دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی بوسیله عملگر تراکمی F- تعمیم یافته مر-کلر، اندازه نافشردگی و روش هموتوپی اختلالات بهبود یافته

محسن ربانی [۱*]، رضا عرب [۲]

(۱) گروه ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران (نویسنده مسئول).
(۲) گروه ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۹۶/۰۶/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۲/۲۷

چکیده:
در این مقاله برای اثبات وجود جواب دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی، فضای جواب را فضای شامل همه دنباله‌های همگرا با حد متناهی که با نرم مناسب یک فضای باناخ است در نظر می‌گیریم. با ایجاد تعمیمی ازعملگرهای تراکمی مر-کلر بنام عملگرهای تراکمی F-تعمیم یافته مر-کلر[۲] و اندازه نافشردگی[۳] به اثبات چند قضیه در خصوص وجود نقطه ثابت می‌پردازیم. با این کارسعی می‌کنیم بعضی از قضایایی که توسط نویسندگان دیگر مانند [9,3] در خصوص وجود جواب بوسیله قضایای نقطه ثابت ارایه شده است را گسترش دهیم. سپس برای اعتبار و کاربرد قضایای پیشنهادیمان، یک نمونه از دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی را مورد نظر قرار داده و اثبات وجود جواب آن را به کمک قضایای فوق انجام می‌دهیم. در آخر برای توانمندی و جذابیت بیشتر این تحقیق، یک الگوریتم تکراری توسط روش هموتوپی اختلالات بهبود یافته و تجزیه ادومین [۴] پدید آورده و از آن برای بدست آوردن جواب تقریبی دستگاه نامتناهی معادلات انتگرال غیرخطی فوق استفاده می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: عملگر تراکمی مر-کلر، فضای باناخ، اندازه نافشردگی، معادلات انتگرال، هموتوپی اختلالات.

*عهده‌دار مکاتبات
Email: mrabbani@iausari.ac.ir

[2] .Meir-Keeler condensing
[3] .Measure of noncompactness
[4] .Adomian

۱. مقدمه و مطالب پایه‌ای

بحث معادلات انتگرال خطی و غیرخطی، دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی و در مواردی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی از اهمیت خاصی در علوم مختلف برخوردار است. در خصوص وجود جواب این نوع معادلات می‌توانید به $[6,5,4]$ مراجعه کنید. ما نیز در این مقاله ضمن گسترش بعضی از نتایج محققان دیگر (مانند منابعی که در چکیده اشاره شد) روی وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی و همچنین حل عددی آن کار خواهیم کرد. لذا ابتدا به معرفی بعضی از مفاهیم پایه و تعاریفی می‌پردازیم که در سراسراین مقاله مورد استفاده قرارخواهند گرفت.

$\mathbb{R}$ را مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$، $(E,\|.\|)$را فضای باناخ حقیقی با عنصر صفر، $\overline{B}(x,r)$ را گوی بسته به مرکز X با شعاع r و $\overline{B_r}$ را بیان‌گر $\overline{B}(0,r)$در نظر می‌گیریم. برای زیرمجموعه ناتهی X از E منظور از $convX$ و $\overline{X}$ به ترتیب بستار و پوسته محدب X می‌نامیم. علاوه بر این $\mathfrak{M}_E$ را خانواده زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار از E و $\mathfrak{A}_E$ را به عنوان زیر خانواده شامل همه زیرمجموعه‌های نسبتا فشرده از E در نظر می‌گیریم. در ادامه به تعریف اندازه نافشردگی می‌پردازیم که توسط $[11]$ ارایه شده است.

۱-۱ تعریف: به نگاشت $\mu:\mathfrak{M}_E\to\mathbb{R}_+$ اندازه نافشردگی در E گویند اگر در شرایط زیر صدق کند:

1°. خانواده $\ker\mu=\{X\in\mathfrak{M}_E:\mu(X)=0\}$ ناتهی باشد و $\ker\mu\in\mathfrak{A}_E$

2°. $\mathrm{X}\subset\mathrm{Y}\Rightarrow\mu(\mathrm{X})\le\mu(\mathrm{Y})$

3°. $\mu(\overline{\mathrm{X}})=\mu(\mathrm{X})$

4°. $\mu(conv\ \mathrm{X})=\mu(\mathrm{X})$

5°. $\mu\left(\lambda X+(1-\lambda)Y\right)\le\lambda\,\mu(X)+(1-\lambda)\,\mu(Y)$ $,\forall\lambda\in[0,1]$

6°. اگر $\{\mathrm{X_n}\}$ دنباله مجموعه‌های بسته از $\mathfrak{M}_E$ به طوری‌که $\mathrm{X_{n+1}}\subset\mathrm{X_n}$ برای $n=1,2,\ldots$ و $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n)=0$ آنگاه $\mathrm{X}_\infty=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{X_n}$ ناتهی است.

در 1°، خانواده $\ker\mu$ را هسته اندازه نافشردگی μ می‌نامند. یکی از خواص اندازه نافشردگی این است که $X_\infty\in\ker\mu$. در واقع از نامساوی $\mu(\mathrm{X}_\infty)=\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n\right)\le\mu(X_n)$ به ازای $n=1,2,\cdots$ نتیجه می‌شود که $\mu(\mathrm{X}_\infty)=0$ و از آنجا حکم بالا برقرار است. برای یافتن مطالب بیشتر در خصوص اندازه نافشردگی به $[12,11]$ مراجعه گردد.

قضیه نقطه ثابت داربو[1] یک تعمیم بسیار مهم از قضیه نقطه ثابت شودر[2] است که شامل قضیه وجودی نقطه ثابت باناخ نیز می‌باشد.

۱-۲ قضیه نقطه ثابت شودر $[1]$. فرض کنید C یک زیر مجموعه بسته و محدب از فضای باناخ E باشد، آنگاه هر نگاشت پیوسته و فشرده $T:C\to C$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

۱-۳ قضیه نقطه ثابت داربو $[2]$. فرض کنید Ω زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E باشد و همچنین $T:\Omega\to\Omega$ یک نگاشت پیوسته باشد به طوری‌که ثابت $k\in[0,1)$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

$$\mu(TX)\le k\,\mu(X),\ \forall X\subset\Omega,\ X\ne\varnothing$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت در مجموعه Ω است.

در سال 1969 مر-کلر $[15]$، قضیه نقطه ثابت را در فضای متریک $(\mathrm{X,d})$ برای نگاشت‌هایی مانند T با خاصیت زیر گسترش داده است.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ ; \qquad (۱)$$
$$\varepsilon\le d(x,y)<\varepsilon+\delta(\varepsilon)\Rightarrow$$
$$d(Tx,Ty)<\varepsilon,\forall x,y\in X$$

---
[1] .Darbo
[2].Schauder

شرط فوق را شرط تراکمی (یا انقباضی) از نوع مر–کلر می‌نامند. یک نتیجه مشهور به عنوان تابع مر–کلر می‌باشد، در [19] یک تعمیم آن به صورت زیر بیان شده است.

۱–٤ تعریف. فرض کنید Ω زیرمجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. گوییم عملگر $T:\Omega\to\Omega$ یک تابع تراکمی تعمیم یافته مر–کلر است، اگر داشته باشیم:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\,;\forall X\subset\Omega, \qquad (۲)$$
$$\varepsilon\le\mu(X)+\varphi(\mu(X))<\varepsilon+\delta(\varepsilon)\Rightarrow$$
$$\mu(TX)+\varphi(\mu(TX))<\varepsilon.$$

که در آن $\phi:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+$ تابع پیوسته است.

۱–۵ قضیه. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E بوده و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. همچنین اگر $T:\Omega\to\Omega$ عملگر پیوسته و تعمیم یافته تراکمی مر–کلر باشد، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت دارد و مجموعه نقاط ثابت T در Ω فشرده‌اند.

اثبات [19].

۲. قضیه جدید نقطه ثابت برای F–تعمیم یافته از عملگر تراکمی مر–کلر

در این بخش ابتدا دو تعریف زیر را مطرح می‌کنیم.

۲–۱ تعریف: فرض کنید $\mathbb{F}$ کلاس همه توابع پیوسته به صورت $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$ باشد که در شرط زیرصدق می‌کند:

$$F(0)=0<F(t),\forall t>0.$$

۲–۲ تعریف: فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی از فضای باناخ E و μ یک اندازه نافشردگی روی E باشد. گوییم عملگر $T:C\to C$، یک عملگر F– تعمیم یافته مر–کلر است، اگر برای هر $\varepsilon>0$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon)>0$ به طوری‌که برای هر $X\subseteq C$ داشته باشیم: (۳)

$$\varepsilon\le F(\mu(X))<\varepsilon+\delta(\varepsilon)\Rightarrow F(\mu(TX))<\varepsilon.$$

که در آن $F\in\mathbb{F}$.

اولین قضیه اصلی‌مان بصورت زیر می‌باشد.

۲–۳ قضیه. فرض کنید C یک زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E بوده و μ یک اندازه نافشردگی دلخواه روی E باشد. همچنین اگر $T:C\to C$ یک عملگر پیوسته و F–تعمیم یافته مر–کلر باشد، آنگاه T حداقل یک نقطه ثابت در C دارد.

اثبات. فرض کنید $C_0=C$، دنباله $\{C_n\}$ را طوری می‌سازیم که $C_{n+1}=Conv(TC_n)$ برای $n\ge0$. همچنین داریم:

$$\mathrm{TC_0}=\mathrm{TC}\subseteq\mathrm{C}=\mathrm{C_0},$$
$$\mathrm{C_1}=\mathrm{Conv}(\mathrm{TC_0})\subseteq\mathrm{C}=\mathrm{C_0},$$

علاوه بر این با ادامه روند فوق خواهیم داشت:

$$C_0\supseteq C_1\supseteq\cdots\supseteq C_n\supseteq C_{n+1}\supseteq\cdots$$

اگر عدد طبیعی $\mathrm{N}\ge0$ وجود داشته باشد به طوری‌که $T(C_N)=0$، آنگاه C_N فشرده است. بنابراین از قضیه ۱–۲ نتیجه می‌شود که T یک نقطه ثابت دارد.

حال فرض می‌کنیم که $\mu(C_n)>0,\forall n\ge0$، در این صورت با تعریف $\varepsilon_n=F(\mu(C_n))$، و $\delta_n=\delta(\varepsilon_n)>0$ و همچنین بوسیله تعریف C_n خواهیم داشت: $\varepsilon_n<\varepsilon_n+\delta_n$

$$\varepsilon_{n+1}=F(\mu(C_{n+1}))=F(\mu(Conv(TC_n)))$$
$$=F(\mu(TC_n))<F(\mu(C_n))=\varepsilon_n$$

علاوه بر این $\{\varepsilon_n\}$ یک دنباله کاهشی و مثبت از اعداد حقیقی است لذا، $\gamma\ge0$ وجود دارد به طوری‌که $\varepsilon_n\to\gamma,n\to\infty$.

حال ادعا می‌کنیم $\gamma=0$ است. چون در غیر این صورت اگر $\gamma>0$ باشد، آنگاه وجود دارد n_0 ی که به ازای $n>n_0$ نتیجه می‌دهد که $\gamma\le\varepsilon_n\le\gamma+\delta(\gamma)$، از طرفی طبق تعریف عملگر تراکمی مر–کلر $\varepsilon_{n+1}<\gamma$ بنابراین $\varepsilon_{n+1}\le\varepsilon_n$ می‌گردد که تناقض با رابطه بالاست. بنابراین $\gamma=0$ و از آنجا

$\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$. چون دنباله $\{C_n\}$ تو در تو است لذا از شرط $(\overset{\circ}{6})$ تعریف ۱-۱، نتیجه می‌گیریم که $C_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \varnothing$ و همچنین در C بسته و محدب می‌باشد. علاوه بر این می‌دانیم که C_∞ عضوی از $\ker \mu$ است. بنابراین C_∞ فشرده بوده و تحت نگاشت T تغییرناپذیراست. از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود که T دارای نقطه ثابت در C_∞ است و چون $C_\infty \subset C$، پس T دارای نقطه ثابت در C می‌باشد.

۲-٤ نتیجه. اگر $\mathrm{F(t)} = t$ در قضیه ۲-۳ اختیار گردد، آنگاه قضیه ۲-۲ در [3] بدست می‌آید.

۲-۵ نتیجه. اگر در قضیه۲-۳، $F(\mathrm{t}) = t + \varphi(\mathrm{t}), \forall \mathrm{t} \in [0,\infty)$ که در آن $\varphi : R_+ \to R_+$ تابع پیوسته با شرط $\varphi(0) = 0$ و $\varphi(\mathrm{t}) > 0$ به ازای هر $t > 0$ اختیار گردد، آنگاه قضیه ۱-۵ بدست می‌آید. حال به یک نتیجه از نقطه ثابت از نوع انتگرالی می‌پردازیم.

۲-٦ نتیجه. فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از فضای باناخ E و $T : C \to C$ یک تابع پیوسته باشد. همچنین فرض کنید برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta(\varepsilon) > 0$ به طوری‌که برای هر $X \subseteq C$ داشته باشیم

$$\varepsilon \le \int_0^{\mu(\mathrm{X})} f(\mathrm{s})\,ds \le \varepsilon + \delta(\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\int_0^{\mu(\mathrm{TX})} f(\mathrm{s})\,ds < \varepsilon$$

که در آن μ یک اندازه نافشردگی دلخواه است و $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر لبگ، جمع‌پذیر، نامنفی به طوری‌که $\forall \varepsilon > 0, \int_0^{\varepsilon} f(\mathrm{s})\,ds > 0$ آنگاه T حداقل دارای یک نقطه ثابت در C است.

اثبات. فرض کنید $F(\mathrm{t}) = \int_0^t f(\mathrm{s})\,ds > 0, \forall t > 0$ و سپس قضیه۲-۳ را بکار ببرید.

۳. اندازه نافشردگی هاسدورف[1].

دراین بخش اندازه نافشردگی هاسدورف را در دنباله فضاها و حل‌پذیری دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی در فضای c_0 مورد توجه قرار می‌دهیم. طبق [10] اندازه نافشردگی هاسدورف در فضای $(c_0, \|.\|_{c_0})$ را به χ نمایش داده و به صورت زیر فرمول‌بندی می‌کنیم:

$$\chi(\mathrm{D}) = \lim_{n\to\infty}[\sup_{x(\mathrm{t})\in \mathrm{D}}(\max_{k\ge n}|x_k(\mathrm{t})|)] \qquad (۴)$$

جایی‌که $\mathrm{x(t)} = (x_i(t))_{i=1}^{\infty} \in c_0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+$ و $D \in \mathfrak{M}_{c_0}$.

در این مقاله وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی در فضای c_0 را با استفاده از عملگرهای تراکمی F- تعمیم یافته مر-کلر گسترش می‌دهیم. بدین منظور دستگاه معادلات انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

(۵)

$$\begin{cases} x_n(\mathrm{t}) = \mathrm{f}_n\left(t, x(\mathrm{t}), \int_0^{\infty} g_n(t,s,x(\mathrm{s}))\,ds\right), \\ x(\mathrm{t}) = (x_i(t))_{i=1}^{\infty}, \; x_i(t) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \\ \qquad i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

فرض کنید:

(A_1). توابع $f_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{\infty} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\; (n \in \mathbb{N})$ پیوسته و

$$K_n = \sup_n\left\{\left|f_n(t, x^0(t), 0)\right| : t \in \mathbb{R}_+\right\} < \infty$$

جایی‌که $x^0(\mathrm{t}) = (x_n^0(t))_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ و $x_n^0(t) = 0$ به ازای هر $t \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$. همچنین توابع پیوسته $a_n, b_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \, (n \in \mathbb{N})$ وجود دارند به طوری‌که:

$$|f_n(t, x(t), p(t)) - f_n(t, y(t), q(t))| \le$$
$$a_n(t)\max_{i\ge n}|x_i(t) - y_i(t)| + b_n(t)|p(t) - q(t)|,$$

[1].Hausdorff

که در آن

$$x(t)=(x_i(t))_{i=1}^{\infty},\ y(t)=(y_i(t))_{i=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty}.$$

(A_2). توابع $g_n:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{\infty}\to\mathbb{R}\ \ (n\in\mathbb{N})$ پیوسته و تابع G_n وجود دارد به طوری‌که:

$$G_n=sup\left\{b_n(t)\left|\int_0^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds\right|:t,s\in\mathbb{R}_+\right\}.$$

همچنین

$$\lim_{t\to\infty}\left\{b_n(t)\left|\int_0^{\infty}[g_n(t,s,x(s))-g_n(t,s,y(s))]ds\right|\right\}=0,$$

و

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left\{b_n(t)\left|\int_T^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds\right|;t\in\mathbb{R}_+\right\}\right\}=0.$$

(A_3). تعریف عملگر $X:\mathbb{R}_+\times c_0\to c_0$ که به صورت زیر عمل می‌کند:

$$X(t,x(t))=(Xx)(t)=$$
$$(f_1(t,x(t),v_1(x)),\ f_2(t,x(t),v_2(x)),...),$$

که در آن $v_n(x)=\int_0^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds$.

(A_4). روابط $\underset{n\to\infty}{K_n\to 0}$ و $\underset{n\to\infty}{G_n\to 0}$ و همچنین $SupK_n=K$، $SupG_n=G$ و $\sup\{a_n(t):t\in R_+\}=A_0$ که در آن $0<A_0<1$ برقرارند.

(A_5).اگر $F\in\mathbb{F}$ و $t\in[0,\infty]$ آنگاه نامساوی $F(A_0t)\le A_0F(t)$ برقرار است.

۱-۳ قضیه. تحت فرضیات $(A_5)-(A_1)$ دستگاه نامتناهی(۵) حداقل یک جواب به صورت زیر دارد

$$x(t)=(x_i(t))_{i=1}^{\infty}\in c_0,\ t\in\mathbb{R}_+$$

و همچنین $x_i(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ برای هر $i\in\mathbb{N}$.

اثبات. با استفاده از(۵) و $(A_5)-(A_1)$ برای هر $t\in\mathbb{R}_+$ داریم:

$$\|x(t)\|_{c_0}=\max_{n\ge1}\left|f_n\left(t,x(t),\int_0^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds\right)\right|$$
$$\le\max_{n\ge1}\left|f_n\left(t,x(t),\int_0^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds\right)-f_n(t,x^0(t),0)\right|$$
$$+\max_{n\ge1}\left|f_n(t,x^0(t),0)\right|$$
$$\le\max_{n\ge1}\left\{a_n(t)\max_{i\ge n}|x_i(t)|+b_n(t)\left|\int_0^{\infty}g_n(t,s,x(s))ds\right|\right\}$$
$$+k_n$$
$$\le A_0\|x(t)\|_{c_0}+G+k.$$

بنابراین رابطه $(1-A_0)\|x(t)\|_{c_0}\le G+k$ و از آنجا نامساوی $\|x(t)\|_{c_0}\le\dfrac{G+k}{1-A_0}=d$ بدست می‌آید.

فرض کنید $\overline{B}=\overline{B}(x^0(t),d)$ یک گوی بسته به مرکز $x^0(t)$ و شعاع d باشد. بنابراین $\overline{B}$ زیرمجموعه ناتهی، کراندار، بسته و محدب از c_0 است.

عملگر $X=(X_i)$ روی $C(\mathbb{R}_+,\overline{B})$ را به ازای هر $t\in\mathbb{R}_+$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(X\ x)(t)=\{(X_i\ x)(t)\}=\{f_i(t,x(t),v_i(x))\},$$

که در آن

$$x(t)=(x_i(t))\in\overline{B},\ x_i(t)\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}),\forall i\in\mathbb{N}.$$

چون برای هر $t\in\mathbb{R}_+$ تعریف کرده‌ایم، لذا بوسیله فرض (A_3) خواهیم داشت:

$$\lim_{i\to\infty}(X_i x)(t)=\lim_{i\to\infty}f_i(t,x(t),v_i(x))=0,$$

بنابراین $(Xx)(t)\in c_0$.

چون $\|(Xx)(t)-x^0(t)\|_{c_0}\le d$ پس X یک خود نگاشت روی $\overline{B}$ است. ما باید نشان دهیم که X پیوسته است یعنی عضو $C(\mathbb{R}_+,\overline{B})$ می‌باشد. بدین منظور فرض کنید $\varepsilon>0$ دلخواه و نیز $y(t)=(y_i(t))_{i=1}^{\infty}$ و $z(t)=(z_i(t))_{i=1}^{\infty}\in c_0$ با شرط

$t \in \mathbb{R}_+$ داده شده باشند. برای هر $\| y - z \|_{c_0} < \frac{\varepsilon}{2A_0}$ خواهیم داشت:

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| =$$
$$|f_n(t, y(t), v_n(y)) - f_n(t, z(t), v_n(z))|$$
$$\le A_0 \max_{i \ge n} |y_i(t) - z_i(t)| + b_n(t)|v_n(y) - v_n(z)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + b_n(t)\left|\int_0^\infty [g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))]ds\right|$$

با استفاده از (A_2) می‌توانیم $T > 0$ انتخاب کنیم به طوری‌که $t > T$

$$\left|b_n(t)\int_0^\infty [g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))]ds\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

از این‌رو $|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| < \varepsilon$

حال فرض می‌کنیم $t \in [0, T]$، به کمک فرضیات بالا خواهیم داشت:

$$|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| \le A_0 \max_{i \ge n} |y_i(t) - z_i(t)|$$
$$+ b_n(t)\left|\int_T^\infty [g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))]ds\right|$$
$$+ b_n(t)\left|\int_0^T [g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))]ds\right|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2} + \mathrm{BgT} + b_n(t)\left|\int_T^\infty [g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))]ds\right|$$

که در آن $B = \sup_n \{b_n(t) : t \in [0,T]\}$ و
$$g = \sup_n \{|g_n(t,s,y(s)) - g_n(t,s,z(s))| : t,s \in [0,T]\}.$$

از پیوستگی g_n روی مجموعه فشرده $[0,T] \times [0,T] \times c_0$ به $g \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ دست می‌یابیم. علاوه بر این از (A_2) می‌توانیم T را طوری انتخاب کنیم که آخرین جمله تقریب بالا بقدر کافی کوچک باشد. همچنین وقتی که $\| y(t) - z(t) \|_{c_0} \to 0$ آنگاه $|(X_n y)(t) - (X_n z)(t)| \to 0$. بدین ترتیب X روی $\overline{B} \subset c_0$ پیوسته است. اکنون باید ثابت کنیم که X یک عملگر تراکمی $F-$تعمیم یافته مر-کلر است! بدین منظور برای هر $\varepsilon > 0$ ما باید $\delta > 0$ را طوری پیدا کنیم که شرط زیر برقرار گردد:

$$\varepsilon \le F(\chi(\overline{B})) < \varepsilon + \delta \Rightarrow F(\chi(X(\overline{B}))) < \varepsilon. \tag{۶}$$

اما داریم:

$$F(\chi(X(\overline{B}))) =$$
$$F\left(\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x(t)\in\overline{B}}\left\{\max_{k\ge n}|f_k(t,x(t),v_k(x))|\right\}\right]\right)$$
$$\le F\left(\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x(t)\in\overline{B}}\left\{\max_{k\ge n}\left(\begin{array}{l} a_n(t)\max_{i\ge k}|x_i(t)| + K_k \\ b_k(t)\left|\int_0^\infty g_k(t,s,x(s))ds\right| \end{array}\right)\right\}\right]\right)$$
$$\le A_0 F(\chi(\overline{B})).$$

بنابراین به نامساوی $F(\chi(X(\overline{B}))) \le A_0 F(\chi(\overline{B})) < \varepsilon$ رسیده‌ایم که از آن نتیجه می‌شود $F(\chi(X(\overline{B}))) < \frac{\varepsilon}{A_0}$. حال با انتخاب $\delta = \frac{\varepsilon(1 - A_0)}{A_0}$، به نامساوی $\varepsilon \le F(\chi(\overline{B})) < \varepsilon + \delta$ دست می‌یابیم که اثبات شرط(۶) کامل است و X یک $F-$تعمیم عملگر تراکمی مر-کلر روی $\overline{B} \subset c_0$ می‌باشد. لذا X در تمام شرایط قضیه۲-۳ صدق می‌کند ودر نتیجه دارای نقطه ثابت در $\overline{B}$ است و از آنجا دستگاه(۵) دارای یک جواب در فضای c_0 می‌باشد.

۳-۲مثال. دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_n(t) = \frac{1}{t + n^2} + \sum_{i=n}^\infty \frac{|x_i(t)|}{2i^2} \tag{۷}$$
$$+ \frac{1}{n^3 e^t}\int_0^\infty \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^\infty x_i(s))}{(s+1)^2\left(2 + \sin(\sum_{i=1}^\infty x_i(s))\right)} ds, n \in \mathbb{N}$$

در این مساله توابع f_n، v_n و g_n عبارتند از

$$f_n(t, x(t), v_n(x(t))) = \frac{1}{t + n^2} + \sum_{i=n}^\infty \frac{|x_i(t)|}{2i^2}$$
$$+ \frac{1}{n^3 e^t} v_n(x(t)), v_n(x(t)) = \int_0^\infty g_n(t, s, x(s))\, ds,$$

$$g_n(t,s,x(s)) = \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2\left(2+\sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)}.$$

اگر $x(t) \in c_0$ آنگاه $f_n(t, x(t), v_n(x(t))) \in c_0$.
حال اگر $y(t) = (y_i(t)) \in c_0$ آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&| f_n(t, x(t), v_n(x(t))) - f_n(t, y(t), v_n(y(t)))| \\
&\le \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2i^2} | x_i(t) - y_i(t)| \\
&+ \frac{1}{n^3 e^t} | v_n(x(t)) - v_n(y(t))| \\
&\le (\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2i^2}) \max_{i\ge n} | x_i(t) - y_i(t)| \\
&+ \frac{1}{n^3 e^t} | v_n(x(t)) - v_n(y(t))| \\
&\le \frac{\pi^2}{12} \max_{i\ge n} | x_i(t) - y_i(t)| \\
&+ \frac{1}{n^3 e^t} | v_n(x(t)) - v_n(y(t))|
\end{aligned}$$

در اینجا $a_n(t) = \frac{\pi^2}{12}$ و $b_n(t) = \frac{1}{n^3 e^t}$. از طرفی $0 < A_0 < 1$ و

به عبارت دیگر $k_n = \sup_n \left\{ \left| \frac{1}{t+n^2} \right| ; t \in \mathbb{R}_+ \right\} \le 1$

برای $n \to \infty$، آنگاه $K_n \to 0$. همچنین

$$G_n = \sup_n \left\{ \frac{1}{n^3 e^t} \left| \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2\left(2+\sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)} ds \right| ; t, s \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

$$\le \sup_n \left\{ \frac{1}{n^3 e^t} 2 \left| \int_0^{\infty} \frac{1}{(s+1)^2} ds \right| ; t \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

$$\le \sup_n \left\{ \frac{2}{n^3 e^t} ; t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \frac{2}{n^3},$$

بنابراین برای $n \to \infty$، آنگاه $G_n \to 0$. علاوه بر این برای $n \to \infty$ داریم

$$\left| \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} [g_n(t,s,x(s)) - g_n(t,s,y(s))] ds \right| \to 0.$$

پیوستگی f_n و g_n بدیهی است و بدین ترتیب تمام فرضیات $(A_5)-(A_1)$ برقرار می‌باشند. با استفاده از قضیه۴-۱ نتیجه می‌گیریم که دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی(۷) دارای یک جواب در فضای c_0 است. حال که اطمینان یافته‌ایم دستگاه فوق دارای جواب است، به ایجاد یک الگوریتم تکراری برای دستیابی به یک جواب تقریبی ازدستگاه(۷) می‌پردازیم.

٤. ایجاد الگوریتم تکراری با تلفیق روش هموتوپی اختلالات اصلاح شده و چندجمله‌ای‌های ادومین

روش‌های مختلفی برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی توسط محققان مختلفی ارایه شده است که به عنوان نمونه می‌توان به روش‌هایی مانند استفاده از توابع پایه در روش تصویری، استفاده از تبدیل دیفرانسیلی، حساب تغییرات تکراری، هم محلی گسسته، تجزیه ادومین به تر تیب در [22, 21, 20,13,9] اشاره کرد. اما روش هموتوپی اختلالات که یک روش نیمه تحلیلی است در سال‌های اخیر کارایی‌هایی در حل مسایل غیرخطی از خود نشان داده است در این خصوص به منابع [14,8,7] مراجعه کنید. همچنین در [18,17] به بهبود روش هموتوپی و ایجاد دیدگاه جدید یعنی استفاده از بخش‌های فقط غیرخطی برای گسستن مساله غیرخطی بزرگتر به مسایل کوچکتر صورت گرفته است. در اینجا ازروش هموتوپی اختلالات تعریف شده در [18,17] در حالت چندمتغیره و چندجمله‌ای‌های ادومین برای حل مثال۳-۲ استفاده می‌کنیم. لذا ابتدا دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی مثال فوق را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x_n(t) - \sum_{i=n}^{\infty} \frac{|x_i(t)|}{2i^2} - \frac{1}{n^3 e^t} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_n(s)) + \sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))}{(s+1)^2\left(2+\sin(\sum_{i=1}^{\infty} x_i(s))\right)} ds - \frac{1}{t+n^2} = 0, \ n \in \mathbb{N} \qquad (۸)$$

تعریف کلی از معادله(۸) می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdots) - h(t,n) = 0 \qquad (۹)$$

که در آن A یک عملگر غیرخطی کلی و h تابع معلوم می‌باشد. عملگر A را به دو عملگر غیرخطی N_1 و N_2 و همچنین تابع h را به دو تابع h_1 و h_2 تبدیل می‌کنیم. به عبارت دیگر داریم

$$N_1(x_1,x_2,\dots,x_n,\cdots)+N_2(x_1,x_2,\dots,x_n,\cdots)-h_1(t,n)-h_2(t,n)=0. \quad (۱۰)$$

البته بسته به نوع مساله هر یک از عملگرهای غیرخطی می‌توانند طوری انتخاب شوند که روی تعداد مشخصی از متغیرها اثر کنند، حتی می‌توانند بعضی از آنها خطی نیز باشند. حال طبق(۱۰) به تعریف هموتوپی که بر خواسته از مفهوم توپولوژی است، خواهیم پرداخت. (۱۱)

$$H(v,\ p)=N_1(v_1,v_2,\dots,v_n,\cdots)-h_1(t,n)+p(N_2(v_1,v_2,\dots,v_n,\cdots)-h_2(t,n))=0$$

که در آن $p\in[0,1]$ به عنوان پارامتر و v_iها به عنوان تقریب x_iها به ازای $i=1,2,\dots$ می‌باشند و هر یک از v_iها به صورت سری زیر تعریف می‌شوند:

$$x_n(\mathrm{t})=v_n(\mathrm{t})=\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(\mathrm{t}) \quad (۱۲)$$

با تغییر پارامتر p از صفر تا یک در رابطه(۱۱) از حدس اولیه $N_1(v_1,v_2,\dots,v_n,\cdots)-h_1(t,n)=0$ به جواب مساله به صورت $A(v_1,v_2,\dots,v_n,\cdots)-h(t,n)=0$ می‌رسیم. یعنی $x_n(\mathrm{t})=\lim_{p\to1}v_n(\mathrm{t})$.

حال برای مساله(۸) عملگرهای N_1 و N_2 و تابع h را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$N_1(x_1,x_2,\dots,x_n,\cdots)=x_n(\mathrm{t}), \quad (۱۳)$$

$$N_2(x_1,x_2,\dots,x_n,\cdots)=-\sum_{i=n}^{\infty}\frac{|x_i(\mathrm{t})|}{2i^2}-\frac{1}{n^3e^t}\int_0^{\infty}\frac{sin(x_n(s))+sin(\sum_{i=1}^{\infty}x_i(s))}{(\mathrm{s}+1)^2\left(2+sin(\sum_{i=1}^{\infty}x_i(s))\right)}ds,$$

$$h(\mathrm{t,n})=\frac{1}{t+n^2}=h_1(t,n)+h_2(t,n).$$

بنابراین در تعریف هموتوپی(۱۱) داریم:

$$\left(v_n(\mathrm{t})-h_1(t,n)\right)+p\left(-\sum_{i=n}^{\infty}\frac{|v_i(\mathrm{t})|}{2i^2}-\frac{1}{n^3e^t}\int_0^{\infty}\frac{sin\,(v_n(s))+sin\,(\sum_{i=1}^{\infty}v_i(s))}{(\mathrm{s}+1)^2\left(2+sin\,(\sum_{i=1}^{\infty}v_i(s))\right)}ds-h_2(t,n)\right)=0, \quad (۱۴)$$

حال(۱۲) را در(۱۴) جای‌گذاری می‌کنیم،

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(\mathrm{t})-h_1(t,n)\right)+p\left(-\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\left|\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(\mathrm{t})\right|}{2i^2}-\frac{1}{n^3e^t}\int_0^{\infty}\frac{sin(\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(s))+sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))}{(\mathrm{s}+1)^2\left(2+sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))\right)}ds-h_2(t,n)\right)=0 \quad (۱۵)$$

برای رهایی از بخش غیرخطی در(۱۵) از چندجمله‌ای‌های ادومین به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\left|\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(\mathrm{t})\right|}{2i^2}=\sum_{j=0}^{\infty}p^j A_{j,n}(\mathrm{t}),\\ \frac{sin(\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(s))+sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))}{\left(2+sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))\right)}=\\ \quad\sum_{j=0}^{\infty}p^j B_{j,n}(s),\\ f(t,n)=\frac{1}{n^3e^t}.\end{cases}$$

که در آن $A_{j,n}$ و $B_{j,n}$ چندجمله‌ای‌های ادومین هستند و با فرضیات فوق رابطه(۱۵) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(\mathrm{t})-h_1(t,n)\right)+ \quad (۱۶)$$

$$p\left(-\sum_{j=0}^{\infty} p^j A_{j,n}(t) - f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}\sum_{j=0}^{\infty} p^j B_{j,n}(s)ds - h_2(t,n)\right)=0$$

با مرتب‌سازی رابطه(۱۶) بر حسب توان‌های p خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}
&\left(v_{0,n}(t)-h_1(t,n)\right)\\
&+p\left(v_{1,n}(t)-A_{0,n}(t)-f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}B_{0,n}(s)ds-h_2(t,n)\right)\\
&+p^2\left(v_{2,n}(t)-A_{1,n}(t)-f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}B_{1,n}(s)ds\right)\\
&\vdots\\
&+p^j\left(v_{j,n}(t)-A_{j-1,n}(t)-f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}B_{j-1,n}(s)ds\right)+\cdots=0,
\end{aligned}$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب توان‌های p در رابطه اخیر به الگوریتم تکراری زیر می‌رسیم:

۴–۱الگوریتم.

$$\begin{cases}
v_{0,n}(t)=h_1(t,n),\\
v_{1,n}(t)=h_2(t,n)+A_{0,n}(t)+f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}B_{0,n}(s)ds,\\
v_{j,n}(t)=A_{j-1,n}(t)+f(t,n)\int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^2}B_{j-1,n}(s)ds,\ j\ge 2
\end{cases}$$

در الگوریتم فوق $f(t,n)=\frac{1}{n^3e^t}$ و $h(t,n)=\frac{1}{t+n^2}$ که از روی آن برای سادگی محاسبات $h_1(t,n)$ و $h_2(t,n)$ تعیین می‌گردند. همچنین $A_{j,n}$ و $B_{j,n}$ چندجمله‌ای‌های ادومین از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases}
A_{k,n}(t)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dp^k}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\left|\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(t)\right|}{2i^2}\right)_{p=0},\\
B_{k,n}(s)=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{\sin(\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,n}(s))+\sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))}{\left(2+\sin(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}p^j v_{j,i}(s))\right)}\right)_{p=0}.
\end{cases}$$

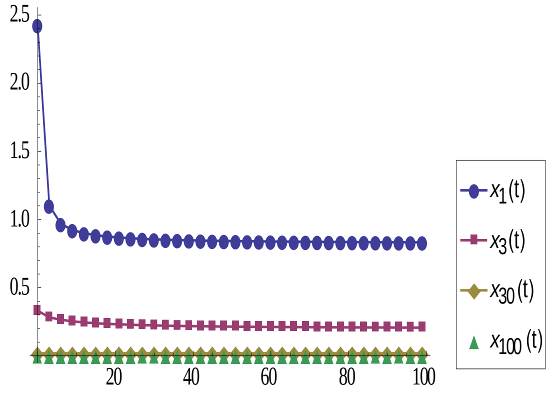
به عنوان نمونه $A_{0,n}(t)$ و $B_{0,n}(s)$ عبارتند از:

$$A_{0,n}(t)=\sum_{i=n}^{\infty}\frac{v_{0,i}(t)}{2i^2},$$
$$B_{0,n}(s)=\frac{\sin(v_{0,n}(s))+\sin(\sum_{i=1}^{\infty}v_{0,i}(s))}{\left(2+\sin(\sum_{i=1}^{\infty}v_{0,i}(s))\right)}. \tag{۱۷}$$

در محاسبات فوق برای بدست آوردن چندجمله‌ای‌های ادومین در برنامه‌نویسی و استفاده از نرم‌افزار متمتیکا، حد بالای i را عدد بزرگی مثل m اختیار می‌کنیم. برای بدست آوردن جواب تقریبی دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی(۷) در الگوریتم۴–۱، با فرض $m=2000$ و $v_{0,n}(t)=h_1(t,n)=1$ به ازای $n\in\mathbb{N}$ آنگاه $h_2(t,n)=-1+h(t,n)$ و طبق رابطه(۱۲) مولفه‌های جواب تقریبی را تا دو جمله یعنی به صورت $x_n(t)=v_n(t)=v_{0,n}(t)+v_{1,n}(t)$ به ازای چند n متفاوت ارایه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
&x_1(t)=v_1(t)=v_{0,1}(t)+v_{1,1}(t)=\\
&\quad 0.82246703+0.60460294e^{-t}+\frac{1}{1+t},\\
&x_3(t)=v_3(t)=v_{0,3}(t)+v_{1,3}(t)=\\
&\quad 0.19746703+0.02239270e^{-t}+\frac{1}{9+t},\\
&x_{30}(t)=v_{30}(t)=v_{0,30}(t)+v_{1,30}(t)=\\
&\quad 0.00840317+0.0000028e^{-t}+\frac{1}{3600+t},\\
&x_{100}(t)=v_{100}(t)=v_{0,100}(t)+v_{1,100}(t)=\\
&\quad 0.00502508+6.04602937\times10^{-7}e^{-t}+\frac{1}{10000+t},
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

با رسم چندجمله دلخواه مانند $x_1(t), x_3(t), x_{30}(t), x_{100}(t)$ از جملات دنباله $x(t)=(x_i(t))_{i=1}^{\infty}$، نشان داده می‌شود که برای iهای بزرگتر $x_i(t)$ به محور افقی نزدیکتر می‌شوند. یعنی جملات دنباله به تابع صفر میل می‌کند(به شکل–۱، مراجعه نمایید).



شکل ۱ – نمایش رفتار جملات دنباله

بنابراین با توجه به شکل-۱، $\lim_{i\to\infty} x_i(t) \to 0$ و در نتیجه $x(t)=(\mathrm{x}_i(t))_{i=1}^{\infty} \in c_0$. یعنی جواب دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی(۸) را در فضای c_0 به صورت یک دنباله با جملات (۱۸) ارایه کرده‌ایم.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله با استفاده از یک تعمیم مناسب از عملگر تراکمی مر-کلر و اندازه نافشردگی توانسته‌ایم ضمن وجود جواب برای دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی نامتناهی بعضی ازکارهای نویسندگان دیگر را نیزگسترش دهیم. از طرفی از لحاظ عددی دست به یافتن آن جواب زده‌ایم که بر جذابیت و توانمندی روش‌مان می‌افزاید. انتظار می‌رود که روند پیشنهادی این مقاله برای دستگاه معادلات انتگرال چندگانه غیرخطی نامتناهی نیز موثر واقع شود.

فهرست منابع

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan (2004). Fixed point theory and applications, Cambridge University Press.

[2] A. Aghajani, J. Banas, N. Sabzali (2013). Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.

[3] A. Aghajani, M. Mursaleen, A. Shole Haghighi (2015). Fixed point theorems for Meir-Keeler condensing operators via measure of noncompactness, Acta Mathematica Scientia.

[4] R. Arab (2015). Some fixed point theorems in generalized Darbo fixed point theorem and the existence of solutions for system of integral equations, J. Korean Math

[5] R. Arab, R. Allahyari and A. S. Haghighi (2014). Existence of solutions of infinite systems of integral equations in two variables via measure of noncompactness, Appl. Math. Comput.

[6] R. Arab, R. Allahyari and A.S. Haghighi (2015). Existence of solutions for some classes of integro-differential equations via measure of noncompactness, Electron. J. Qual Theory Differ.

[7] Z. Ayati, J. Biazar (2015). On the convergence of Homotopy perturbation method, Journal of the Egyptian Mathematical Society.

[8] E. Babolian, A. Azizi, J. Saeidian, (2009). Some notes on using the homotopy perturbation method for solving time-dependent differential equations, Mathematical and Computer Modelling.

[9] E. Babolian, M. Mordad (2011). A numerical method for solving systems of linear and nonlinear integral equations of the second kind by hat basis functions, Computers & Mathematics with Applications.

[10] J. Banas (1981). Measures of noncompactness in the space of continuous tempered functions, Demonstratio Math.

[11] J. Banas, K. Goebel (1980). Measures of Noncompactness in Banach Spaces, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Dekker, New York.

[12] J. Banaś and M. Mursaleen, (2014). Sequence spaces and measures of noncompactness with applications to differential and integral equations, Springer, New Delhi.

[13] E. Celik, Kh. Tabatabaei (2013). Solving a Class of Volterra Integral Equation Systems by the Differential Transform Method, International Journal of Nonlinear Science.

[14] Ji. H. He (2000). A coupling method of a homotopy technique and a perturbation technique for nonlinear problems, International Journal of Non-linear Mechanics.

[15] A. Meir, E. Keeler (1969). A theoremon contraction mappings. J. Math. Anal.

[16] C. Ming Chen (2012). Fixed point theory for the cyclic weaker Meir-Keeler function in complete metric spaces, Fixed Point Theory Appl.

[17] M. Rabbani, (2015). Modified homotopy method to solve non-linear integral equations, Int. J. Nonlinear Anal.

[18] M. Rabbani, (2013). New Homotopy Perturbation Method to Solve Non-Linear Problems, Journal of mathematics and computer Science .

[19] M. Rabbani, R. Arab, A.A. Tabatabai Adnani (2017). New operators via measure of non-compactness, Journal of New Researches in Mathematics.

[20] M. Rabbani, R. Jamali (2012). Solving Nonlinear System of Mixed Volterra-Fredholm Integral Equations by Using Variational Iteration Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.

[21] M. Rabbani, S.H. Kiasoltani (2011). Solving of Nonlinear System of Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations by using Discrete Collocation Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.

[22] M. Rabbani, R. Zarali (2012). Solution of Fredholm Integro-Differential Equations System by Modified Decomposition Method, The Journal of Mathematics and Computer Science.