

ایدال همریختی‌های شبکه‌ای متناظر به حاصل ضرب دو شبکه دلخواه و شبکه [۲]

لیلا شریفان^{۱*}، غزاله ملک‌بالا^۲

^(۱) استادیار، گروه ریاضی محض، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران (نویسنده مسئول).

^(۲) دانشجوی دکتری جبر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران.

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۹/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۳/۲۱

چکیده

فرض کنید L و M دو شبکه متناهی باشند، ایدال $J(L, M)$ یک ایدال تک جمله‌ای در یک حلقه چندجمله‌ای مشخص است که مولدهای مینیمال تک جمله‌ای آن در تناظر با همریختی‌های شبکه‌ای $\phi: L \rightarrow M$ قرار دارند. این ایدال، ایدال همریختی‌های شبکه‌ای نام دارد. در این مقاله به مطالعه $J(L, M)$ در حالتی که L حاصل ضرب دو شبکه متناهی L_1 و L_2 است و M زنجیر (۲) می‌باشد، می‌پردازیم. ابتدا مجموعه همه همریختی‌های شبکه‌ای $\phi: L \rightarrow [2]$ را بر حسب مجموعه همه همریختی‌های شبکه‌ای $\phi_1: L_1 \rightarrow [2]$ و مجموعه همه همریختی‌های شبکه‌ای $\phi_2: L_2 \rightarrow [2]$ شناسایی می‌کنیم. سپس با استفاده از آن ایدال‌های اول وابسته به $J(L, [2])$ را به کمک ایدال‌های اول وابسته به $J(L_1, [2])$ و $J(L_2, [2])$ مطالعه می‌کنیم. در ادامه فرض می‌کنیم $L_1 = [2]$ و مجموعه $ass(J(L, [2]))$ را شناسایی می‌کنیم. سپس به کمک تکنیک مخروط نگارنده و تحلیل آزاد مینیمال $J(L_2, [2])$ ، یک تحلیل آزاد برای $J(L, [2])$ و یک کران بالا برای بعد تصویری آن به دست می‌آوریم. در نهایت، با مفروضات بالا برای حالتی که $L_2 = [n]$ ، تحلیل آزاد مینیمال $J(L, [2])$ را محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی. ایدال همریختی‌های شبکه‌ای، حاصل ضرب دو شبکه، ایدال اول وابسته، تحلیل آزاد مینیمال.

۱- مقدمه

مطالعه ایدال‌های تک جمله‌ای حلقه چندجمله‌ای‌ها و بیان ارتباط بین ویژگی‌های جبری این ایدال‌ها و ویژگی‌های ترکیباتی اشیا ترکیباتی که به آنها نظیر می‌شود از مباحث مهم و جذاب جبر جابجایی است. به عنوان نمونه یک تناظر یک به یک بین ایدال‌های تک جمله‌ای از مربع آزاد حلقه $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ و مجتمع‌های سادگی روی $\{1, \dots, n\}$ وجود دارد (ببینید بخش ۱، ۶ از (۱۵)).

در سال‌های اخیر، برخی محققین روی دسته‌ای از ایدال‌های تک جمله‌ای تمرکز کرده‌اند که به ساختارهای جبری مرتب نسبت داده می‌شوند. در میان آنها می‌توان به ایدال‌های هیبی که به مجموعه مرتب جزئی P نسبت داده می‌شود و توسط هرزوغ و هیبی در سال ۲۰۰۵ معرفی شده است اشاره کرد (مرجع (۲)). در سال ۲۰۱۱ نیز ایدال‌های هیبی تعمیم یافته در (۳) معرفی شده‌اند. یک تعمیم دیگر از این ایدال‌ها، ایدال‌های همریختی‌های یکنوا می‌باشند (ببینید تعریف (۷۰۲)). این ایدال‌ها در مقاله (۴) معرفی شده‌اند و در مقاله‌های (۵) و (۶) بیشتر مطالعه شده‌اند.

توجه کنید که هر ایدال همریختی‌های یکنوا به یک جفت مجموعه جزئی مرتب متناهی نسبت داده می‌شود. نویسندگان این مقاله و استاجی در (۷)، مشابه مفهوم ایدال همریختی‌های یکنوا، به یک جفت شبکه متناهی (L, M) ، یک ایدال تک جمله‌ای از مربع آزاد به نام ایدال همریختی‌های شبکه‌ای نسبت داده‌اند و آن را با نماد $J(L, M)$ نمایش داده‌اند. (ببینید تعریف (۸، ۲)).

مقاله (۷) اساساً به مطالعه ایدال‌های اول وابسته به $J(L, M)$ می‌پردازد و مباحث مطرح شده نشان می‌دهد که شناسایی کامل ایدال‌های اول وابسته به $J(L, M)$ کار نسبتاً مشکلی است. در مقاله فوق‌اعضایی از $(J(L, M))$ که کمترین ارتفاع دارند در حالتی که L یک شبکه توزیع‌پذیر است کاملاً شناسایی می‌شوند (قضیه ۳ از (۷)) و در ادامه $(J(L, [2]))$ مطالعه می‌شود. به عنوان مثال یک کران بالا برای ارتفاع ایدال‌های اول وابسته به $J(L, [2])$ بر حسب ویژگی‌های شبکه L ارائه می‌شود قضیه ۱۰ از (۷) و یک

شرط لازم و کافی برای این که یک ایدال اول تک جمله‌ای عضو $(J(L, [2]))$ باشد ارائه می‌شود (نتیجه ۱۱ از (۷)). اما کماکان مسئله شناسایی کامل $(J(L, [2]))$ حل نشده باقی می‌ماند.

در این مقاله، به مطالعه ایدال $(J(L_1 \times L_2, [2]))$ که L_1 و L_2 دو شبکه متناهی‌اند می‌پردازیم. ابتدا مجموعه همریختی‌های شبکه‌ای $[2] \rightarrow L_1 \times L_2 \rightarrow \phi$ را بر حسب مجموعه همریختی‌های شبکه‌ای $[2] \rightarrow L_1$ و مجموعه همریختی‌های شبکه‌ای $[2] \rightarrow L_2$ شناسایی می‌کنیم (نتیجه ۲، ۳). در ادامه به کمک نتیجه فوق یک کران بالا برای ارتفاع اعضای $(J(L_1 \times L_2, [2]))$ بر حسب کران بالای ارتفاع اعضای $(J(L_1, [2]))$ و کران بالای ارتفاع اعضای $(J(L_2, [2]))$ به دست می‌آوریم (قضیه ۳، ۳). در بخش چهارم، ایدال $(J([2] \times L, [2]))$ را مطالعه می‌کنیم و $(J([2] \times L, [2]))$ را بر حسب $(J(L, [2]))$ به طور کامل شناسایی می‌کنیم (ببینید قضیه ۱، ۴).

در بخش پنجم، ویژگی‌های همولوژیکی $(J([2] \times L, [2]))$ را بر حسب ویژگی‌های $(J(L, [2]))$ به دست می‌آوریم. توجه کنید که اساس کار در این بخش تکنیک مخروط نگارنده است و مهم‌ترین نتیجه این بخش محاسبه تحلیل آزاد مینیمال $(J([2] \times [n], [2]))$ می‌باشد (ببینید قضیه ۲، ۵).

۲- تعاریف اولیه و پیش‌نیازها

تعریف ۱-۲: فرض کنید P یک مجموعه ناتهی باشد. رابطه \leq را ترتیب جزئی روی P نامیم اگر بازتابی، متعدی و پادمتقارن باشد. اگر \leq یک ترتیب جزئی روی P باشد می‌گوییم که (P, \leq) مجموعه‌ای جزئی مرتب است.

تعریف ۲-۲: مجموعه جزئی مرتب (P, \leq) را زنجیر گوئیم اگر برای هر $x, y \in P$ دست کم یکی از روابط $x \leq y$ یا $y \leq x$ برقرار باشد. زنجیر $1 < 2 < 3 < \dots$ را با $[n]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۳: فرض کنید (P, \leq) یک مجموعه جزئی مرتب و $X \subseteq P$ عضو $a \in P$ را مقطع X گوئیم و

فرض کنید \mathbb{K} یک میدان باشد و حلقه چندجمله‌ای‌های $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ را در نظر بگیرید هر حاصل ضرب $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ که $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ یک تک جمله‌ای نامیده می‌شود. ایدال $I \subseteq R$ را که توسط تک جمله‌ای‌ها تولید می‌شود یک ایدال تک جمله‌ای گوئیم و طبق نتیجه ۱،۳،۹ از [1] هر ایدال اول وابسته به ایدال تک جمله‌ای I توسط یک زیرمجموعه از $\{x_1, \dots, x_n\}$ تولید می‌شود.

یک تک جمله‌ای $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ از مربع آزاد نامیده می‌شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\alpha_i \in \{0, 1\}$ ، یک ایدال تک جمله‌ای I را ایدال تک جمله‌ای از مربع آزاد گوئیم هرگاه توسط تک جمله‌ای‌های از مربع آزاد تولید شود.

تعریف ۲-۷: فرض کنید P و Q مجموعه‌های جزئی مرتب متناهی باشند. در این صورت حلقه چندجمله‌ای‌های روی میدان \mathbb{K} در متغیرهای $x_{p,q}$ که در آن $p \in P$ و $q \in Q$ را S می‌نامیم و برای هر $\phi \in \text{Hom}_{\text{Pos}}(P, Q)$ تک جمله‌ای

$$u_\phi = \prod_{p \in P} x_{p, \phi(p)}$$

را در نظر می‌گیریم. ایدال همریختی‌های یکنوا وابسته به P و Q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $I(P, Q) = (u_\phi; \phi \in \text{Hom}_{\text{Pos}}(P, Q))$

تعریف ۲-۸: همانند تعریف بالا برای مشبکه‌های متناهی L و M ایدال همریختی‌های مشبکه‌ای وابسته به L و M را به صورت زیر تعریف می‌کنیم $J(L, M) = (u_\phi; \phi \in \text{Hom}_{\text{Lat}}(L, M))$

در این مقاله ایدال فوق را برای مشبکه‌های خاصی بررسی می‌کنیم. توجه کنید که $J(L, M) \subseteq I(L, M)$ و هر دو آنها ایدال‌های تک جمله‌ای از مربع آزاد هستند و بنابراین طبق نتیجه ۱،۲،۵ از (۱)، هر دو ایدال‌های رادیکال‌اند. چون ایدال‌های فوق تک جمله‌ای‌اند، بنا بر نتیجه ۹،۳،۱ از (۱)، ایدال‌های اول وابسته به آنها (اعضای $\text{ass}(I(L, M))$ و $\text{ass}(J(L, M))$) ایدال‌های تک جمله‌ای‌اند. پس هر عضو $\text{ass}(J(L, M))$ توسط برخی

می‌نویسیم $a = \wedge X$ هرگاه a بزرگترین کران پایین باشد. اگر $X = \{x, y\}$ آن‌گاه $\wedge X$ را با $x \wedge y$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب b را اتصال X گوئیم و می‌نویسیم $b = \vee X$ هرگاه b کوچکترین کران بالای X باشد و اگر $X = \{x, y\}$ آن‌گاه $\vee X$ را با $x \vee y$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۴: یک مجموعه‌ی جزئی مرتب L را مشبکه نامیم هرگاه هر زیرمجموعه متناهی از L دارای مقطع و اتصال باشد.

در سر تا سر این مقاله مشبکه‌ها متناهی فرض می‌شوند. هر مشبکه متناهی L دارای بزرگترین عضو و کوچکترین عضو است که آنها را به ترتیب با 1_L و 0_L نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۵: فرض کنید P و Q دو مجموعه جزئی مرتب باشند نگاشت $\phi: P \rightarrow Q$ را همریختی حافظ ترتیب یا یکنوا گوئیم هرگاه برای هر $a, b \in P$ که $a \leq b$ داشته باشیم $\phi(a) \leq \phi(b)$ مجموعه تمام همریختی‌های یکنوا از P به Q را با $\text{Hom}_{\text{Pos}}(P, Q)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۶: فرض کنید L و M دو مشبکه باشند نگاشت $\phi: L \rightarrow M$ را یک همریختی مشبکه‌ای گوئیم هرگاه ϕ حافظ مقطع و اتصال متناهی باشد یعنی برای هر $l_1, l_2 \in L$

$$\begin{aligned} \phi(l_1 \wedge l_2) &= \phi(l_1) \wedge \phi(l_2) \text{ و} \\ \phi(l_1 \vee l_2) &= \phi(l_1) \vee \phi(l_2) \end{aligned}$$

مجموعه تمام همریختی‌های مشبکه‌ای از L به M را با $\text{Hom}_{\text{Lat}}(L, M)$ نشان می‌دهیم.

در ادامه، قصد داریم متناظر به مجموعه‌های جزئی مرتب متناهی P و Q ، ایدال همریختی‌های یکنوا وابسته به P و Q و نیز متناظر به مشبکه‌های متناهی L و M ، ایدال همریختی‌های مشبکه‌ای وابسته به L و M را تعریف کنیم و چون هر دوی این ایدال‌ها، ایدال‌های تک جمله‌ای هستند نیاز داریم که مفاهیم اساسی مربوط به ایدال‌های تک جمله‌ای را یادآوری کنیم.

فرض کنید I یک ایدئال همگن از حلقه چندجمله‌ای‌های $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ باشد و f یک عضو همگن از R باشد که $f \notin I$. در این صورت دنباله دقیق زیر

$$0 \rightarrow \frac{R}{(I:f)} \rightarrow \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{I+(f)} \rightarrow 0$$

وجود دارد. اگر (\mathbb{F}, δ) یک $-R$ تحلیل آزاد از $\frac{R}{I}$ و

(\mathbb{G}, ∂) یک $-R$ تحلیل آزاد از $\frac{R}{(I:f)}$ باشند آن‌گاه

می‌توانیم با استفاده از تکنیک مخروط نگارنده متناظر همریختی همبافتی $\psi: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{F}$ که بالا بر همریختی $\frac{R}{I+(f)} \rightarrow \frac{R}{I}$ است، یک تحلیل $(\mathbb{M}(\psi), \gamma)$ از $\frac{R}{I+(f)}$ را به دست آوریم. در واقع مخروط نگارنده $\mathbb{M}(\psi)$ همبافتی است که

$$(\mathbb{M}(\psi))_i = \mathbb{F}_i \oplus \mathbb{G}_{i-1}$$

و نگاشت‌های دیفرانسیل

$\gamma_i(x, y) = (\psi_{i-1}(y) + \delta_i(x), \partial_{i-1}(y))$ که در آن $x \in \mathbb{F}_i$ و $y \in \mathbb{G}_{i-1}$. این همبافت دقیق است بنابراین یک تحلیل آزاد برای $\frac{R}{I+(f)}$ است. (ببینید صفحه ۶۵۰ و گزاره ۳.۱۹، A.۳ از مرجع (۹)).

۳. مطالعه $J(L_1 \times L_2, [2])$ با استفاده از $J(L_2, [2])$ و $J(L_1, [2])$

فرض کنید L_1 و L_2 دو مشبکه متناهی باشند. در این صورت $L_1 \times L_2$ نیز یک مشبکه متناهی است. توجه کنید که در $L_1 \times L_2$ اعمال \wedge و \vee به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(l_1, l_2) \wedge (l'_1, l'_2) = (l_1 \wedge l'_1, l_2 \wedge l'_2)$$

$$(l_1, l_2) \vee (l'_1, l'_2) = (l_1 \vee l'_1, l_2 \vee l'_2)$$

اگر L_1, L_2 و مشبکه توزیع‌پذیر باشند، آنگاه $L_1 \times L_2$ نیز مشبکه‌ای توزیع‌پذیر است.

در این بخش قصد داریم $J(L_1 \times L_2, [2])$ را با استفاده از $J(L_1, [2])$ و $J(L_2, [2])$ مطالعه کنیم.

ابتدا اعضای $Hom_{Lat}(L_1 \times L_2, [2])$ را بر حسب اعضای $Hom_{Lat}(L_1, [2])$ و $Hom_{Lat}(L_2, [2])$ شناسایی می‌کنیم.

متغیرهای حلقه تولید می‌شود. به علاوه بنا بر رادیکال بودن $J(L, M)$ ، همواره داریم $Min(J(L, M)) = ass(J(L, M))$.

در بحث شناسایی $(ass(J(L, [2])))$ ، لم ساده زیر از (۷)، حائز اهمیت است.

لم ۲-۹. فرض کنید L یک مشبکه متناهی باشد. اگر

$$(x_{l_1, m_1}, \dots, x_{l_n, m_n}) \in ass(J(L, [2]))$$

$$x_{l_i, m_i} = 1 \leq i \neq j \leq n \text{ و } a, b \in L$$

$$x_{l_j, m_j} = x_{b, 2} \text{ و } x_{a, 1}$$

در آخرین بخش این مقاله به بررسی تحلیل آزاد مینیمال $J([2] \times L, [2])$ می‌پردازیم. برای آشنایی کامل و دقیق با تحلیل آزاد مدول‌های مدرج روی حلقه چند جمله‌ای‌ها می‌توان به کتاب بسیار زیبایی (۸) مراجعه کرد. توجه کنید که مطالعه پایاهای عددی نظیر شده به تحلیل آزاد مینیمال نظیر بعد تصویری، اعداد بتی و عدد نظم در درک ویژگی‌های مدول بسیار موثر است.

در ادامه به یادآوری مفهوم تحلیل آزاد مینیمال، بعد تصویری، اعداد بتی و تکنیک مخروط نگارنده می‌پردازیم. توجه کنید که تکنیک مخروط نگارنده به صورت موثر در بخش آخر این مقاله استفاده می‌شود.

تعریف ۲-۱۰: فرض کنید $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ و

M یک $-R$ مدول مدرج متناهی تولید شده و m ایدئال ماکسیمال مدرج R باشد یک دنباله مدرج دقیق به صورت

$$0 \rightarrow F_t \xrightarrow{\delta_t} \dots \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\delta_0} M \rightarrow 0$$

که در آن F_i ها، $-R$ مدول‌های آزاد مدرج‌اند، $-R$ تحلیل آزاد مینیمال M نام دارد هرگاه δ_i ها همریختی‌های از درجه صفر باشند و برای هر i ، $Im \delta_i \subseteq mF_{i-1}$. توجه کنید که هر F_i به صورت $F_i = \bigoplus R(-\beta_{ij})$ می‌باشد که $\{\beta_{ij}\}$ دنباله اعداد بتی M نام دارد بعد تصویری M عبارت است از

$$pd(M) = \max\{i \mid F_i \neq 0\}.$$

تکنیک مخروط نگارنده.

از روابط ۱ و ۲ داریم:

$$\varphi(l_1.l_2) \wedge \varphi(l_1 \vee l'_1.l_2 \vee l'_2) = 1$$

و چون φ یک همریختی مشبکه‌ای است داریم:

$$\varphi(l_1 \wedge (l_1 \vee l'_1).l'_2 \wedge (l_2 \vee l'_2)) = 1$$

$$\Rightarrow \varphi(l_1.l'_2) = 1$$

که این متناقض با رابطه (۲) است. بنابراین فرض خلف باطل است و حکم برقرار می‌باشد.

برعکس فرض کنید $\varphi_1: L_1 \rightarrow [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای باشد. نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$ را با ضابطه $\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم که φ همریختی مشبکه‌ای است. داریم:

$$\begin{aligned} \varphi((l_1.l_2) \wedge (l'_1.l'_2)) &= \varphi(l_1 \wedge l'_1.l_2 \wedge l'_2) \\ &= \varphi_1(l_1 \wedge l'_1) \\ &= \varphi_1(l_1) \wedge \varphi_1(l'_1) \\ &= \varphi(l_1.l_2) \wedge \varphi(l'_1.l'_2). \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان دید که

$$\begin{aligned} \varphi((l_1.l_2) \vee (l'_1.l'_2)) &= \varphi(l_1.l_2) \vee \varphi(l'_1.l'_2) \end{aligned}$$

پس φ یک همریختی مشبکه‌ای است.

حال فرض کنید $\varphi_2: L_2 \rightarrow [2]$ یک همریختی مشبکه‌ای باشد و نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$ را با تعریف $\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$ در نظر می‌گیریم. همانند بالا، به سادگی می‌توان دید که φ همریختی مشبکه‌ای است.

نتیجه ۳-۲. فرض کنید L_2, L_1 دو مشبکه متناهی دلخواه باشند در این صورت موارد زیر برقرارند.

(الف)

$$|Hom_{Lat}(L_1 \times L_2, [2])| = |Hom_{Lat}(L_1, [2])| + |Hom_{Lat}(L_2, [2])| - 2$$

(ب) اگر $Hom_{Lat}(L_1, [2]) = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ و θ_1, θ_2 به ترتیب همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۱ و ۲ باشند و

$$Hom_{Lat}(L_2, [2]) = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$$

و ψ_1, ψ_2 به ترتیب همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۱ و ۲ باشند آنگاه

لم ۳-۱. نگاشت $\varphi: L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$ یک

همریختی مشبکه‌ای است اگر و فقط اگر φ در یکی از شرط‌های زیر صدق کند.

(الف) نگاشت $\varphi_1 \in Hom_{Lat}(L_1, [2])$ موجود باشد به طوری که برای هر

$$(l_1.l_2) \in L_1 \times L_2$$

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1)$$

(ب) نگاشت $\varphi_2 \in Hom_{Lat}(L_2, [2])$ موجود باشد که برای هر $(l_1.l_2) \in L_1 \times L_2$ داشته باشیم.

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$$

برهان. ابتدا فرض کنید $\varphi: L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$ یک

همریختی مشبکه‌ای دلخواه باشد. در این صورت همریختی‌های $\varphi_1: L_1 \rightarrow [2]$ و $\varphi_2: L_2 \rightarrow [2]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\varphi_1(l_1) = \varphi(l_1.1_{L_2})$$

$$\varphi_2(l_2) = \varphi(1_{L_1}.l_2) \text{ و}$$

واضح است که φ_1, φ_2 هر دو همریختی‌های مشبکه‌ای هستند. نشان می‌دهیم که یکی از دو شرط زیر برقرار است.

$$(۱) \text{ برای هر } (l_1.l_2) \in L_1 \times L_2$$

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_1(l_1).$$

$$(۲) \text{ برای هر } (l_1.l_2) \in L_1 \times L_2$$

$$\varphi(l_1.l_2) = \varphi_2(l_2)$$

فرض کنید چنین نباشد. بنابراین $(l_1.l_2) \in L_1 \times L_2$ و $(l'_1.l'_2) \in L_1 \times L_2$ موجودند که

$$\varphi(l_1.l_2) \neq \varphi(l_1.1_{L_2})$$

و

$$\varphi(l'_1.l'_2) \neq \varphi(1_{L_1}.l'_2)$$

بنابراین $\varphi(l_1.1_{L_2}) = 2$ و $\varphi(l_1.l_2) = 1$ علاوه بر این $\varphi(1_{L_1}.l'_2) = 2$ و $\varphi(l'_1.l'_2) = 1$ در نتیجه

$$\varphi(l_1.l_2) \vee \varphi(l'_1.l'_2) = \varphi(l_1 \vee l'_1.l_2 \vee l'_2) = 1 \quad (1)$$

همچنین داریم

$$\varphi(l_1.1_{L_2}) \wedge \varphi(1_{L_1}.l'_2) = \varphi(l_1.l'_2) = 2 \quad (2)$$

$$S_2 = \mathbb{K} [x_{l_2.m} \cdot l_2 \in L_2, m \in [2]]$$

$$S = \mathbb{K} [x_{(l_1.l_2).m} \cdot (l_1.l_2) \in L_1 \times L_2, m \in [2]]$$

در این صورت به وضوح $J(L_1, [2])$ و $J(L_2, [2])$ و S_1 به ترتیب ایدآل‌های حلقه‌های S و S_2 هستند.

برای هر مشبکه دلخواه L قرار دهید

$$W(L) = \max \{htP | P \in \text{ass}(J(L, [2]))\}.$$

در قضیه زیر یک کران بالا برای $W(L_1 \times L_2)$ برحسب $W(L_1)$ و $W(L_2)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۳-۳: فرض کنید L_2, L_1 دو مشبکه متناهی باشند. در این صورت

$$W(L_1 \times L_2) \leq W(L_1) + W(L_2).$$

برهان. ابتدا توجه کنید که با توجه به نتیجه ۲،۳ و با استفاده از نمادگذاری‌های آن

$$J(L_1, [2]) = (u_{\theta_1} \dots u_{\theta_m}) \subseteq S_1$$

$$J(L_2, [2]) = (u_{\psi_1} \dots u_{\psi_n}) \subseteq S_2$$

همچنین

$$J(L_1 \times L_2, [2]) = (u_{\phi_1} \dots u_{\phi_m} \cdot u_{\phi_{m+1}} \dots u_{\phi_{m+n-2}}) \subseteq S$$

حال فرض کنید

$$P = (x_{(l_1.l'_1).\lambda_1} \dots x_{(l_t.l'_t).\lambda_t}) \in \text{ass}(J(L_1 \times L_2, [2])).$$

که در آن برای هر $1 \leq j \leq t$ ، $(l_j, l'_j) \in L_1 \times L_2$ و $\lambda_j \in [2]$ اما چون $J(L_1 \times L_2, [2]) \subseteq P$ برای هر $1 \leq j \leq t$ یک $1 \leq i \leq m + n - 2$

است به طوری که $x_{(l_j.l'_j).\lambda_j} | u_{\phi_i}$

همچنین برای هر $1 \leq i \leq m$ ، با توجه به تعریف

$$x_{(l_j.l'_j).\lambda_j} | u_{\phi_i} \Leftrightarrow \lambda_{l_j.\lambda_j} | u_{\theta_i}$$

بنابراین $J(L_1, [2]) \subseteq$

$$(x_{l_1.\lambda_1} \dots x_{l_t.\lambda_t}) \quad (4)$$

$$\text{Hom}_{\text{Lat}}(L_1 \times L_2, [2]) = \{\phi_1, \dots, \phi_m, \phi_{m+1}, \dots, \phi_{m+n-2}\}$$

که در این جا برای هر $1 \leq i \leq m$ و برای هر $(l_1, l_2) \in L_1 \times L_2$

$$\phi_i(l_1, l_2) = \theta_i(l_1)$$

و برای هر $m + 1 \leq i \leq m + n - 2$

$$\phi_i(l_1, l_2) = \psi_{i-m+2}(l_2)$$

برهان. ابتدا توجه کنید که همریختی‌های مشبکه‌ای القایی از ψ_1, ψ_2 به ترتیب همان ϕ_1, ϕ_2 می‌باشند. و با توجه به لم ۱،۳، واضح است که هر عضو $\text{Hom}_{\text{Lat}}(L_1 \times L_2, [2])$ باید به صورت یکی از ϕ_i ها باشد. پس ب) به وضوح برقرار است. برای اثبات الف) تنها کافی است نشان دهیم که ϕ_i های داده شده دو به دو متمایزند.

فرض کنیم $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$

$$\phi: L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$$

$$(l_1, l_2) \mapsto \theta_i(l_1)$$

$$\phi': L_1 \times L_2 \rightarrow [2]$$

$$(l_1, l_2) \mapsto \psi_j(l_2)$$

اگر دو همریختی مشبکه‌ای ϕ, ϕ' مساوی باشند داریم

$$\forall (l_1, l_2) \in L_1 \times L_2$$

$$\phi(l_1, l_2) = \phi'(l_1, l_2) \Rightarrow$$

$$\forall l_1 \in L_1, \forall l_2 \in L_2, \theta_i(l_1) = \psi_j(l_2) \quad (3)$$

حال اگر $\psi_j(0_{L_2}) = 1$ (رابطه ۳) برای هر $l_1 \in L_1$ داریم $\theta_i(l_1) = 1$

در نتیجه θ_i همریختی مشبکه‌ای ثابت ۱ است و به علاوه با استفاده مجدد از رابطه (۳) برای هر $l_2 \in L_2$ داریم:

$\psi_j(l_2) = \psi_j(0_{L_2}) = 1$ و ψ_j همریختی مشبکه‌ای ثابت ۱ است. به طور مشابه اگر $\psi_j(0_{L_2}) = 2$ می‌توان دید که هر دوی ψ_j, θ_i همریختی‌های مشبکه‌ای ثابت ۲ می‌باشند.

همان‌طور که گفتیم هدف ما بیان ارتباط $J(L_1 \times L_2, [2])$ با $J(L_1, [2])$ و $J(L_2, [2])$ است. فرض کنید S_1, S_2, S به ترتیب حلقه‌های چند جمله‌ای زیر باشند.

$$S_1 = \mathbb{K} [x_{l_1.m} \cdot l_1 \in L_1, m \in [2]]$$

زیرا L_1 و L_2 هر دو زنجیرند و طبق نتیجه ۵ از مقاله [7]،
 $J(L_1, [2])$ و $J(L_2, [2])$ ایدال‌های نآمیخته‌اند که هر
 اول وابسته آنها از ارتفاع ۲ است. در این جا
 $W(L_1 \times L_2) < W(L_1) + W(L_2)$
 اگر $L_1 = [m]$ و $L_2 = [n]$ که $m, n > 2$ آن‌گاه طبق
 قضیه ۲،۵ مقاله (۷) داریم:

$$W(L_1 \times L_2) = W(L_1) + W(L_2) = 4$$

بخش ۴. مطالعه $J([2] \times L, [2])$

در این بخش تمرکز خود را روی ایدال‌های همریختی‌های
 مشبکه‌ای قرار می‌دهیم که در آنها مشبکه دامنه به صورت
 $[2] \times L$ است و L یک مشبکه دلخواه متناهی می‌باشد.
 فرض کنید

$$ass(J(L, [2])) = \{P_1, \dots, P_r\}.$$

طبق لم ۱۰،۲ برای هر $1 \leq i \leq r$ مجموعه‌های ناتهی
 B_i, A_i چنان موجودند که $B_i \subseteq L$ و $A_i \subseteq L$
 $P_i = (x_{a,1}, x_{b,2}; a \in A_i, b \in B_i)$

یادآوری می‌کنیم که با توجه به نتیجه ۲،۳ اگر

$$Hom_{Lat}(L, [2]) = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$$

آنگاه

$$Hom_{Lat}([2] \times L, [2]) = \{\phi_1, \dots, \phi_m, \phi_{m+1}\}$$

که در این جا برای هر $1 \leq i \leq m$ و $(j, l) \in [2] \times L$
 داریم: $\phi_i(j, l) = \theta_i(l)$

و $\phi_{m+1}: [2] \times L \rightarrow [2]$ همریختی مشبکه‌ای است

$$\phi_{m+1}(1, l) = 1, \quad l \in L \quad \text{و} \quad \phi_{m+1}(2, l) = 2$$

در گزاره زیر مجموعه $ass(J([2] \times L, [2]))$ را به
 کمک $ass(J(L, [2]))$ شناسایی می‌کنیم.

قضیه ۴-۱. فرض کنید P یک ایدال اول تک جمله‌ای
 حلقه $S = \mathbb{K}[x_{(i,l),j}; i \in [2], j \in [2], l \in L]$ باشد. در
 این صورت P یک ایدال اول وابسته $J([2] \times L, [2])$

توجه کنید که ϕ_2, ϕ_1 را می‌توان همریختی‌های مشبکه
 ای القایی از ψ_2, ψ_1 در نظر گرفت. بنابراین

$$x_{(l_j, l'_j), \lambda_j} | u_{\phi_1} \Leftrightarrow x_{l'_j, \lambda_j} | u_{\psi_1}$$

$$x_{(l_j, l'_j), \lambda_j} | u_{\phi_2} \Leftrightarrow x_{l'_j, \lambda_j} | u_{\psi_2}.$$

و در نهایت تعاریف $\phi_{n+1}, \dots, \phi_{m+n-2}$ نشان می‌دهد
 که برای هر $m+1 \leq i \leq m+n-2$

$$x_{(l_j, l'_j), \lambda_j} | u_{\phi_i} \Leftrightarrow x_{l'_j, \lambda_j} | u_{\psi_{i-m+2}}$$

و در مجموع داریم

$$J(L_2, [2]) \subseteq$$

$$(x_{l'_1, \lambda_1}, \dots, x_{l'_t, \lambda_t}) \quad (5)$$

از طرفی طبق رابطه (۴)، $P_1 \in ass(J(L_1, [2]))$ موجود
 است که $P_1 \subseteq (x_{l_1, \lambda_1}, \dots, x_{l_t, \lambda_t})$.

واضح است که P_1 توسط زیر مجموعه‌ای از
 $\{x_{l_1, \lambda_1}, \dots, x_{l_t, \lambda_t}\}$ که حداکثر $W(L_1)$ عضو دارد
 تولید می‌شود. اکنون فرض کنید

$$P_1 = (x_{l_{i_1}, \lambda_{i_1}}, \dots, x_{l_{i_{t'}}, \lambda_{i_{t'}}})$$

که $t' \leq W(L_1)$ و $P_2 \in ass(J(L_2, [2]))$ ، (۵) مشابه طبق رابطه
 موجود است که $P_2 \subseteq (x_{l'_1, \lambda_1}, \dots, x_{l'_t, \lambda_t})$.

واضح است که P_2 توسط زیر مجموعه‌ای از
 $\{x_{l'_1, \lambda_1}, \dots, x_{l'_t, \lambda_t}\}$ که حداکثر $W(L_2)$ عضو دارد
 تولید می‌شود. فرض کنید

$$P_2 = (x_{l'_{j_1}, \lambda_{j_1}}, \dots, x_{l'_{j_{t''}}, \lambda_{j_{t''}}})$$

که $t'' \leq W(L_2)$ اکنون قرار دهید

$$P' = (x_{(l_{i_1}, l'_{i_1}), \lambda_{i_1}}, \dots, x_{(l_{i_{t'}}, l'_{i_{t'}}), \lambda_{i_{t'}}},$$

$$x_{(l_{j_1}, l'_{j_1}), \lambda_{j_1}}, \dots, x_{(l_{j_{t''}}, l'_{j_{t''}}), \lambda_{j_{t''}}}).$$

با این تعریف، P' ایدال اولی از حلقه S است که ارتفاع
 آن حداکثر برابر $t' + t''$ است.

با توجه به بحث‌های بالا، $J(L_1 \times L_2, [2]) \subseteq P' \subseteq$
 P و چون P یک ایدال اول مینیمال $J(L_1 \times L_2, [2])$
 است داریم $P = P'$ و این نشان می‌دهد که

$$htP \leq t' + t'' \leq W(L_1) + W(L_2)$$

مثال ۳-۴. فرض کنید $L_1 = [2]$ و $L_2 = [n]$ در
 این صورت طبق قضیه (۱۹) از مقاله (۷)، $W(L_1 \times$
 $L_2) = 3$ در حالی که $W(L_1) = W(L_2) = 2$

الف. چون $B' \neq \emptyset$ یا $A \neq \emptyset$ پس $x_{(1.a).1} \in P$ موجود است به قسمی که $x_{(1.a).1} | u_{\phi_{m+1}}$ یا

$x_{(2.b).2} \in P$ وجود دارد که $x_{(2.b).2} | u_{\phi_{m+1}}$

از طرفی برای هر $1 \leq \lambda \leq m$ و برای $j = 1, 2$

$$x_{(j.a).1} | u_{\phi_\lambda} \Leftrightarrow x_{a.1} | u_{\theta_\lambda} \quad (6)$$

و (7)

$$x_{(j.a).2} | u_{\phi_\lambda} \Leftrightarrow x_{a.2} | u_{\theta_\lambda}$$

و چون برای یک $1 \leq i \leq r$ داریم $A \cup A' = A_i$ و $B \cup B' = B_i$

می‌توان نتیجه گرفت که

$$(u_{\phi_1}, \dots, u_{\phi_m}) \subseteq P.$$

در بالا نشان دادیم که $u_{\phi_{m+1}} \in P$ و در مجموع

$$J([2] \times L, [2]) \subseteq P.$$

حالا چون $A \cap A' = \emptyset$ و $B \cap B' = \emptyset$ پس هرگاه P ایدال اول مینیمال از $J([2] \times L, [2])$ نباشد. آنگاه

طبق روابط (6) و (7) می‌توان یک ایدال اول شامل $J(L, [2])$ در حلقه $\mathbb{K}[x_{l,j}; l \in L, j \in [2]]$ یافت که به طور اکید مشمول در P_i باشد که این یک تناقض است

پس $P \in \text{ass}(J([2] \times L, [2]))$

ب. ابتدا توجه کنید که $x_{(1.a').1} | u_{\phi_{m+1}}$

به علاوه مشابه قسمت الف، نحوه تعریف A و B چنان

است که $J([2] \times L, [2]) \subseteq P$

اگر P یک ایدال اول مینیمال $J([2] \times L, [2])$ نباشد در این صورت $J([2] \times L, [2])$ مشمول در یک ایدال اول مانند P' است که P' توسط یک زیر مجموعه اکید از

$$\{x_{(2.a).1}; a \in A\} \cup \{x_{(1.b).2}; b \in B\} \cup \{x_{(1.a').1}\}$$

تولید می‌شود. توجه کنید که با توجه به نحوه تعریف

مجموعه بالا و این که $u_{\phi_{m+1}} \in P'$ پس $x_{(1.a').1} \in P'$

بنابراین

$$J([2] \times L, [2]) \subseteq P' \subseteq (x_{(2.a).1}; a \in A \setminus \{a''\}) + (x_{(1.b).2}; b \in B) + (x_{(1.a').1})$$

است اگر و فقط اگر P توسط یکی از مجموعه‌های توصیف شده در زیر تولید شود.

الف.

$$\{x_{(1.a).1}; a \in A\} \cup \{x_{(2.a).1}; a \in A'\} \cup \{x_{(1.b).2}; b \in B\} \cup \{x_{(2.b).2}; b \in B'\}$$

که در آن $B' \neq \emptyset$ یا $A \neq \emptyset$ برای یک $1 \leq i \leq r$

$$B \cup B' = B_i \text{ و } A \cup A' = A_i$$

$$A \cap A' = \emptyset \text{ و } B \cap B' = \emptyset.$$

در این حالت P یک ایدال اول هم ارتفاع با P_i است.

$$\text{ب. } \{x_{(2.a).1}; a \in A\} \cup \{x_{(1.b).2}; b \in B\} \cup \{x_{(1.a').1}\}$$

که در این جا $a' \in L$ و $1 \leq i \leq r$ موجود است که $B = B_i$

و برای هر $a'' \in A$ و برای هر $b' \in B$

داریم:

$$J(L, [2]) \not\subseteq (x_{a.1}; a \in (A \setminus \{a''\}) \cup \{a'\}) + (x_{b.2}; b \in B).$$

همچنین

$$J(L, [2]) \not\subseteq (x_{a.1}; a \in A \cup \{a'\}) + (x_{b.2}; b \in B \setminus \{b'\}).$$

ج.

$$\{x_{(2.a).1}; a \in A\} \cup \{x_{(1.b).2}; b \in B\} \cup \{x_{(2.b').2}\}.$$

که در اینجا $b' \in L$ و $1 \leq i \leq r$ موجود است که $A = A_i$

و $B = B_i$ و برای هر $a' \in A$ و $b'' \in B$ داریم:

$$J(L, [2]) \not\subseteq (x_{a.1}; a \in A) + (x_{b.2}; b \in B \setminus \{b''\}) \cup \{b'\}.$$

همین طور

$$J(L, [2]) \not\subseteq (x_{a.1}; a \in A \setminus \{a'\}) + (x_{b.2}; b \in B \cup \{b'\})$$

برهان. ابتدا فرض کنید که ایدال P توسط یکی از

مجموعه‌های توصیف شده در بندهای الف و ب و ج تولید

می‌شود. در هر حالت نشان می‌دهیم که P یک ایدال اول

وابسته به $J([2] \times L, [2])$ است.

$$+(x_{(1.b).2}; b \in B_i \cap B) + (x_{(2.b).2}; b \in B_i \cap B')$$

یک ایدال اول مشمول در P است و اما طبق (۶) و (۷) و این که $u_{\phi_{n+1}} \in P_1$ پس $J([2] \times L. [2]) \subseteq P_1$ بنابراین $P_1 = P$ لذا P به شکل توصیف شده در الف است.

حالت دوم. $A_i \subseteq A'$ و $B_i \subseteq B$ علاوه بر این هیچ زای که در حالت اول صدق کند وجود ندارد. در این صورت به سادگی می‌توان دید که برای هر $a' \in A$

$$P_1 = (x_{(1.a').1}) + (x_{(2.a).1}; a \in A_i) + (x_{(1.b).2}; b \in B_i)$$

یک ایدال اول شامل $J([2] \times L. [2])$ می‌باشد که $P_1 \subseteq P$ بنابراین $P_1 = P$ و P_1 در شرایط ب صدق می‌کند زیرا در غیر این صورت مشابه حالت اول می‌توان یک ایدال اول وابسته از $J([2] \times L. [2])$ چنان یافت که به طور اکید مشمول در P باشد و همچنین برای هر $b' \in B'$

$$P_2 = (x_{(2.b').2}) + (x_{(2.a).1}; a \in A_i) + (x_{(1.b).2}; b \in B_i)$$

یک ایدال اول شامل $J([2] \times L. [2])$ است که $P_2 \subseteq P$ بنابراین $P_2 = P$ و مشابه قبل می‌توان دید که در این حالت P در شرط ج صدق می‌کند.

نتیجه ۴-۲. فرض کنید L یک مشبکه دلخواه متناهی باشد. در این صورت $W([2] \times L) = W(L) + 1$.

۵- مطالعه تحلیل آزاد $J([2] \times L. [2])$ به کمک ایدال $J(L. [2])$.

در این بخش به مطالعه تحلیل آزاد $J([2] \times L. [2])$ به کمک تحلیل آزاد $J(L. [2])$ می‌پردازیم. ابتدا قرار دهید

$$S_1 = \mathbb{K}[x_{l,j}; l \in L, j \in [2]]$$

$$S = \mathbb{K}[x_{(i.l).j}; i, j \in [2], l \in L] \text{ و}$$

اگر $Hom_{Lat}(L. [2]) = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ آن‌گاه به وضوح $J(L. [2]) = (u_{\theta_1}, \dots, u_{\theta_m})$ ایدال حلقه S_1

برای یک $a'' \in A$ یا این که

$$J([2] \times L. [2]) \subseteq P' \subseteq (x_{(2.a).1}; a \in A) + (x_{(1.b).2}; b \in B \setminus \{b'\}) + (x_{(1.a').1})$$

برای یک $b' \in B$

در این صورت با توجه به روابط (۶) و (۷) داریم:

$$J(L. [2]) \subseteq (x_{a,1}; a \in A \setminus \{a''\} \cup \{a'\}) + (x_{b,2}; b \in B).$$

یا

$$J(L. [2]) \subseteq (x_{a,1}; a \in A \cup \{a'\}) + (x_{b,2}; b \in B \setminus \{b'\}).$$

اما این یک تناقض با مفروضات ب است. پس P یک ایدال اول وابسته $J([2] \times L. [2])$ است. (ج) مشابه ب. ثابت می‌شود.

برعکس فرض کنید که P یک ایدال اول وابسته به $J([2] \times L. [2])$ باشد. نشان می‌دهیم که P در یکی از شرایط الف، ب یا ج صدق می‌کند. مجموعه‌های A و A' و B و B' مشمول در L موجودند که

$$P = (x_{(1.a).1}; a \in A) + (x_{(2.a).1}; a \in A') + (x_{(1.b).2}; b \in B) + (x_{(2.b).2}; b \in B').$$

چون $u_{\phi_{m+1}} \in P$ پس $A \neq \phi$ یا $B' \neq \phi$

به علاوه طبق روابط (۶) و (۷)

$$B \cap B' = \phi \text{ و } A \cap A' = \phi$$

$$J(L. [2]) \subseteq (x_{a,1}; a \in A \cup A') + (x_{b,2}; b \in B \cup B').$$

بنابراین $1 \leq i \leq r$ موجود است که

$$B_i \subseteq B \cup B' \text{ و } A_i \subseteq A \cup A'$$

در نتیجه برای $A \cup A'$ و $B \cup B'$ یکی از حالات زیر رخ می‌دهد.

حالت اول. $B_i \cap B' \neq \phi$ یا $A_i \cap A \neq \phi$. که در این حالت

$$P_1 = (x_{(1.a).1}; a \in A_i \cap A) + (x_{(2.a).1}; a \in A_i \cap A')$$

بنابراین تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ به صورت زیر است.

$$\dots \rightarrow \bigoplus S(-\beta'_{2.2j}) \xrightarrow{\tilde{a}_2} \bigoplus S(-\beta'_{1.2j}) \xrightarrow{\tilde{a}_1} S \rightarrow \frac{S}{I} \rightarrow 0 \quad (9)$$

که در آن $\beta'_{i.2j} = \beta_{i.j}$ لذا $pd\left(\frac{S}{I}\right) = pd\left(\frac{S_1}{J(L.[2])}\right)$ و اعداد بتی مدرج $\frac{S}{I}$ به سادگی با مراجعه به اعداد بتی قابل استخراج هستند.

همچنین برای محاسبه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J}$ با توجه به رابطه (۸)، کافی است در ماتریس‌های نگاشت‌های دیفرانسیل تحلیل $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ هر متغیر $x_{l.1}$ با $x_{(2.l).1}$ و هر متغیر $x_{l.2}$ با $x_{(1.l).2}$ جایگزین شود. در نتیجه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J}$ عبارت است از

$$\dots \bigoplus S(-\beta''_{2.j}) \xrightarrow{\tilde{a}_2} \bigoplus S(-\beta''_{1.j}) \xrightarrow{\tilde{a}_1} S \rightarrow \frac{S}{J} \rightarrow 0 \quad (10)$$

که در آن $\beta''_{i.j} = \beta_{i.j}$ اما برای محاسبه یک تحلیل آزاد از $\frac{S}{J([2] \times L.[2])}$ می‌توان از تکنیک مخروط نگارنده استفاده کرد. توجه کنید که تحلیل آزادی که برای $\frac{S}{J([2] \times L.[2])}$ کمک مخروط نگارنده محاسبه می‌شود لزوماً مینیمال نمی‌باشد اما همواره داریم:

$$pd\left(\frac{S}{J([2] \times L.[2])}\right) \leq \max\left\{pd\left(\frac{S}{I}\right), pd\left(\frac{S}{I:u_{\phi_{m+1}}}\right) + 1\right\}$$

با داشتن اعداد بتی $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ ، با توجه (۹) و (۱۰)، اعداد بتی $\frac{S}{I}$ و $\frac{S}{I:u_{\phi_{m+1}}}$ به سادگی محاسبه می‌شوند. به ویژه

$$pd\left(\frac{S}{I}\right) = pd\left(\frac{S}{I:u_{\phi_{m+1}}}\right) = pd\left(\frac{S_1}{J(L.[2])}\right)$$

پس

نتیجه ۵-۱. فرض کنید L یک مشبکه متناهی باشد. در این صورت

$$pd\left(\frac{S}{J([2] \times L.[2])}\right) \leq pd\left(\frac{S_1}{J(L.[2])}\right) + 1$$

$J([2] \times L.[2]) = (u_{\phi_1} \dots u_{\phi_m} u_{\phi_{m+1}})$ ایدال حلقه S است که در آن طبق نتیجه ۳،۲ برای هر $1 \leq i \leq m$

$u_{\phi_i} = \mu(u_{\theta_i})\pi(u_{\theta_i})$ و $S \rightarrow S_1$ همریختی‌های هستند که به ترتیب ضوابط زیر بیان می‌شوند.

$$\mu(x_{l.j}) = x_{(2.l).j}$$

$$\pi(x_{l.j}) = x_{(1.l).j}$$

همچنین $u_{\phi_{m+1}} = \prod_{l \in L} x_{(1.l).1} \prod_{l \in L} x_{(2.l).2}$ حال قرار دهید $I = (u_{\phi_1} \dots u_{\phi_m})$ و همریختی حلقه‌ای $\psi: S_1 \rightarrow S$ را که $\psi(x_{l.1}) = x_{(2.l).1}$ و $\psi(x_{l.2}) = x_{(1.l).2}$ در نظر می‌گیریم. با توجه به گزاره ۲،۲،۱ [1] می‌توان دید که (۸)

$$(J = I:u_{\phi_{m+1}} = (\psi(u_{\theta_1}) \dots \psi(u_{\theta_m}))$$

با در نظر گرفتن دنباله دقیق کوتاه زیر

$$0 \rightarrow \frac{S}{J}(-deg u_{\phi_{m+1}}) \rightarrow \frac{S}{I} \rightarrow \frac{S}{J([2] \times L.[2])} \rightarrow 0$$

می‌توان پایاهای عددی $\frac{S}{J([2] \times L.[2])}$ را به کمک پایاهای عددی $\frac{S}{I}$ و $\frac{S}{I}$ محاسبه نمود.

در ادامه در مورد تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2] \times L.[2])}$ بحث می‌کنیم.

فرض کنید

$$\dots \xrightarrow{d_3} \bigoplus S_1(-\beta_{2.j}) \xrightarrow{d_2} \bigoplus S_1(-\beta_{1.j}) \xrightarrow{d_1} S_1 \rightarrow \frac{S_1}{J(L.[2])} \rightarrow 0$$

$-S_1$ تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S_1}{J(L.[2])}$ باشد. برای محاسبه

تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ کافی است در ماتریس‌های نگاشت‌های دیفرانسیل تحلیل فوق هر متغیر $x_{l.j}$ با $x_{(1.l).j}x_{(2.l).j} = \mu(x_{l.j})\pi(x_{l.j})$

جایگزین شود.

$$J([n], [2]) = (u_{\theta_0}, \dots, u_{\theta_n}) =$$

$$\left(\prod_{i=1}^{i=t} x_{i,1} \prod_{j=t+1}^n x_{j,2} ; 0 \leq t \leq n \right)$$

در این صورت به وضوح برای $0 \leq i \leq n$

$$(u_{\theta_0}, \dots, u_{\theta_i}): u_{\theta_{i+1}} = (x_{i+1,2})$$

بنابراین ایدال $J([n], [2])$ دارای کسرهای خطی نسبت به مجموعه مولد داده شده است و طبق نتیجه ۲,۷ از مقاله [10]، تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S_1}{J([n], [2])}$ به صورت زیر است.

$$0 \rightarrow S_1^n(-n-1) \rightarrow S_1^{n+1}(-n) \rightarrow S_1$$

$$\rightarrow \frac{S_1}{J([n], [2])} \rightarrow 0$$

از طرفی بنا به رابطه (۹)، تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{I}$ به صورت زیر است.

$$0 \rightarrow S^n(-(2n+2)) \rightarrow S^{n+1}(-2n) \rightarrow S$$

$$\rightarrow \frac{S}{I}$$

همچنین تحلیل آزاد مینیمال از $\frac{S}{J}(-\deg(u_{\phi_{n+1}}))$ با توجه (۱۰) و این که در این جا $\deg(u_{\phi_{n+1}}) = 2n$ عبارت است از

$$0 \rightarrow S^n(-(3n+1)) \rightarrow S^{n+1}(-3n)$$

$$\rightarrow S(-2n) \rightarrow \frac{S}{J}(-2n)$$

$$\rightarrow 0$$

اگر تکنیک مخروط نگارنده را برای دنباله کوتاه دقیق

$$0 \rightarrow \frac{S}{J}(-2n) \rightarrow \frac{S}{I} \rightarrow \frac{S}{J([2] \times [n], [2])} \rightarrow 0$$

به کار ببریم، به تحلیل آزاد مدرج

$$0 \rightarrow S^n(-(3n+1)) \rightarrow S^n(-(2n+2)) \oplus S^{n+1}(-3n) \rightarrow S^{n+2}(-2n) \rightarrow S$$

$$\rightarrow \frac{S}{J([2] \times [n], [2])} \rightarrow 0$$

برای $\frac{S}{J([2] \times [n], [2])}$ دست می‌یابیم. حال چون در تحلیل آزاد مدرج فوق در درجات همولوژی متوالی مدول‌های آزاد با شیفیت درجه یکسان وجود ندارد، پس با توجه به قضیه ۷,۵ مرجع (۸)، تحلیل فوق یک تحلیل مینیمال است.

برهان. فرض کنید $t = pd\left(\frac{S_1}{J(L, [2])}\right)$ و $\beta'_{i,j}$ و $\beta_{i,j}$ و $\beta''_{i,j}$ و $\beta'_{i,2j}$ و $\beta''_{i,2j} = \beta_{i,j}$ که $\frac{S}{I}$ دنباله اعداد بتی $\beta_{i,j}$ دنباله اعداد بتی $\beta''_{i,j}$ و $\beta'_{i,2j}$ در این صورت طبق تکنیک مخروط نگارنده یک تحلیل آزاد مینیمال برای $\frac{S}{J([2] \times L, [2])}$ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$0 \rightarrow \oplus S(-(\beta''_{t,j} + 2|L|)) \rightarrow$$

$$\oplus S(-\beta'_{t,2j}) \oplus S(-(\beta''_{t-1,j} + 2|L|))$$

$$\rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \oplus S(-\beta'_{2,2j}) \oplus \oplus S(-(\beta''_{1,j} + 2|L|))$$

$$\rightarrow \oplus S(-\beta'_{1,2j})$$

$$\oplus S(-2|L|) \rightarrow S$$

$$\rightarrow \frac{S}{J([2] \times L, [2])} \rightarrow 0$$

که یک تحلیل آزاد با طول $t+1$ است پس $pd\left(\frac{S}{J([2] \times L, [2])}\right) \leq t+1$ در ادامه تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2] \times [n], [2])}$ را به کمک مخروط نگارنده به طور صریح حساب می‌کنیم.

قضیه ۲-۵. تحلیل آزاد مینیمال $\frac{S}{J([2] \times [n], [2])}$ عبارت است از

$$0 \rightarrow S^n(-(3n+1)) \rightarrow$$

$$S^n(-(2n+2)) \oplus S^{n+1}(-3n) \rightarrow$$

$$S^{n+2}(-2n) \rightarrow S \rightarrow \frac{S}{J([2] \times [n], [2])} \rightarrow 0$$

برهان. بنا به مطالب پیش از قضیه ابتدا باید $Hom_{Lat}([n], [2])$ را بیابیم. به سادگی می‌توان دید که

$$Hom_{Lat}([n], [2]) = \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$$

که در آن برای هر $0 \leq i \leq n$

$$\theta_i: [n] \rightarrow [2]$$

$$j \mapsto \begin{cases} 2 & i > j \\ 1 & i \leq j \end{cases}$$

پس

فهرست منابع

- [1] J. Herzog and T. Hibi (2011). Monomial ideals, Graduate Texts in Mathematics.
- [2] J. Herzog, T. Hibi (2005). Distributive lattices, bipartite graphs and alexanderduality. J. Algebraic Combin.
- [3] V. Ene, J. Herzog, F. Mohammadi (2011). Monomial ideals and toric rings of Hibi type arising from a finite poset. European J.
- [4] G. Fløystad, B.M. Greve and J. Herzog (2017). Letterplace and Co-letterplace ideals of poset. Journal of Pure and Applied Algebra.
- [5] J. Herzog, A.A. Qureshi and A. Shikama . Alexander duality for monomial ideals associated with isotone maps between posets, Journal of algebra and its applications.
- [6] M. Juhnke-Kubitzke, L. Katthän, S. Saeedi Madani (2016). Algebraic properties of ideals of poset homomorphisms, Journal of Algebraic Combinatorics.
- [7] L. Sharifan, A.A. Estaji, G. Malekbala. Primary decomposition of ideals of lattice homomorphisms, The Electronic Journal of Combinators, to appear.
- [8] I. Peeva, Graded. syzygies (2011). Algebra and Applications.
- [9] D. Eisenbud (1995). Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics.
- [10] L. sharifan and M. Varbaro (2008). Graded betti numbers of ideals with linear quotients, LE MATEMATICHE.