا والا [۲۸،

قضیه ۲.۶] داریم  $G_N(\overline{I}) = G_M(I) / aG_M(I)$ .

$$\text{grade}(nG_S(\overline{I}), G_N(\overline{I})) = r - 1$$

بنابر فرض استقراء داریم

$$\inf \{ \text{depth } N / I^n N : n \geq 1 \} = r - 1$$

چون  $a$ ،  $M / I^n M$ -منظم است، به ازای هر  $n \geq 1$  داریم

$$\text{depth}(M / I^n M) = \text{depth}(N / I^n N) + 1$$

و در نتیجه حکم ثابت می‌شود.

حال نامساوی بورخ را در حالت مدولی ثابت می‌کنیم.

است [۲]، می‌توان عضو  $A -$  منظم  $m \in x$  را انتخاب کرد به طوری که به ازای هر  $n \geq 1$ ، روی  $M / I^n M$  نیز منظم است. از این نتیجه می‌شود که  $x^* \in A / I - G_M(I)$  منظم است. بنابراین داریم:

$$G_M(I) / (x^*)G_M(I) = G_{\bar{M}}(\bar{I})$$

که در آن  $\bar{I} = IA / (x)$  و  $\bar{M} = M / (x)M$ . چون  $G_M(I)$  کوهن - مکالی است و  $x^*$  کوهن - مکالی است، پس  $G_{\bar{M}}(\bar{I})$  کوهن - مکالی است.

بنابراین  $\dim M = \dim \bar{M} + 1$ . از طرفی از لم ۱۰ نتیجه می‌شود که  $l_{\bar{M}}(\bar{I}) = l_M(I)$ . چون  $x$  یک رشته منظم روی  $M / I^n M$  است، پس داریم

$$depth \bar{M} / \bar{I}^n \bar{M} = depth M / I^n M - 1$$

بنابراین

$$\inf \{ depth \bar{M} / \bar{I}^n \bar{M} : n \geq 1 \} = s - 1$$

حکم با استفاده از فرض استقراء ثابت می‌شود.

$$T_{\bar{M}}(K) = \bigoplus_{n \geq 0} K^n \bar{M} t^n \cong$$

$$\bigoplus_{n \geq 0} \frac{I^n M}{x I^n M} t^n \cong R_M(I) / (x)R_M(I).$$

حال از این یکریختی نتیجه می‌شود که

$$\frac{R_M(I)}{mR_M(I)} \cong \frac{T_{\bar{M}}(K)}{m / x T_{\bar{M}}(K)}$$

بنابراین  $l_{\bar{M}}((I, x) / (x)) = l_M(I)$  و حکم ثابت می‌شود.

**قضیه ۶.** فرض کنید  $(A, m)$  یک حلقه موضعی،  $M$  یک  $A -$  مدول و  $I$  یک ایدئال در  $A$  باشد. فرض کنید  $G_M(I)$  کوهن - مکالی باشد. در این صورت

$$l_M(I) + B(I, M) = \dim M.$$

**برهان.** فرض کنید  $s = B(I, M)$ . حکم را با

استقراء روی  $s$  ثابت می‌کنیم. نخست فرض می‌کنیم  $s = 0$ . قرار می‌دهیم  $J = mG_A(I)$ . بنابر تعریف

۲ داریم  $l_M(I) = \dim(G_M(I) / JG_M(I))$ .

ابتدا نشان می‌دهیم که  $grade(J, G_M(I)) = 0$ .

بنابر فرض خلف گیریم  $grade(J, G_M(I)) > 0$ .

در این صورت می‌توان عضو  $x \in m \setminus I$  را انتخاب کرد

به طوری که  $x^* \in A / I$  یک مقسوم علیه ناصفر روی

$G_M(I)$  است. از این‌جا نتیجه می‌شود که  $x$  به ازای

هر  $n \geq 1$ ، یک عضو مقسوم علیه ناصفر روی

$M / I^n M$  است. اما این با فرض  $s = 0$  در تناقض

است. بنابراین  $grade(J, G_M(I)) = 0$ . حال از

آن‌جا که  $G_M(I)$  کوهن - مکالی است، نتیجه

می‌گیریم که:

$$\dim(G_M(I) / JG_M(I)) =$$

$$\dim(G_M(I)) - grade(J, G_M(I))$$

$$= \dim(G_M(I)).$$

بنابراین  $l_M(I) = \dim M$  حال فرض می‌کنیم

$s > 0$ . چون  $\bigcup_{n \geq 1} Ass(M / I^n M)$  متناهی

- [13] Goto. S, Nakamura Y, Nishida K (1996). Cohen–Macaulay graded rings associated to ideals, Amer. J.
- [14] Herrmann. M, Ikeda. S, Orbanz U (1988). Equimultiplicity and Blowing Up, Springer-Verlag, Berlin.
- [15] Herrmann. M, Ribbe. J, Zarzuela. S (1993). On Rees and form rings of almost complete intersections.
- [16] Huckaba. S, Huneke. C (1992). Powers of ideals having small analytic deviation, Amer. J.
- [17] Huckaba. S, Huneke. C (1993). Rees algebras of ideals having small analytic deviation, Trans. Amer.
- [18] Huckaba. C, Marley. T (1994). Depth formulas for certain graded rings associated to an ideal, Nagoya.
- [19] Johnson. M, Ulrich. B (1996). Artin-Nagata properties and Cohen-Macaulay associated graded rings, Compositio Math.
- [20] Kinoshita. Y, Nishida. K, Yamanaka. Y, Yoneda. A (2006). On Burch's inequality and a reduction system of a filtration, Proc. Amer.
- [21] Korb. T (1995). On a-invariants, filter regularity and the Cohen-Macaulayness of graded algebras, Thesis, University of Cologne.
- [22] Northcott. D.G. Rees. D (1954). Reduction of ideals in local rings, Proc. Cambridge Philos.
- [23] Polini. C, Ulrich. B (1998). Linkage and reduction numbers.
- [24] Puthenpurakal. T (2003). Hilbert-coefficients of a Cohen-Macaulay module, J.
- [1] Aberbach. I.M (1995). Local reduction numbers and Cohen–Macaulayness of associated graded rings, J. Algebra .
- [2] Brodmann. M (1979). Asymptotic stability of  $\text{Ass}(M / I^n M)$ , Proc. Math.
- [3] Brodmann. M (1979). The asymptotic nature of the analytic spread, Math. Proc. Cambridge Philos.
- [4] Brodmann. M (1982). Rees rings and form rings of almost complete intersections, Nagoya Math.
- [5] Burch. L (1972). Codimension and analytic spread, Proc. Cambridge Philos.
- [6] Corso. A, Polini. C (1995). Links of prime ideals and their Rees algebras, J.
- [7] Corso. A, Polini. C (1997). Reduction numbers of links of irreducible varieties, J. Pure Appl.
- [8] Corso. A, Polini. C, Vasconcelos. W.V (1994). Links of prime ideals, Math. Proc. Cambridge Philos.
- [9] Eisenbud. D, Huneke. C (1983). Cohen–Macaulay Rees algebras and their specialization, J.
- [10] Elias. J (1996). The regularity index and the depth of the tangent cone of curve singularities, Japan J.
- [11] Goto. S, Huckaba. S (1994). On graded rings associated to analytic deviation one ideals, Amer. J.
- [12] Goto. S, Nakamura. Y (1994). On the Gorensteinness of graded rings associated to ideals of analytic deviation one, Contemp.

[25] Schenzel. P (1982). A note on almost complete intersections, in: Seminar Eisenbud D., Singh B., Vogel W., Teubner-Texte zur Mathematik 48(2).

[26] Sharp. R.Y, Tiras. Y, Yassi. M (1990). Integral Closure of ideals relative to local cohomology modules over quasi-unmixed local rings, J.

[27] Trung. N.V, Ikeda. S (1989). When is the Rees algebra Cohen–Macaulay?

[28] Valabrega. P, Valla. G (1978). Form rings and regular sequences.

[29] Vasconcelos. W.V (1994). in: Arithmetic of Blowup Algebras, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Vol. 195, Cambridge University Press, Cambridge.

[30] Zarzuela. S (1995). On the depth of blow up algebras of ideals with analytic deviation one, Proc. Amer.