دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مکان‌یابی کارا با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها

مهناز میربلوکی *[1]، مریم جولایی [2]

[1] استادیار و عضو هیات علمی گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره)، دانشگاه آزد اسلامی،شهر ری، تهران، ایران (نویسنده مسئول).
[2] مربی گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره)، دانشگاه آزد اسلامی،شهر ری، تهران، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۲/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۵/۰۳

چکیده

تاکنون بسیاری از انواع مدل‌های مکان‌یابی به منظور پیدا کردن الگوهای فضایی مطلوب با توجه به معیارهای مکانی مختلف از جمله، هزینه، پوشش و در دسترس بودن توسعه یافته‌اند. تمرکز اولیه این مدل‌ها بر دسترسی مکانی ارائه دهندگان خدمات و برآورد تقاضاها است و برخی از این مدل‌ها در چارچوب مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه می‌باشند. پس از پیدایش علم تحلیل پوششی داده‌ها، برخی پژوهشگران میزان کارایی تأسیسات منتخب را به‌عنوان یکی از توابع هدف در مسائل مکان‌یابی در نظر گرفته و به ارائه راهکارهایی پرداخته‌اند. در این مقاله به ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی وزن مشترک و مدل مکان‌یابی می‌پردازیم. مدل حاصل، بر خلاف مدل‌های سابق تنها با یک بار اجرا مراکز منتخب کارا از بین چند مرکز بالقوه مشخص می‌گردند. مدل پیشنهادی توسط مثالی عددی بررسی‌شده است و نتایج نشان دهنده تضاد بین توابع مکان‌یابی و کارایی است.

واژه‌های کلیدی: مکان‌یابی، تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، برنامه‌ریزی چندهدفه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.mirbolouki@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

کارایی، ابزار مناسبی برای تعیین عملکرد واحدها است که عبارت از خوب کار کردن، استفاده بهینه از منابع و ماکزیمم سود را کسب نمودن است. شاخص‌های موثر بر کارایی را می‌توان به دو دسته ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده تقسیم کرد. به منظور ارزیابی کارایی نسبی واحدها روش‌های زیادی ارائه شده است که این روش‌ها مبتنی بر تخمین تابعی به نام تابع تولید است. این تابع، تابعی است که ماکزیمم خروجی را به ازای بردارهای ورودی مختلف نشان می‌دهد. در سال ۱۹۵۷ فارل[1] برای نخستین بار روش‌های نا پارامتری را ارائه کرد[۳]. پس از آن در سال ۱۹۷۸ تحلیل اولیه فارل توسط چارنز[2] و همکاران تعمیم داده شد[۱] و این کار به‌عنوان شروعی بر تحلیل پوششی داده‌ها مطرح شد.

تاکنون بسیاری از انواع مدل‌های مکان‌یابی به‌منظور پیدا کردن الگوهای فضایی مطلوب با توجه به معیارهای مکانی مختلف از جمله، هزینه، پوشش و در دسترس بودن توسعه یافته‌اند. برخی از این مدل‌ها در چارچوب مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه مدل‌سازی شده‌اند که در این میان گاهی اهداف با یکدیگر در تناقض می‌باشد. کلیمبرگ و رتیک[3][۷] (K-R از این پس) مفهوم کارایی که در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تعریف شده است را به عنوان یکی دیگر از اهداف مدل‌سازی مکان‌یابی در جهت ارائه دیدگاه ارزیابی عملکرد تأسیسات در مکان‌های مختلف بالقوه گنجانیده شده است. در واقع به دلیل ترکیب مدل‌های مکان‌یابی و تحلیل پوششی داده‌ها است که عملکرد تأسیسات می‌تواند توسط برخی از ویژگی‌های مکانی، مانند بازارهای محلی کار، زیرساخت‌های موجود و سایر منابع لازم، خدمات رسانی و تمایز مردم محلی در میان دیگران تحت تاثیر قرار گیرد. در ادبیات موضوع، مطالعاتی در زمینه ترکیب مفهوم کارایی و مکان‌یابی وجود دارد. شروف[4] و همکاران[۱۱] با تعیین کارایی مناطق مختلف جغرافیایی، مکان‌های مناسب برای تأسیس مراکز خدمات درمانی طولانی مدت را تعیین نمودند. توماس[5] و همکاران[۱۲] دو روش جهت تعیین مکان تأسیسات زیان‌بخش براساس تحلیل پوششی داده‌ها ارائه نموده اند. در هر دو روش فرض شده است که تعداد pتا از تأسیسات از قبل باز می‌باشند. در روش اول ابتدا مدل مکان‌یابی برای شناسایی یک مجموعه بهینه از مکان های تأسیسات، حل شده سپس این مجموعه بهینه از تأسیسات به عنوان ورودی در یک مدل اصلاح شده DEAبکار رفته است. این مدل DEA بطور هم‌زمان مدل DEA را در یک LP برای p مکان بهینه حل می‌کند. اگر نمره کارایی DEA یک شود جواب بهین پیدا شده است در غیر این‌صورت مدل مکان‌یابی دوباره اجرا می‌شود. مکان‌های بهینه پیدا شده در جواب قبلی حذف می‌شوند. این روند تا جایی ادامه می‌یابد که همه نمرات DEA کارا شوند یا همه مکان‌های بالقوه جستجو شوند. اگر مسئله شامل m مکان بالقوه و p تأسیسات باز باشد، تکرار باید اجرا شود تا همه ترکیبات از نمرات DEA برابر یک شوند. روش دوم مدل DEA و مکان‌یابی را در یک LP تک هدفه ترکیب کرده وکارایی p سایت بالقوه باز را حداکثر می‌سازد. در این روش تعاملی میان مکان‌یابی و کارایی DEA وجود ندارد. ارتای[6] و همکاران[۲] هر دو معیار کمی و کیفی در ارزیابی مکانی تاسیسات را در نظر گرفته و معیارهایی که می‌بایست حداقل شوند را به‌عنوان ورودی و معیارهایی که می‌بایست حداکثر شوند را به‌عنوان خروجی‌های مسئله در مدل ارزیابی کارایی DEA لحاظ کردند. آنها برای ارزش‌دهی داده‌های کیفی مانند آنهایی که مربوط به کیفیت و انعطاف‌پذیری است از فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) استفاده کرده‌اند. محب علی‌زاده و همکاران[۸] مدل K-R را برای داده‌های فازی توسعه دادند. اما این مدل همچون مدل K-R دارای

[1] Farrell
[2] Charnes
[3] Klimberg and Ratick
[4] Shroff
[5] Thomas
[6] Ertay

ایراداتی است. از جمله این‌که تأسیساتی که در جواب بهینه انتخاب نمی‌شوند بر کارایی سایر تأسیسات تأثیرگذار می‌باشند. در این مقاله ضمن ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی وزن مشترک، ایرادات مدل K-R مرتفع می گردد.

سایر بخش‌های مقاله به این صورت می‌باشند که در بخش بعدی مباحث اولیه در مدل‌های مکان‌یابی و مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها شرح داده می‌شود. در بخش سوم مدل پیشنهادی ارائه شده و بخش چهارم شامل مثالی عددی جهت روشن شدن مدل پیشنهادی است. بخش پنجم نتیجه‌گیری است.

۲- مباحث اولیه

۲-۱- مدل‌های مکان‌یابی تأسیسات

تمرکز اولیه مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل مکان‌یابی تأسیسات، بر دسترسی مکانی ارائه دهندگان خدمات و برآورد تقاضاها است[۱۰و۹]. مسئله حمل و نقل کلاسیک، به حداقل‌سازی هزینه حمل و نقل میان مکان‌های عرضه و تقاضایی که مکان مشخصی دارند می‌پردازد[۴]. مسائل مکان‌یابی تأسیسات به دو دسته کلی با ظرفیت و بدون ظرفیت تقسیم می‌شوند. در مسائل بدون ظرفیت هدف انتخاب مکان‌های بهینه از میان تعدادی مکان بالقوه تأسیسات است به طوری‌که مجموع هزینه‌های حمل و نقل و هزینه‌های ثابت بازگشایی تأسیسات حداقل شود. در این مسائل فرض اولیه آن است که هر مکان بالقوه ظرفیتی نامحدود دارد. همچنین فرض می‌شود که هر متقاضی تقاضای خود را تنها از یک تأمین‌کننده دریافت نماید. در مسائل با ظرفیت، هر مکان بالقوه ظرفیتی محدود جهت تأمین متقاضیان دارد. بنابراین تقاضای هر متقاضی ممکن است توسط بیش از یک تأمین‌کننده برآورده گردد. در این مقاله مدل با ظرفیت محدود بیان و به عنوان چارچوب مدل‌سازی مدل مکان‌یابی پیشنهادی استفاده می‌گردد. به منظور معرفی این مدل، متغیرهای تصمیم و پارامترهای زیر را تعریف می‌کنیم:

اندیس‌ها:

$k=1,\dots,K$: اندیس مکان‌های بالقوه جهت ساخت تأسیسات

$t=1,\dots,T$: اندیس تأسیسات

$l=1,\dots,L$: اندیس متقاضیان

$r=1,\dots,s$: اندیس نوع کالا

پارامترها:

c_{rkl}: هزینه حمل یک واحد کالای نوع rام از مکان بالقوه kام به متقاضی lام.

dem_{rl}: کل تقاضای کالای نوع rام متقاضی lام.

F_{tk}: هزینه ثابت بازگشایی و استفاده از تأسیسات tام در مکان kام.

Cap_{rk}: ظرفیت مکان بالقوه kام در تأمین کالای نوع rام.

متغیرهای تصمیم:

x_{kl}: یک است اگر مکان بالقوه kام به متقاضی lام خدمات‌رسانی کند، در غیر این‌صورت صفر است.

z_{tk}: یک است اگر تأسیسات tام در مکان kام ساخته شود، در غیر این‌صورت صفر است.

y_k: یک است اگر تأسیساتی در مکان بالقوه kام تأسیس شود، در غیر این‌صورت صفر است.

b_{rkl}: مقدار کالای نوع rام حمل شده از مکان بالقوه kام به متقاضی lام.

با توجه به تعاریف فوق مدل مکان‌یابی تأسیسات با ظرفیت محدود به‌صورت مدل[۱] است. این مدل با تغییراتی از مدل موجود در مرجع[۷] به دست آمده است.

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{r=1}^{s} C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} F_{tk} z_{tk} & & (1.1) \\
s.t. & \sum_{k=1}^{K} x_{kl} \ge 1, & \forall l, & (2.1) \\
& x_{kl} \le y_k, & \forall k,l, & (3.1) \\
& \sum_{k=1}^{K} b_{rkl} = dem_{rl}, & \forall l,r, & (4.1) \\
& b_{rkl} \le \min\{\mathrm{dem}_{rl}, \mathrm{Cap}_{rk}\}.\mathrm{y}_k, & \forall k,l,r, & (5.1) \\
& \sum_{t=1}^{T} z_{tk} = y_k, & \forall k, & (6.1) \\
& x_{kl} \le \sum_{t=1}^{T} z_{tk}, & \forall k,l, & (7.1) \\
& \sum_{k=1}^{K} z_{tk} = 1, & \forall t, & (8.1) \\
& z_{tk} \le \sum_{l=1}^{L} x_{kl}, & \forall t,k, & (9.1) \\
& \mathrm{y}_k, x_{kl}, z_{tk} \in \{0,1\}, & \forall k,l, & \\
& \mathrm{b}_{rkl} \ge 0, & \forall k,l,r. &
\end{array}
$$

در مدل[۱]، محدودیت[۱،۱] بیان‌گر تابع هدف و هزینه کل حمل و نقل و بازگشایی تأسیسات است. محدودیت[۲،۱] تضمین می‌کند که تقاضای هر متقاضی توسط حداقل یکی از تأسیسات تأمین گردد. محدودیت[۳،۱] خاطر نشان می‌سازد که تنها تأسیسات بازگشایی شده می‌توانند خدمات‌رسانی کنند. محدودیت[۴،۱] بر تأمین کل تقاضای هر متقاضی توسط تأمین‌کنندگان تأسیس‌شده دلالت دارد و محدودیت[۵،۱] تأیید می‌کند که میزان کالای حمل شده میان تأمین‌کننده و متقاضی حداکثر به اندازه مینیمم درخواست متقاضی و ظرفیت تأمین‌کننده است. محدودیت[۶،۱] خاطر نشان می سازد که آیا در مکان kام تأسیساتی بنا شده است یا خیر. محدودیت[۷،۱] نشان می‌دهد که اگر در یک مکان تأسیساتی بنا شود آنگاه می‌توان از این مکان به نقاط تقاضا کالا ارسال کرد، محدودیت[۸،۱] بیان می‌کند که هر تأسیسات دقیقا در یک مکان بنا شود و محدودیت[۹،۱] بیان‌گر لزوم ارسال کالا از مکان هایی است که در آنها تأسیساتی بنا شده است.

۲-۲- مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنید تعداد n واحد ($\mathrm{DMU}_j, j \in \{1,\dots,n\}$) با بردار ورودی $I_j = (\mathrm{I}_{1j},\dots,\mathrm{I}_{mj})$ و بردار خروجی $O_j = (\mathrm{O}_{1j},\dots,\mathrm{O}_{sj})$ موجود است. کارایی DMU_j با در نظر گرفتن بردار وزنی ورودی v و بردار وزنی خروجی u به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_j = \frac{u_1 O_{1j} + u_2 O_{2j} + \dots + u_s O_{sj}}{v_1 I_{1j} + v_2 I_{2j} + \dots + v_m I_{mj}}$$

برای محاسبه حداکثر میزان کارایی نسبی DMU_p ، چارنز و همکاران[۱] مدل خطی زیر را که به مدل مضربی CCR معروف است برای یافتن بردارهای وزنی u و v ارائه نمودند:

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{r=1}^{s} u_r O_{rp} & & \\
s.t. & \sum_{i=1}^{m} v_i I_{ip} = 1, & & (2) \\
& \sum_{r=1}^{s} u_r O_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i I_{ij} \le 0, & \forall j, & \\
& u_r \ge \varepsilon,\ v_i \ge \varepsilon, & \forall r,i. &
\end{array}
$$

که ε یک مقدار مثبت بی‌نهایت کوچک است که برای جلوگیری از صفر شدن وزن‌ها به مدل اضافه شده است. مقدار بهینه تابع هدف مدل[۲] کارایی DMU_p را به دست می‌آورد که عددی بین صفر و یک است. از آنجایی‌که در مدل[۲] هیچ محدودیت وزنی روی مضارب وجود ندارد بنابراین مجموعه‌ای از وزن‌های خروجی و ورودی بی‌کران به وجود می‌آورند. مسئله وزن مشترک به عنوان یک روش متعارف که در آن همه واحدهای تصمیم‌گیرنده با یک وزن واحد ارزیابی می‌شوند، معرفی شده است (مقاله[۶] را ببینید). لیو و پنگ[1][۵] مدل زیر را براساس روش برنامه‌ریزی آرمانی در تعیین مجموعه وزن‌های مشترک ارائه نمودند. روش برنامه‌ریزی آرمانی که روشی برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه است، تصمیم‌گیرنده به سطوح آرمان برای هرکدام از توابع هدف‌ها نیاز دارد. سپس برای رسیدن به جواب ترجیحی می‌بایست انحرافات از این سطوح آرمانی مینیموم شود.

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{j=1}^{n} d_j & \\
s.t. & \sum_{r=1}^{s} u_r O_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i I_{ij} + d_j = 0, & \forall \mathrm{j}, \\
& d_j \ge 0, & \forall \mathrm{j}, \\
& u_r \ge \varepsilon, & \forall r, \\
& v_i \ge \varepsilon, & \forall i.
\end{array}
$$

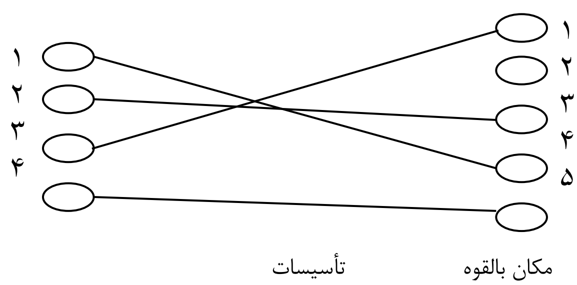
[1] Liu and Peng

در مدل[۳] متغیرهای d_j بیان‌گر متغیرهای انحراف از سطح کارایی مربوط به DMU_j یعنی عدد یک می‌باشند. با حل این مدل مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده به دست می‌آید. فرض کنید $\left(u^*,v^*,d^*\right)$ یک جواب بهینه مدل[۳] باشد، بنابراین نمره کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده DMU_j، از فرمول زیر حاصل می‌شوند:

$$\theta_j^* = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r^* O_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* I_{ij}} = 1 - \frac{d_j^*}{\sum_{i=1}^{m} v_i^* I_{ij}} \quad (۴)$$

۳- مدل پیشنهادی مکان‌یابی کارا

در این بخش هدف ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه با تلفیق مدل‌های مکان‌یابی و تحلیل پوششی داده‌ها است. در اینجا هر ارتباط بین تأسیسات tام و مکان بالقوه kام به‌عنوان یک واحد تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود، DMU_{tk}. بنابراین اگر T تأسیسات و K مکان بالقوه داشته باشیم بنابراین TK واحد تصمیم‌گیرنده ممکن داریم. برای روشن شدن موضوع شکل[۱] را با[۴] تأسیسات و ۵ مکان بالقوه در نظر بگیرید. با توجه به این شکل از مجموع ۲۰ واحد تصمیم‌گیرنده ممکن، ۴ واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_{1,4}, DMU_{2,3}, DMU_{3,1}, DMU_{4,5}$ در جواب نهایی انتخاب شده‌اند. همچنین از این شکل نتیجه می‌شود که در مکان دوم هیچ تأسیساتی بنا نشده است.



شکل ۱ – مثالی از واحدهای تصمیم‌گیرنده انتخابی

بنابراین با توجه به تعداد تأسیسات و مکان‌های ممکن، واحدهای تصمیم‌گیرنده tkام با بردار ورودی $I_{tk} = (\mathrm{I}_{1tk},....,\mathrm{I}_{mtk})$ و بردار خروجی $O_{tk} = (\mathrm{O}_{1tk},....,\mathrm{O}_{stk})$ را در نظر بگیرید. لازم به ذکر است که ورودی‌ها و خروجی‌های DMU_{tk} با توجه به مسئله مورد بررسی تعریف می‌شوند. ورودی‌ها و خروجی‌ها به ترتیب منابع استفاده شده و محصولات تولید شده توسط هر یک از تأسیسات در مکان‌های بالقوه است که برای روشن شدن این موضوع مثالی در بخش آتی ارائه‌شده است.

مدل K-R به تلفیق مدل مکان‌یابی با ظرفیت محدود و مدل مضربی CCR پرداخته‌اند. اما مدل آنها دارای این اشتباه اساسی است که واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که انتخاب نمی‌شوند یعنی در مجموعه امکان تولید قرار ندارند بر وزن واحدهای منتخب تأثیرگذار می‌باشند. در این مقاله ضمن رفع این ایراد از مدل برنامه‌ریزی آرمانی حسین‌زاده لطفی و همکاران[۵] به منظور بیشینه‌سازی کارایی مجموعه واحدهای منتخب استفاده‌شده است. مدل اولیه پیشنهادی ما، مدل[۵] است که یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی است.

$$
\begin{aligned}
&\min \ \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} d_{tk} && && (۱.۵)\\
&\min \ \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{r=1}^{s} C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} F_{tk} z_{tk} && && (۲.۵)\\
&s.t. \ \sum_{k=1}^{K} x_{kl} \ge 1, && \forall l, && (۳.۵)\\
&x_{kl} \le y_k, && \forall k,l, && (۴.۵)\\
&\sum_{k=1}^{K} b_{rkl} = dem_{rl}, && \forall l,r, && (۵.۵)\\
&b_{rkl} \le \min\{dem_{rl}, Cap_{rkl}\}.y_k, && \forall k,l,r, && (۶.۵)\\
&Z_{tk}\left(\sum_{r=1}^{s} u_r O_{rtk} - \sum_{i=1}^{m} v_i I_{itk} + d_{tk}\right) = 0, && \forall t,k, && (۷.۵)\\
&u_r \ge \varepsilon z_{tk}, && \forall t,k,r, && (۸.۵)\\
&v_i \ge \varepsilon z_{tk}, && \forall t,k,i, && (۹.۵)\\
&b_{rkl} \le x_{kl} M, && \forall k,l,r, && (۱۰.۵)\\
&\sum_{t=1}^{T} z_{tk} = y_k, && \forall k, && (۱۱.۵)\\
&x_{kl} \le \sum_{t=1}^{T} z_{tk}, && \forall k,l, && (۱۲.۵)\\
&\sum_{k=1}^{K} z_{tk} = 1, && \forall t, && (۱۳.۵)\\
&z_{tk} \le \sum_{l=1}^{L} x_{kl}, && \forall t,k, && (۱۴.۵)\\
&x_{kl}, y_k, z_{tk} \in \{0,1\}, && \forall k,l,t, &&\\
&b_{rkl} \ge 0, u_r \ge 0, v_i \ge 0, && \forall k,l,r,i. &&
\end{aligned}
$$

که در مدل[۵]، محدودیت (۵.۱)، (۵.۷)-(۵.۹) مشابه تابع هدف و محدودیت‌های مدل[۳] تعریف می‌شوند یعنی مجموع انحراف از سطح کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده انتخابی مینیمم می‌گردد. لازم به ذکر است که وجود z_{tk} در محدودیت‌های (۵.۷) - (۵.۹) به دلیل بی‌تأثیر شدن واحدهای غیرمنتخب در تعیین وزن‌های u_r و v_i است. همچنین در محدودیت[۵,۱۰]، M عددی به اندازه کافی بزرگ است و این محدودیت تضمین می‌کند که در صورتی‌که مکان بالقوه kام برای برآورد تقاضای متقاضی lام انتخاب نشود آنگاه میزان کالای حمل شده بین این تأمین‌کننده و متقاضی صفر است. سایر روابط مشابه تابع هدف و محدودیت‌های مدل[۱] می‌باشند.

مدل[۵] یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه غیرخطی است که با تغییر برخی متغیرهای آن قابل تبدیل به فرم خطی است. لذا برای رفع مشکل غیرخطی بودن محدودیت‌های مدل[۵]، متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{rtk} &= u_r z_{tk}\\
\bar{v}_{itk} &= v_i z_{tk}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

از تغییر متغیر فوق محدودیت‌های زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon z_{tk} &\le \bar{u}_{rtk} \le M z_{tk}\\
\varepsilon z_{tk} &\le \bar{v}_{itk} \le M z_{tk}
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

البته محدودیت‌های[۷] به همراه محدودیت‌های[۵,۱۰] را می‌توان به‌صورت زیر ساده‌سازی کرد:

(۸)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{s} \bar{u}_{rtk} + \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_{itk} + d_{tk} \le M z_{tk}\\
&\bar{u}_{rtk} \ge \varepsilon z_{tk}\\
&\bar{v}_{itk} \ge \varepsilon z_{tk}
\end{aligned}
$$

همچنین برای هر واحد انتخابی می‌بایست وزن‌های ورودی و خروجی یکسان باشند یعنی برای هر $k,q \in \{1,\dots,K\}$ و $t,p \in \{1,\dots,T\}$ اگر $z_{tk}=1,\ z_{pq}=1$ آنگاه $\bar{u}_{rtk}=\bar{u}_{rpq}$ و $\bar{v}_{itk}=\bar{v}_{ipq}$. برای رفع این مشکل محدودیت‌های زیر پیشنهاد می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{rtk} - \bar{u}_{rpq} &\le (2 - z_{tk} - z_{pq})M\\
\bar{v}_{itk} - \bar{v}_{ipq} &\le (2 - z_{tk} - z_{pq})M
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

محدودیت‌های فوق به ازای هر مقدار باینری برای متغیرهای z_{tk} و z_{pq} برقرار نمی‌باشند. با توجه به روابط فوق مدل[۵] را می‌توان به‌صورت مدل[۱۰] که مدلی چندهدفه و خطی آمیخته است بازنویسی کرد.

$$
\begin{aligned}
&\min \ \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K} d_{tk} && (۱۰)\\
&\min \ \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}\sum_{r=1}^{s} C_{rkl} b_{rkl} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T} F_{tk} z_{tk} &&\\
&s.t. \ \sum_{k=1}^{K} x_{kl} \ge 1, && \forall l,\\
&x_{kl} \le y_k, && \forall k,l,\\
&\sum_{k=1}^{K} b_{rkl} = dem_{rl}, && \forall l,r,\\
&b_{rkl} \le \min\{dem_{rl}, Cap_{rkl}\} y_k, && \forall k,l,\\
&\sum_{r=1}^{s} \bar{u}_{rtk} O_{rtk} - \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_{itk} I_{itk} + d_{tk} = 0, && \forall t,k,\\
&\bar{u}_{rtk} \ge \varepsilon z_{tk}, && \forall t,k,r,\\
&\bar{v}_{itk} \ge \varepsilon z_{tk}, && \forall t,k,i,\\
&\sum_{r=1}^{s} \bar{u}_{rtk} + \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_{itk} + d_{tk} \le M z_{tk}, && \forall t,k,\\
&b_{rkl} \le x_{kl} M, && \forall k,l,r,\\
&\sum_{t=1}^{T} z_{tk} = y_k, && \forall k,\\
&x_{kl} \le \sum_{t=1}^{T} z_{tk}, && \forall k,l,\\
&\sum_{k=1}^{K} z_{tk} = 1, && \forall t,\\
&z_{tk} \le \sum_{l=1}^{L} x_{kl}, && \forall t,k,\\
&\bar{u}_{rtk} - \bar{u}_{rpq} \le (2 - z_{tk} - z_{pq})M && \forall t,k,r,p \ne t, q \ne k,\\
&\bar{v}_{itk} - \bar{v}_{ipq} \le (2 - z_{tk} - z_{pq})M && \forall t,k,i,p \ne t, q \ne k,\\
&x_{kl}, y_k, z_{tk} \in \{0,1\}, && \forall k,l,t,\\
&b_{rkl} \ge 0, \bar{u}_{rtk} \ge 0, \bar{v}_{itk} \ge 0 && \forall t,k,r,i.
\end{aligned}
$$

٤- مثال عددی

در این بخش با ارائه مثالی عددی چگونگی تأثیر کارایی تأسیسات بر نحوه مکان‌یابی و تخصیص متقاضیان بیان می‌گردد. در این مثال می‌خواهیم تصمیم بگیریم که چگونه سه مرکز تأسیساتی را در پنج مکان ممکن جایابی کرده سپس تقاضای هشت متقاضی را توسط تأمین‌کننده‌های تأسیس شده پاسخ دهیم. در این مثال فرض شده است که هر یک از تأسیسات با توجه به مکان قابل احداث دارای سه ورودی (همچون بودجه، زمین ساخت و...) بوده و پس از ساخت می‌تواند دو نوع کالا جهت عرضه به متقاضیان تولید کند. اطلاعات مورد نیاز در جداول ۱ تا ۵ آمده است. این مثال به نوعی از مرجع[۸] الهام گرفته شده است. همچنین فرض می‌کنیم محدودیتی در میزان حمل و نقل کالا در شبکه تأمین‌کننده و متقاضی وجود ندارد. نتایج اجرای مدل[۱۰] در دو وضعیت در جدول ۶ آمده است. در وضعیت اول وزن تابع هدف اول (وزن کارایی) مقدار یک و وزن تابع هدف دوم (مکان‌یابی) صفر و در وضعیت دوم وزن کارای صفر و وزن مکان‌یابی یک در نظر گرفته شده است. نتایج موجود در جدول ۶ بیان‌گر عدم همسویی توابع هدف مدل می‌باشند. برای رفع این مشکل می‌بایست از روش‌های موجود در برنامه‌ریزی چندهدفه به نوعی استفاده کرد که هر دو تابع هدف به‌طور هم‌زمان در مدل لحاظ شوند.

جدول ۱ - میزان منابع استفاده شده توسط هر یک از تأسیسات در مکان‌های ممکن

	ورودی	مکان ۱	مکان ۲	مکان ۳	مکان ۴	مکان ۵
تأسیسات۱	۱	۸۳	۷۹	۲۲	۴۶	۱۳
	۲	۸۶	۸۵	۳۹	۹۵	۶۳
	۳	۵۴	۱۸	۱۸	۷۰	۲۰
تأسیسات۲	۱	۷۸	۲۰	۶۰	۶۹	۲۴
	۲	۴۳	۱۵	۱۹	۵۳	۹۵
	۳	۹۵	۳۰	۶۹	۳۵	۱۹
تأسیسات۳	۱	۲۵	۷۹	۹۵	۷۸	۶۸
	۲	۲۴	۹۵	۸۰	۸۰	۵۰
	۳	۶۸	۴۰	۹۱	۷۸	۷۹

جدول ۲ - میزان تولید هر یک تأسیسات در مکان‌های ممکن

	خروجی	مکان ۱	مکان ۲	مکان ۳	مکان ۴	مکان ۵
تأسیسات۱	۱	۵۰	۶۱	۱۵	۱۱	۱۴
	۲	۳۷	۲۷	۱۶	۵۸	۸
تأسیسات۲	۱	۹۰	۴۲	۷۲	۷۳	۵۸
	۲	۷۰	۲۹	۸	۷۷	۱۶
تأسیسات۳	۱	۳۸	۸۵	۸۴	۹۰	۲۱
	۲	۲۳	۵۶	۵۵	۳۲	۷۸

جدول ۳ – مقدار تقاضای هر یک از خروجی‌های تأسیسات در هر یک از نقاط تقاضا

نوع	متق	متق	متق	متق	متق	متق	متق	متق
۱	۱۰	۸	۴۸	۱۱	۲۵	۸	۴۵	۳۳
۲	۲۵	۱۴	۲۹	۷	۴۲	۱۱	۱۷	۵۲

جدول٤ – هزینه ثابت ساخت هر یک از تأسیسات در مکان‌های مختلف

تأسیسات					
	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۲۵۰	۲۵۷	۲۴۳	۲۵۳	۲۴۸
۲	۱۶۵	۱۷۸	۱۶۸	۱۷۲	۱۷۰
۳	۲۰۵	۲۱۸	۲۱۱	۲۰۹	۲۱۳

جدول۵ – هزینه حمل هر واحد کالای نوع ۱ یا ۲ میان نقاط عرضه و تقاضا

مکان	متقاضی							
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱	۷۴	۸۷	۴۲	۳۲	۲۴	۴۶	۶۴	۵۳
۲	۲۸	۲۸	۲۲	۲۷	۴۳	۶۴	۳۶	۴۵
۳	۱۹	۶۱	۷۵	۶۷	۱۸	۳۳	۴۱	۲۰
۴	۴۴	۴۶	۶۷	۶۳	۸۱	۸۰	۴۸	۴۵
۵	۹۹	۱۰۸	۴۲	۳۵	۶۲	۴۴	۸۱	۵۰

جدول ٦ – نتایج اجرای مدل (۱۰) در سه وضعیت مختلف

وضعیت	تأسیسات	مکان تخصیص داده شده	متقاضیان تخصیص داده شده	کارایی	هزینه نهایی
۱	۱	۲	۱،۵،۷،۸	۱	۱۹۲۲۴
	۲	۱	۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷	۱	
	۳	۵	۴،۸	۱	
۲	۱	۳	۱،۵،۶،۸	۰٫۶۵	۱۳۸۵۲
	۲	۱	۱	۱	
	۳	۲	۲،۳،۴،۷	۱	

۵ – نتیجه‌گیری

در این مقاله با ارائه یک مدل برنامه‌ریزی چندهدفه به تلفیق یک مدل ارزیابی کارایی با وزن مشترک می‌پردازیم. این چندین مدل‌هایی در مقالات مدل K-R و محب علی‌زاده و همکاران[۸] نیز بررسی شده است. اما یکی از اساسی‌ترین ایرادات مقالات موجود در این مقالات آن است که این مدل‌ها واحدهایی که در مجموعه امکان تولید نیستند را در ارزیابی کارایی لحاظ می‌کنند. در این مقاله ضمن رفع این ایراد و تغییر ساختار مدل‌های مقالات قبل مدلی خطی و مختلط ارائه شده است. نتایج بررسی در مثال کاربردی بیان‌گر آن می‌باشند که توابع هدف مکان‌یابی و کارایی ممکن است با هم هم‌راستا نباشند لذا ارائه روشی براساس برنامه‌ریزی چندهدفه برای در نظر گرفتن همزمان این توابع هدف ضروری به نظر می‌رسد.

فهرست منابع

[1] Charnes. A, Cooper. W.W, Rhodes. E (1978). Measuring the efficiency of decision making units, Eur.

[2] Ertay. T, Ruan. D, Tuzkaya. U.R (2006). Integrating data envelopment analysis and analytic hierarchy for the facility layout design in manufacturing systems, Inform Sciences.

[3] Farrell. M.J (1957). The Measurement of Productive Efficiency, J.R. Stat. Soc, Series A (General).

[4] Hitchcock. F.L (1941). Distribution of a product from several sources to numerous localities.

[5] Liu. F.H.F, Hsuan Peng. H (2008). Ranking of units on the DEA frontier with common weights. Computers and Operations Research.

[6] Jahanshahloo. G.R, Memariani. A, Hosseinzadeh-Lotfi. F, Rezai. H.Z (2005). A note on some of DEA models and finding efficiency and complete ranking using common set of weights. Appl. Math. Comput.

[7] Klimberg. R.K, Ratick. S.J (2008). Modeling data envelopment analysis (DEA) efficient location/allocation decision, Comput. Oper. Res.

[8] Moheb-Alizade. H, Rasouli. S.M, Tavakkoli-Moghaddam. R (2011). The use of multi-criteria data envelopmant analysis (MCDEA) for location-allocation problems in a fuzzy environment.

[9] Revelle. C (1987). Urban public facility location, Handbook of regional and urban economics.

[10] Schilling. D.A, Jayaraman. V, Barkhi. R.A (1993). Review of covering models in facility location.

[11] Shroff. H.E, Gulledge. T.R, Haynes. K.E (1998). Siting efficiency of long-term health care facilities, Socio.

[12] Thomas. P, Chan. Y, Lehmkuhl. L, Nixon. W (2002). Obnoxious-facility location and data-envelopment analysis: A combined distance-based formulation.