

## مدل جدید غیر ماهیتی جهت محاسبه کارایی واحدهای تصمیم‌گیری در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر

منصور شریفی<sup>۱</sup>، قاسم توحیدی<sup>۲\*</sup>، بهروز دانشیان<sup>۳</sup>، فرزین مدرس خیابانی<sup>۴</sup>

<sup>(۱ و ۴)</sup> گروه ریاضی کاربردی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

<sup>(۲ و ۳)</sup> گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۱/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۲۵

### چکیده

در ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده توسط مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، ماهیت داده‌ها از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن معلوم می‌باشد. در مسائل واقعی داده‌هایی وجود دارند که در مورد تعیین ماهیت آنها اختلاف نظر وجود دارد. برخی واحدهای تصمیم‌گیری برای حصول مقدار کارایی بالاتر آنها را به عنوان ورودی و بعضی دیگر خروجی در نظر می‌گیرند، این داده‌ها به متغیرهای انعطاف‌پذیر معروفند. مدل‌های متفاوتی در زمینه پارامتری و غیرپارامتری برای دسته‌بندی چنین داده‌هایی ارائه شده است. در اکثر مدل‌های ماهیتی (ورودی یا خروجی محور) ارائه شده جهت تشخیص ماهیت داده‌های انعطاف‌پذیر، ماهیت‌های متفاوت از یک مدل می‌تواند نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر حاصل کند. در مدل‌های غیر ماهیتی نیز از مقدار  $M$  جهت انتخاب محدودیت اصلی و حذف محدودیت زائد بهره گرفته شده است، در این مدل‌ها با انتخاب مقادیر متفاوت برای مقدار  $M$  نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر، مقدار کارایی و بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیری حاصل می‌شود. به منظور رفع این مسایل در DEA یک مدل بدون ماهیت پیشنهاد می‌شود که علاوه بر تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر می‌تواند خطای محاسباتی و مشکلات ناشی از حضور  $M$  بزرگ را در مدل مرتفع سازد. مزیت‌های مدل پیشنهادی نسبت به سایر مدل‌ها با یک مثال تجربی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: کارایی، DEA، متغیرهای انعطاف‌پذیر.

## ۱- مقدمه

متغیر و همچنین ماهیتی بودن مدل‌های قبلی را حل می‌کند آنها با به کارگیری مدل ارائه شده روی داده‌های ۵۰ موسسه از آموزش عالی انگلستان قابلیت بکارگیری این مدل را مشخص کردند.

## ۲- پیشینه تحقیق

همانطور که قبلاً بیان شده است در کاربردهای عملی از تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر متغیرهای ورودی و خروجی متغیرهای دیگری وجود دارند که ماهیت آنها از حیث ورودی یا خروجی بودن مشخص نیست و باید تعیین شود. به عنوان مثال در ارزیابی دانشگاه‌ها دانشجویان فارغ التحصیل از یک طرف به این دلیل که با صرف بودجه آموزش دیده‌اند و فارغ التحصیل شده‌اند به عنوان خروجی در نظر گرفته می‌شوند و از طرف دیگر از آن جهت که به عنوان یک منبع قابل دسترس اساتید جهت افزایش کارایی‌شان می‌باشند به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. به عنوان مثال دیگر در ارزیابی بانک از لحاظ سرمایه گذاری، متغیری مانند تعداد مشتریان با ارزش از آن جهت که منبعی برای سرمایه گذاری آینده می‌باشند می‌تواند به عنوان خروجی در نظر گرفته شود و از جهت دیگر که به شعبه در جمع آوری سپد سرمایه گذاری کمک می‌کنند به عنوان ورودی در نظر گرفته می‌شوند. در این بخش مدل‌ها و بحث‌های ارائه شده در زمینه متغیرهای انعطاف‌پذیر، بیان می‌شوند.

## ۲-۱ مدل ارائه شده توسط کوک و ژو

کوک و ژو [۳] مدل زیر را جهت مواجه شدن با متغیرهای انعطاف‌پذیر و تعیین ماهیت آن ارائه دادند.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \\ & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{r0} + \sum_{f=1}^k \delta_f z_{f0}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} + \sum_{f=1}^k (1 - d_f) \gamma_f z_{f0}} \\ & \text{st} \\ & \frac{\sum_{r=1}^s \mu_r y_{rj} + \sum_{f=1}^k \delta_f z_{fj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij} + \sum_{f=1}^k (1 - d_f) \gamma_f z_{fj}} \leq 1 \\ & j = 1, \dots, n \\ & \mu_r \geq 0 \quad f = 1, \dots, k \\ & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

تحلیل پوششی داده‌ها شاخه‌ای از تحقیق در عملیات و یکی از مهمترین ابزارهای مدیریت جهت اتخاذ تصمیم می‌باشد که به بررسی و ارزیابی کارایی واحدهای مشابه می‌پردازد. تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های قطعی ابتدا توسط چارلز و همکارانش در سال ۱۹۷۸ تحت عنوان مدل CCR معرفی گردید [۱]. سپس توسط بنکر و همکارانش در سال ۱۹۸۴ با ارائه مدلی تحت عنوان مدل BCC توسعه یافت [۲]. توان بالای تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی کارایی و ویژگی‌های خاص این شاخه، سبب شده است در بسیاری از حوزه‌های مختلف از صنایع مانند صنعت نفت و گاز، بیمارستان‌ها و بانک‌ها مورد استفاده قرارگیرد. در روش‌های رایج تحلیل پوششی داده‌ها، ماهیت داده‌ها از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن مشخص است. اما داده‌هایی وجود دارند که ورودی و خروجی بودن آنها از قبل مشخص نیست و باید محوریت ورودی یا خروجی بودن آنها قبل از به کارگیری این داده‌ها در مدل‌های ارزیابی کارایی تعیین شوند. این داده‌ها اولین بار توسط کوک و ژو تحت عنوان متغیرهای انعطاف‌پذیر معرفی شدند [۳]. کوک و ژو برای تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر و محاسبه کارایی آنها مدلی بر پایه فرم مضربی مدل CCR ارائه دادند [۳]. طلوع ادعا کرد که مدل پیشنهادی کوک و ژو به دلیل استفاده از عدد بسیار بزرگ M در مدل دچار خطای محاسباتی می‌شود و همین خطای محاسباتی باعث تشخیص اشتباه در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر می‌گردد. بر مبنای این ادعا، مدل اصلاح شده‌ای از مدل کوک و ژو را ارائه داد که در آن به دلیل عدم استفاده از عدد بزرگ M خطای محاسباتی بیان شده را ندارد [۴]. امیرتیموری و امروزنژاد جهت تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر مدلی بر پایه فرم پوششی مدل CCR و تعریف مجموعه امکان تولید در حضور متغیرهای انعطاف‌پذیر معرفی کردند [۵].

توحیدی و مطرود برای تعیین ماهیت عامل انعطاف‌پذیر، مدل غیر پارامتری بدون ماهیت با فرض بازده به مقیاس متغیر در حضور داده‌های انعطاف‌پذیر ارائه دادند [۶] و ادعا نمودند مدل آنها مشکلات ناشی از فرض بازده به مقیاس

توجه کنیم که  $d_f = 1$  یا  $d_f = 0$ ، در این صورت متغیر انعطاف پذیر به ترتیب به صورت ورودی یا خروجی تعیین می شود. در واقع مدل به  $DMU_o$  این اجازه را می دهد که ماهیت متغیر انعطاف پذیر را انتخاب کند. مبنای تصمیم گیری این مدل برای تعیین ورودی یا خروجی بودن متغیر انعطاف پذیر این است که ببینیم عمده واحدهای تصمیم گیری چه حالتی را انتخاب کرده اند.

### ۲-۲ مدل ارائه شده توسط طلوع

طلوع [۴] بر پایه مدل کوک و ژو، مدل اصلاح شده ای زیر را جهت تعیین ماهیت متغیر انعطاف پذیر ارائه نمود:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{r0} + \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{f0} \\ & \text{st} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{rj} + 2 \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{fj} - \sum_{f=1}^k \gamma_f Z_{fj} \\ & - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m v_i X_{i0} + \sum_{f=1}^k \gamma_f Z_{f0} - \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{f0} = 1 \\ & 0 \leq \delta_f \leq d_f \quad f = 1, \dots, k \\ & \delta_f \leq \gamma_f \leq \delta_f + (1 - d_f) \quad f = 1, \dots, k \\ & 0 \leq \mu_r \leq 1 \quad f = 1, \dots, k \\ & 0 \leq v_i \leq 1 \quad f = 1, \dots, k \\ & 0 \leq \gamma_f, \delta_f \leq 1 \quad f = 1, \dots, k \\ & d_f \in \{0, 1\} \quad f = 1, \dots, k \end{aligned}$$

### ۳-۲-۲ روش ارائه شده توسط امیرتیموری و

#### امروزنژاد

امیرتیموری و امروزنژاد [۵] بر پایه مدل پوششی CCR مدل زیر را برای اندازه گیری کارایی  $DMU_o$  پیشنهاد دادند:

$$\begin{aligned} & \text{Min} \quad \theta \\ & \text{st} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq \theta x_{i0} \\ & \quad \quad \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} \geq Y_{r0} \\ & \quad \quad \quad r = 1, \dots, s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma_f \geq 0, \quad f = 1, \dots, k \\ & d_f \in \{0, 1\} \quad f = 1, \dots, k \end{aligned}$$

مدل کسری فوق را می توان به فرم خطی زیر تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Max} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{r0} + \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{f0} \\ & \text{st} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{rj} + \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{fj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} - \\ & \sum_{f=1}^k (1 - d_f) \gamma_f Z_{fj} \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i X_{i0} + \sum_{f=1}^k (1 - d_f) \gamma_f Z_{f0} = 1 \\ & \mu_r \geq 0 \quad f = 1, \dots, k \\ & v_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ & \gamma_f \geq 0, \quad f = 1, \dots, k \\ & d_f \in \{0, 1\} \quad f = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (۱)$$

برای تبدیل مدل غیرخطی فوق به فرم خطی متغیر  $\delta_f = d_f \gamma_f$  را تعریف کرده و سپس محدودیت های زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} & 0 \leq \delta_f \leq M d_f \\ & 0 \leq \delta_f \leq \gamma_f \leq \delta_f + M(1 - d_f) \end{aligned} \quad (۲)$$

در نهایت برنامه ریزی خطی صحیح مختلط زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \text{Max} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{r0} + \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{f0} \\ & \text{st} \\ & \sum_{r=1}^s \mu_r Y_{rj} + 2 \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{fj} - \\ & \sum_{f=1}^k \gamma_f Z_{fj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0 \\ & j = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^m v_i X_{i0} + \sum_{f=1}^k \gamma_f Z_{f0} - \sum_{f=1}^k \delta_f Z_{f0} = 1 \\ & 0 \leq \delta_f \leq M d_f \quad f = 1, \dots, k \\ & 0 \leq \gamma_f \leq \delta_f + M(1 - d_f) \quad f = 1, \dots, k \\ & \mu_r, v_i, \gamma_f, \delta_f \geq 0, \quad \text{for all } i, r, f \\ & d_f \geq 0 \quad f = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (۳)$$

می‌شود. این مدل ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را با توجه به رای اکثریت DMU ها در انتخاب ورودی یا خروجی بودن متغیر انعطاف‌پذیر تعیین می‌کند.

### ۳- معرفی یک مدل بدون ماهیت جهت تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر

اکثر مدل‌های ارائه شده جهت تشخیص ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر ماهیتی می‌باشند، یعنی ورودی یا خروجی محور هستند و در صورت استفاده از ماهیت‌های متفاوت این مدل‌ها، نتایج متفاوتی در تعیین عامل انعطاف‌پذیر حاصل می‌شود. در مدل‌های غیر ماهیتی نیز از مقدار M جهت تمیز در انتخاب قیود بهره گرفته شده است، در این مدل‌ها با انتخاب مقادیر متفاوتی برای مقدار M نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر، مقدار کارایی و بازده به مقیاس واحدهای تصمیم‌گیری حاصل می‌شود، لذا، وجود چنین مسائلی ممکن است باعث بروز مشکلاتی شود. بنابراین، ارائه مدلی که تا حدودی این مسائل را رفع کند، حائز اهمیت می‌باشد. مدل پیشنهادی علاوه بر تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر می‌تواند خطای محاسباتی و مشکلات ناشی از حضور M بزرگ را مرتفع سازد.

فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیری  $DMU_{j,j=1,2,\dots,n}$  با صرف m ورودی  $x_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})$  به تولید S خروجی  $y_j = (y_{1j}, \dots, y_{sj})$  می‌پردازند. در ابتدا مدل راسل اصلاح شده (۴) که یک مدل غیرشعاعی و بدون ماهیت می‌باشد [۷]، در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \text{Min Re} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i \\ &= \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r \\ \text{st} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0} \quad i=1,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0} \quad r=1,\dots,s \\ &0 \leq \theta_i \leq 1 \quad i=1,\dots,m \\ &\phi_r \geq 1 \quad r=1,\dots,s \\ &\lambda_j \geq 0 \quad j=1,\dots,n \end{aligned} \quad (7)$$

PPS زیر که شامل متغیرهای انعطاف‌پذیر است را در نظر

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j &\leq \theta z_{f0} + M \delta_{1f} \\ f &= 1, \dots, k \\ -\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j &\leq -z_{f0} + M \delta_{2f} \\ f &= 1, \dots, k \\ \delta_{1f} + \delta_{2f} &= 1 \\ f &= 1, \dots, k \\ \delta_{1f}, \delta_{2f} &\in \{0, 1\} \\ f &= 1, \dots, k \end{aligned} \quad (5)$$

با انتخاب  $z_{f0}, \delta_1 = 0$  برای  $DMU_0$  به صورت ورودی انتخاب می‌شود. از طرف دیگر اگر  $\delta_1 = 1$  آنگاه  $\delta_2 = 0$  در این صورت  $z_{f0}$  برای  $DMU_0$  نقش خروجی را دارد.

### ۲-۴ روش ارائه شده توسط توحیدی و مطرود

توحیدی و مطرود مدل زیر را جهت مواجه شدن با متغیرهای انعطاف‌پذیر و تعیین ماهیت آن ارائه دادند [۶].

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad &\frac{\alpha}{\beta} \\ \text{st} \quad &\sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq \alpha X_{i0} \quad i=1,\dots,m \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} \geq \beta Y_{r0} \quad r=1,\dots,s \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq \alpha z_{f0} + M \delta_f \\ &\quad f=1,\dots,k \\ &-\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \leq -\beta z_{f0} + M \delta_f \\ &\quad f=1,\dots,k \\ &\delta_f \in \{0, 1\} \\ &\quad f=1,\dots,k \\ &\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ &\lambda_j \geq 0 \\ &\quad j=1,\dots,n \\ &\alpha, \beta \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

برای  $\delta_f = 0$  متغیر انعطاف‌پذیر به عنوان ورودی و برای  $\delta_f = 1$  این متغیر به عنوان خروجی در نظر گرفته

Mn

می گیریم:

$$\text{Re} = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i + \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k \theta_f \delta_f \right) / \left( \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r + \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k \phi_f (1 - \delta_f) \right)$$

$$\text{st} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0} \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \delta_f \leq \theta_f z_{f0} \delta_f \quad f=1, \dots, k \quad (11)$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} (1 - \delta_f) \leq \phi_f z_{f0} (1 - \delta_f) \quad f=1, \dots, k$$

$$0 \leq \theta_i \leq 1 \quad i=1, \dots, m, f=1, \dots, k$$

$$\phi_r, \phi_f \geq 1 \quad r=1, \dots, s, f=1, \dots, k$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$\delta_f \in \{0, 1\} \quad f=1, \dots, k$$

برای ساده کردن مدل غیر خطی فوق ابتدا تغییر متغیرهای  $w_f = \theta_f \delta_f, q_f = \phi_f (1 - \delta_f)$  را تعریف کرده و سپس محدودیت زیر در نظر گرفته می شود:

$$0 \leq w_f \leq \delta_f, q_f \geq \delta_f$$

در نهایت مدل برنامه ریزی غیر خطی کسری به مدل غیر خطی صحیح (۱۲) تبدیل می شود:

$$\text{Min} \quad \text{Re} = \left( \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i + \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k w_f \right) \quad (12)$$

$$\text{st} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0} \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \delta_f \leq \theta_f z_{f0} \delta_f \quad f=1, \dots, k$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} (1 - \delta_f) \leq -\phi_f z_{f0} (1 - \delta_f) \quad f=1, \dots, k$$

$$\left( \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r + \frac{1}{k} \sum_{f=1}^k q_f \right) = 1 \quad (12-2)$$

$$w_f = \theta_f \delta_f \quad f=1, \dots, k$$

$$q_f = \phi_f (1 - \delta_f) \quad f=1, \dots, k$$

$$0 \leq \theta_i, \theta_f \leq 1 \quad i=1, \dots, m, f=1, \dots, k$$

$$0 \leq w_f \leq \delta_f \quad f=1, \dots, k$$

$$q_f \geq \delta_f \quad f=1, \dots, k$$

$$\phi_r, \phi_f \geq 1 \quad r=1, \dots, s, f=1, \dots, k$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

$$\delta_f \in \{0, 1\} \quad f=1, \dots, k$$

$$\text{PPS} = \{ (x, y, z) \mid x \geq \sum_{i=1}^m \lambda_i x_{ij}, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \}$$

$$\left( \text{either } z \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \text{ or } z \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \right)$$

$$\lambda_j \geq 0, j=1, \dots, n \}$$

با توجه به PPS مورد نظر و مدل (۷)، مدل زیر ارائه می شود:

$$\text{Min} \quad \text{Re} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \theta_i / \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \phi_r$$

$$\text{st} \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \theta_i x_{i0} \quad i=1, \dots, m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \phi_r y_{r0} \quad r=1, \dots, s$$

$$\left( \text{either} \right. \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \leq \theta_f z_{f0} \quad f=1, \dots, k \\ & \text{or} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \geq \phi_f z_{f0} \quad f=1, \dots, k \end{aligned} \right.$$

$$0 \leq \theta_i \leq 1 \quad i=1, \dots, m$$

$$\phi_r \geq 1 \quad r=1, \dots, s$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad j=1, \dots, n$$

برای اینکه  $Z_{f0}$  در نقش ورودی یا خروجی باشد، فقط یکی از محدودیت های  $\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \leq \theta_f Z_{f0}$  یا  $\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \geq \phi_f Z_{f0}$  برای این متغیر باید برقرار باشد. محدودیت های زیر را در نظر می گیریم.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} \delta_f \leq \theta_f Z_{f0} \delta_f \text{ و } \delta_f \in \{0, 1\} \quad (9)$$

$$-\sum_{j=1}^n \lambda_j z_{fj} (1 - \delta_f) \leq -\phi_f Z_{f0} (1 - \delta_f) \quad (10)$$

برای  $\delta_f = 0$  محدودیت (۹) زائد است و محدودیت (۱۰) برقرار است و متغیر انعطاف پذیر به عنوان خروجی انتخاب می شود و برای  $\delta_f = 1$  محدودیت (۱۰) زائد و محدودیت (۹) برقرار است و این متغیر به عنوان ورودی در نظر گرفته می شود. با اعمال این محدودیت ها روی مدل (۸)، مدل زیر که یک مدل غیرخطی کسری است پیشنهاد می گردد:

کنیم  $w_f^*, \theta_i^*, q_f^*, \varphi_i^*$  جواب بهین مدل (۱۲) باشد  
 جواب  $w_f^*, \theta_i^*, q_f^*, \varphi_i^*$  بهین مدل (۱۱) نیز است  
 زیرا عکس تبدیلات مذکور در گذر از مدل (۱۲) به مدل  
 (۱۱) نیز امکان پذیر است بنابراین مدل‌های (۱۱) و (۱۲)  
 هردو دارای تابع هدفی با مقادیر بهین یکسان هستند.  
 مثال ۱: جدول (۱) یک مثال عددی را نشان می‌دهد، این  
 مثال شامل هشت DMU می‌باشد که هر کدام شامل یک  
 متغیر ورودی، یک متغیر خروجی و یک متغیر انعطاف‌پذیر  
 می‌باشند. نتایج حاصل از حل این مثال توسط مدل‌های  
 کوک و ژو، امیر تیموری و امروزنژاد، توحیدی و مطرود و  
 مدل پیشنهادی (۹) در جدول (۲) نشان داده شده است.

مدل (۱۲) تناظری از مدل (۱۱) است که با تغییر متغیر  
 $0 \leq w_f \leq \delta_f, q_f \geq \delta_f$  و  $w_f = \theta_f \delta_f, q_f = \varphi_f (1 - \delta_f)$   
 استفاده از روش تبدیل چارلز-کوپر در برنامه‌ریزی کسری  
 به هم ارز خطی آن تبدیل شده است.

### قضیه ۳-۱:

مدل (۱۲) با مدل (۱۱) متناظر است.

**اثبات:** با استفاده از تبدیلات چارلز و کوپر و با در نظر  
 گرفت تغییر متغیرهای  $w_f = \theta_f \delta_f, q_f = \varphi_f (1 - \delta_f)$  قید  
 (۱۲-۲) از مدل (۱۲) حاصل می‌شود با مینیمم کردن  
 صورت کسر مدل (۱۱) مدل (۱۲) نتیجه می‌شود. فرض

جدول ۱: مثال عددی با ۸ واحد تصمیم‌گیرنده

| DMU | خروجی | ورودی | انعطاف پذیر |
|-----|-------|-------|-------------|
| ۱   | ۳     | ۱     | ۶           |
| ۲   | ۵     | ۲     | ۱           |
| ۳   | ۲     | ۱     | ۵           |
| ۴   | ۳     | ۱     | ۴           |
| ۵   | ۱     | ۱     | ۱           |
| ۶   | ۵     | ۲     | ۶           |
| ۷   | ۴     | ۱     | ۲           |
| ۸   | ۳     | ۵     | ۲           |

جدول ۲: نتایج عددی با مدل‌های کوک و ژو، امیر تیموری و امروزنژاد، توحیدی و مطرود و مدل پیشنهادی

| DMU | نتایج حاصل از مدل (۱۰) |        | نتایج حاصل از مدل مطرود |        | نتایج حاصل از مدل کوک و ژو خروجی محور |        | نتایج حاصل از مدل کوک و ژو ورودی محور |        | نتایج حاصل از مدل امیر تیموری و امروزنژاد، خروجی محور |            |        | نتایج حاصل از مدل امیر تیموری و امروزنژاد، ورودی محور |            |        |
|-----|------------------------|--------|-------------------------|--------|---------------------------------------|--------|---------------------------------------|--------|---|------------|--------|---|------------|--------|
|     | d                      | کارایی | d                       | کارایی | d                                     | کارایی | d                                     | کارایی | $\delta 2$  | $\delta 1$ | کارایی | $\delta 2$  | $\delta 1$ | کارایی |
| ۱   | ۰                      | ۰/۷۵   | ۰                       | ۰/۷۵   | ۰                                     | ۰/۷۵   | ۱                                     | ۱      | ۱   | ۰          | ۰/۷۵   | ۱   | ۰          | ۰/۷۵   |
| ۲   | ۰                      | ۰/۶۲   | ۱                       | ۰/۶۳   | ۰                                     | ۱      | ۱                                     | ۰/۶۳   | ۰   | ۱          | ۰/۶۳   | ۰   | ۱          | ۰/۶۳   |
| ۳   | ۰                      | ۰/۵۰   | ۰                       | ۰/۵۰   | ۰                                     | ۰/۵۰   | ۱                                     | ۰/۸۵   | ۱   | ۰          | ۰/۵۰   | ۱   | ۰          | ۰/۵۰   |
| ۴   | ۰                      | ۰/۷۵   | ۰                       | ۰/۷۵   | ۰                                     | ۰/۷۵   | ۱                                     | ۱      | ۱   | ۰          | ۰/۷۵   | ۱   | ۰          | ۰/۷۵   |
| ۵   | ۰                      | ۰/۲۸   | ۱                       | ۰/۲۸   | ۰                                     | ۰/۳۳   | ۰                                     | ۱      | ۰   | ۱          | ۰/۲۸   | ۰   | ۱          | ۰/۲۸   |
| ۶   | ۰                      | ۰/۶۲   | ۰                       | ۰/۶۳   | ۰                                     | ۰/۶۳   | ۱                                     | ۰/۵۰   | ۱   | ۰          | ۰/۶۳   | ۱   | ۰          | ۰/۶۳   |
| ۷   | ۱                      | ۱      | ۱                       | ۱      | ۰                                     | ۱      | ۰                                     | ۱      | ۰   | ۱          | ۱      | ۰   | ۱          | ۱      |
| ۸   | ۰                      | ۰/۱۵   | ۱                       | ۰/۱۶   | ۰                                     | ۰/۳۰   | ۰                                     | ۰/۴۳   | ۰   | ۱          | ۰/۱۶   | ۰   | ۱          | ۰/۱۶   |

مثال ۲: مدل توحیدی و مطرود با داده‌های جدول (۱) به ازای مقادیر متفاوت  $M$  حل و نتایج حاصل در جدول (۳) نشان داده شده است.

همانطوری که در جدول نشان داده شده است مدل توحیدی و مطرود تحت تاثیر انتخاب مقادیر مختلف برای عدد  $M$  بزرگ قرار می‌گیرد این مدل نه تنها در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر بلکه برای بازده به مقیاس و مقادیر کارایی نیز نتایج متفاوتی ارائه می‌دهد، در حالیکه مدل پیشنهادی به دلیل نداشتن عدد  $M$  بزرگ در مدل مشکلات بیان شده را ندارد.

#### ۴- کاربرد مدل‌های پیشنهادی در موسسات آموزشی انگلستان

به منظور بررسی مدل (۱۲) داده‌های مربوط به پنجاه موسسه آموزش عالی انگلستان در نظر گرفته شده است. این داده‌ها شامل دو ورودی، نسبت هزینه و تجهیزات و سه خروجی، دانشجویان لیسانس، تحقیقات کارشناسی ارشد و آموزش کارشناسی ارشد و یک متغیر انعطاف‌پذیر درآمد پژوهشی می‌باشد که ماهیت آن باید تعیین شود. مدل ارائه شده توسط کوک و ژو، امیر تیموری و امروزنژاد، مدل توحیدی و مطرود و همچنین مدل (۱۲) در نظر گرفته شده است. نتایج حل این مدل‌ها با داده‌های مذکور در جدول (۴) نشان داده شده است.

نتایج حاصل نشان می‌دهد که مدل‌های ورودی محور و خروجی محور ارائه شده توسط امیر تیموری و امروزنژاد ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را برای چهار DMU از هشت DMU به عنوان متغیر ورودی و برای چهار DMU دیگر به عنوان متغیر خروجی در نظر می‌گیرد. بنابراین این مدل با توجه به رای اکثریت DMUها نمی‌تواند نظر قطعی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر ارائه دهد. همچنین در مدل ورودی محور کوک و ژو پنج DMU متغیر انعطاف‌پذیر را به عنوان خروجی و مدل خروجی محور کوک و ژو ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر را برای تمام DMUها ورودی انتخاب می‌کند. در مدل پیشنهادی رابطه بین شاخص‌ها به گونه‌ای است که مشکلات مدل‌های فوق را ندارد و می‌تواند عادلانه‌ترین رفتار را جهت تعیین ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر داشته باشد.

در ادامه اثر انتخاب عدد بزرگ  $M$  در مدل‌ها در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر بررسی می‌شود. مدل ارائه شده توسط توحیدی و مطرود در نظر گرفته شده است. همانطور که نتایج بررسی نشان می‌دهد ماهیت‌های ورودی و خروجی این مدل تحت تاثیر انتخاب عدد بزرگ  $M$  علاوه بر تفاوت در انتخاب نوع متغیر انعطاف‌پذیر از نقطه نظر ورودی یا خروجی بودن، دارای مقادیر کارایی متفاوتی نیز می‌باشند. همچنین انتخاب مقادیر متفاوت برای  $M$  در این مدل می‌تواند نوع بازده به مقیاس را نیز تحت تاثیر قرار دهد.

جدول ۳: نتایج حاصل از مدل توحیدی و مطرود به ازای مقادیر متفاوت  $M$

| DMU | نتایج حاصل از مدل مطرود<br>$M=10000000$ |   |        | نتایج حاصل از مدل مطرود<br>$M=100000000$ |   |        | نتایج حاصل از مدل مطرود<br>$M=1000000000$ |   |        |
|-----|---|---|--------|--|---|--------|---|---|--------|
|     | بازده به مقیاس                          | d | کارایی | بازده به مقیاس                           | d | کارایی | بازده به مقیاس                            | d | کارایی |
| ۱   | IRTS                                    | ۰ | ۰/۷۵   | DRTS                                     | ۰ | ۰/۷۵   | CRTS                                      | ۰ | ۰/۷۵   |
| ۲   | DRTS                                    | ۱ | ۰/۶۲   | DRTS                                     | ۰ | ۰/۶۲   | DRTS                                      | ۰ | ۰/۶۲   |
| ۳   | CRTS                                    | ۰ | ۰/۵۰   | IRTS                                     | ۰ | ۰/۵۰   | CRTS                                      | ۰ | ۰/۵۰   |
| ۴   | DRTS                                    | ۰ | ۰/۷۵   | DRTS                                     | ۰ | ۰/۷۵   | DRTS                                      | ۰ | ۰/۷۵   |
| ۵   | DRTS                                    | ۰ | ۰/۷۵   | IRTS                                     | ۰ | ۰/۷۵   | DRTS                                      | ۰ | ۰/۷۵   |
| ۶   | DRTS                                    | ۰ | ۰/۶۲   | DRTS                                     | ۰ | ۰/۶۲   | DRTS                                      | ۰ | ۰/۶۲   |
| ۷   | DRTS                                    | ۱ | ۱      | DRTS                                     | ۱ | ۱      | DRTS                                      | ۱ | ۱      |
| ۸   | DRTS                                    | ۱ | ۱      | DRTS                                     | ۰ | ۰/۱۶   | DRTS                                      | ۰ | ۰/۱۵   |

جدول ۴: نتایج حاصل از مدل‌های امیر تیموری و امروز نژاد، کوک و ژو، مدل توحیدی و مطرود و مدل پیشنهادی

| DMU | مدل پیشنهادی |        | مدل توحیدی و مطرود |        | مدل کوک و ژو، ورودی محور |        | مدل کوک و ژو، خروجی محور |        | مدل امیر تیموری و امروز نژاد، ورودی محور |        | مدل امیر تیموری و امروز نژاد، خروجی محور |        |
|-----|--------------|--------|--------------------|--------|--------------------------|--------|--------------------------|--------|--|--------|--|--------|
|     | $\delta_f$   | کارایی | $\delta$           | کارایی | $d$                      | کارایی | $d$                      | کارایی | $\delta_1$                               | کارایی | $\delta_1$                               | کارایی |
| ۱   | ۰            | ۱      | ۰                  | ۱      | ۱                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۰  | ۱      | ۱  | ۱      |
| ۲   | ۱            | ۰/۴۴   | ۰                  | ۰/۶۱   | ۰                        | ۰/۶۴   | ۰                        | ۰/۶۱   | ۰  | ۰/۶۱   | ۰  | ۰/۶۱   |
| ۳   | ۱            | ۰/۴۴   | ۱                  | ۰/۶۶   | ۰                        | ۰/۸۴   | ۰                        | ۰/۸۴   | ۱  | ۰/۶۶   | ۱  | ۰/۶۶   |
| ۴   | ۱            | ۰/۴۵   | ۰                  | ۰/۶۵   | ۱                        | ۰/۶۹   | ۰                        | ۰/۶۵   | ۰  | ۰/۶۵   | ۰  | ۰/۶۵   |
| ۵   | ۱            | ۰/۵۶   | ۱                  | ۰/۸۹   | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۰/۸۹   | ۱  | ۰/۸۹   |
| ۶   | ۱            | ۱      | ۱                  | ۱      | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۰/۷۹   | ۰  | ۰/۷۹   | ۱  | ۱      |
| ۷   | ۱            | ۰/۵۰   | ۱                  | ۱      | ۱                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۱      | ۱  | ۱      |
| ۸   | ۱            | ۰/۶۶   | ۰                  | ۰/۷۵   | ۱                        | ۰/۸۱   | ۰                        | ۰/۷۵   | ۰  | ۰/۷۵   | ۰  | ۰/۷۵   |
| ۹   | ۱            | ۰/۳۶   | ۱                  | ۰/۵۳   | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۰/۵۳   | ۱  | ۰/۶۶   |
| ۱۰  | ۰            | ۰/۵۳   | ۰                  | ۰/۸۹   | ۱                        | ۰/۹۱   | ۰                        | ۰/۸۹   | ۰  | ۰/۸۹   | ۰  | ۰/۸۹   |
| ۱۱  | ۰            | ۰/۶۱   | ۱                  | ۰/۷۵   | ۰                        | ۰/۸۹   | ۰                        | ۰/۸۹   | ۱  | ۰/۷۵   | ۱  | ۰/۷۵   |
| ۱۲  | ۰            | ۰/۴۰   | ۰                  | ۰/۵۸   | ۱                        | ۰/۶۷   | ۰                        | ۰/۵۸   | ۰  | ۰/۵۸   | ۱  | ۰/۶۹   |
| ۱۳  | ۰            | ۰/۵۹   | ۱                  | ۰/۷۷   | ۰                        | ۰/۸۰   | ۰                        | ۰/۸۰   | ۱  | ۰/۷۷   | ۱  | ۰/۸۰   |
| ۱۴  | ۰            | ۰/۵۸   | ۱                  | ۰/۷۰   | ۰                        | ۰/۷۵   | ۰                        | ۰/۷۵   | ۱  | ۰/۷۰   | ۱  | ۰/۷۰   |
| ۱۵  | ۰            | ۰/۴۴   | ۱                  | ۰/۶۹   | ۰                        | ۰/۷۰   | ۰                        | ۰/۷۰   | ۱  | ۰/۶۹   | ۱  | ۰/۷۰   |
| ۱۶  | ۰            | ۰/۴۰   | ۱                  | ۰/۵۲   | ۰                        | ۰/۵۳   | ۰                        | ۰/۵۳   | ۱  | ۰/۵۲   | ۱  | ۰/۵۴   |
| ۱۷  | ۰            | ۰/۴۲   | ۰                  | ۰/۵۲   | ۱                        | ۰/۸۲   | ۰                        | ۰/۵۲   | ۰  | ۰/۵۲   | ۰  | ۰/۵۴   |
| ۱۸  | ۰            | ۰/۳۴   | ۰                  | ۰/۵۹   | ۱                        | ۰/۶۳   | ۰                        | ۰/۵۹   | ۰  | ۰/۵۹   | ۰  | ۰/۵۹   |
| ۱۹  | ۰            | ۱      | ۰                  | ۱      | ۱                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۱      | ۱  | ۱      |
| ۲۰  | ۰            | ۰/۴۸   | ۰                  | ۰/۷۳   | ۰                        | ۰/۸۷   | ۰                        | ۰/۷۳   | ۰  | ۰/۷۳   | ۰  | ۰/۸۶   |
| ۲۱  | ۰            | ۰/۴۱   | ۱                  | ۰/۵۹   | ۰                        | ۰/۶۲   | ۰                        | ۰/۵۹   | ۰  | ۰/۵۹   | ۱  | ۰/۶۷   |
| ۲۲  | ۰            | ۰/۴۸   | ۰                  | ۰/۶۶   | ۱                        | ۰/۷۲   | ۰                        | ۰/۶۶   | ۰  | ۰/۶۶   | ۰  | ۰/۶۶   |
| ۲۳  | ۰            | ۰/۳۵   | ۱                  | ۰/۵۵   | ۰                        | ۰/۶۰   | ۰                        | ۰/۶۰   | ۱  | ۰/۵۵   | ۱  | ۰/۵۶   |
| ۲۴  | ۱            | ۰/۳۰   | ۰                  | ۰/۴۵   | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۰/۴۶   | ۰  | ۰/۴۶   | ۰  | ۰/۴۸   |
| ۲۵  | ۱            | ۰/۸۱   | ۰                  | ۰/۹۵   | ۱                        | ۱      | ۰                        | ۰/۹۵   | ۰  | ۰/۹۵   | ۰  | ۰/۹۵   |
| ۲۶  | ۱            | ۰/۲۶   | ۰                  | ۰/۴۳   | ۰                        | ۰/۵۷   | ۰                        | ۰/۴۳   | ۰  | ۰/۴۳   | ۰  | ۰/۴۳   |
| ۲۷  | ۱            | ۰/۴۹   | ۰                  | ۰/۷۰   | ۱                        | ۰/۷۸   | ۰                        | ۰/۷۰   | ۰  | ۰/۷۰   | ۱  | ۰/۸۵   |
| ۲۸  | ۰            | ۰/۵۷   | ۱                  | ۰/۸۱   | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۰/۸۱   | ۱  | ۰/۸۱   |
| ۲۹  | ۰            | ۰/۶۷   | ۰                  | ۰/۷۸   | ۱                        | ۰/۸۲   | ۰                        | ۰/۷۸   | ۰  | ۰/۷۸   | ۰  | ۰/۷۸   |
| ۳۰  | ۱            | ۰/۵۵   | ۰                  | ۰/۶۳   | ۰                        | ۰/۸۹   | ۰                        | ۰/۶۳   | ۰  | ۰/۶۳   | ۰  | ۰/۸۳   |
| ۳۱  | ۰            | ۰/۴۷   | ۰                  | ۰/۷۳   | ۱                        | ۰/۷۸   | ۰                        | ۰/۷۳   | ۰  | ۰/۷۳   | ۰  | ۰/۷۳   |
| ۳۲  | ۰            | ۰/۴۷   | ۱                  | ۰/۸۴   | ۰                        | ۰/۸۴   | ۰                        | ۰/۸۹   | ۱  | ۰/۸۴   | ۱  | ۰/۸۴   |
| ۳۳  | ۰            | ۱      | ۱                  | ۱      | ۱                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۱  | ۱      | ۱  | ۱      |
| ۳۴  | ۰            | ۱      | ۰                  | ۱      | ۰                        | ۱      | ۰                        | ۱      | ۰  | ۱      | ۱  | ۱      |



|  |    |   |      |   |      |   |      |   |      |   |      |   |
|--|----|---|------|---|------|---|------|---|------|---|------|---|
| به عنوان خروجی انتخاب می‌کند. در مدل پیشنهادی ۱۳ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی و ۳۷ تا از DMUها این متغیر را به عنوان خروجی در نظر می‌گیرند بنابراین این متغیر توسط این مدل به عنوان خروجی انتخاب می‌شود. همانطور یکه از نتایج حاصل مشاهده می‌شود مدل‌های کوک و ژو و امیر تیموری و امروز نژاد تحت تاثیر ماهیت مدل قرار می‌گیرند و مدل توحیدی و مطرود از قطعیت کمتری نسبت به مدل انتخابی در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف پذیر با توجه به اکثریت انتخاب DMUها دارد. همچنین از مزیت مدل پیشنهادی می‌توان به پایین بودن میانگین مقدار کارایی این مدل نسبت به مدل‌های دیگر اشاره کرد. | ۳۵ | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۱ | ۱    | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۱ |
|  | ۳۶ | ۰ | ۰/۴۷ | ۱ | ۰/۷۳ | ۰ | ۰/۷۸ | ۰ | ۰/۷۸ | ۱ | ۰/۷۳ | ۱ |
|  | ۳۷ | ۰ | ۰/۵۹ | ۰ | ۰/۷۸ | ۱ | ۰/۸۳ | ۰ | ۰/۷۸ | ۰ | ۰/۷۸ | ۰ |
|  | ۳۸ | ۰ | ۰/۶۶ | ۱ | ۰/۸۱ | ۰ | ۰/۸۱ | ۰ | ۰/۸۳ | ۱ | ۰/۸۱ | ۱ |
|  | ۳۹ | ۰ | ۰/۴۸ | ۰ | ۰/۶۲ | ۰ | ۰/۶۷ | ۰ | ۰/۶۲ | ۰ | ۰/۶۲ | ۰ |
|  | ۴۰ | ۰ | ۰/۶۰ | ۰ | ۰/۷۴ | ۱ | ۰/۷۴ | ۰ | ۰/۷۴ | ۰ | ۰/۷۴ | ۰ |
|  | ۴۱ | ۰ | ۱    | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۱ |
|  | ۴۲ | ۰ | ۰/۵۰ | ۱ | ۰/۸۰ | ۰ | ۰/۸۲ | ۰ | ۰/۸۰ | ۰ | ۰/۸۰ | ۱ |
|  | ۴۳ | ۰ | ۰/۵۲ | ۱ | ۰/۶۴ | ۰ | ۰/۹۲ | ۰ | ۰/۹۲ | ۱ | ۰/۶۴ | ۱ |
|  | ۴۴ | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۰ | ۱    | ۰ | ۱    | ۱ | ۱    | ۱ |
|  | ۴۵ | ۰ | ۰/۸۱ | ۰ | ۰/۸۸ | ۰ | ۰/۸۹ | ۰ | ۰/۸۸ | ۰ | ۰/۸۸ | ۰ |
|  | ۴۶ | ۰ | ۰/۷۲ | ۰ | ۰/۸۵ | ۰ | ۰/۸۶ | ۰ | ۰/۸۵ | ۰ | ۰/۸۵ | ۰ |
|  | ۴۷ | ۰ | ۰/۴۹ | ۰ | ۰/۶۶ | ۱ | ۰/۶۹ | ۰ | ۰/۶۵ | ۱ | ۰/۶۹ | ۱ |
|  | ۴۸ | ۰ | ۰/۵۱ | ۱ | ۰/۷۹ | ۰ | ۰/۸۴ | ۰ | ۰/۸۴ | ۱ | ۰/۷۹ | ۱ |
|  | ۴۹ | ۰ | ۰/۳۲ | ۰ | ۰/۴۵ | ۰ | ۰/۸۰ | ۰ | ۰/۸۰ | ۰ | ۰/۴۷ | ۰ |
|  | ۵۰ | ۰ | ۰/۷۱ | ۱ | ۰/۸۴ | ۰ | ۰/۸۴ | ۰ | ۰/۸۴ | ۱ | ۰/۸۴ | ۱ |
| میانگین کارایی   |    |   | ۰/۶۱ |   | ۰/۷۵ |   | ۰/۸۳ |   | ۰/۷۸ |   | ۰/۷۵ |   |

با توجه به مقادیر بهینه  $d^*$ ,  $\delta_1^*$ ,  $\delta^*$ ,  $\delta_f^*$  حاصل از جدول (۴) مشاهده می‌شود در مدل توحیدی و مطرود ۲۷ تا از DMUها متغیر انعطاف پذیر را به صورت ورودی و ۳۳ تا از DMUها این متغیر را به صورت خروجی انتخاب می‌کند با توجه به اکثریت انتخاب DMUها این متغیر توسط این مدل به صورت ورودی انتخاب می‌شود، در مدل کوک و ژو ورودی محور ۳۰ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت ورودی و ۲۰ تا از DMUها این متغیر را به صورت خروجی در نظر می‌گیرند بنابراین این مدل بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی انتخاب می‌کند، در مدل کوک و ژو خروجی محور همه DMUها بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی در نظر می‌گیرند بنا براین این مدل بودجه پژوهشی را به عنوان ورودی انتخاب می‌کند، در مدل امیر تیموری و امروز نژاد ورودی محور ۲۵ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت ورودی و ۲۵ تا از DMUها بودجه پژوهشی را به صورت خروجی انتخاب می‌کنند با توجه به اکثریت انتخاب DMUها این مدل نمی‌تواند نظر قطعی در مورد انتخاب ماهیت متغیر انعطاف پذیر ارائه دهد، به طور مشابه مدل امیر تیموری و امروز نژاد خروجی محور بودجه پژوهشی را

### ۵- نتیجه گیری

در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها، ماهیت داده‌ها از نقطه نظر ورودی و خروجی بودن مشخص است، حال آنکه مسائل عملی نشان می‌دهند که متغیرهایی موجودند که در مورد ماهیت آنها اختلاف نظر وجود دارد. برخی واحدهای تصمیم‌گیری برای حصول مقدار کارایی بالاتر آن را به صورت ورودی و بعضی دیگر آن را خروجی در نظر می‌گیرند. در صورت استفاده از ماهیت‌های متفاوت در مدل‌های ماهیتی ارائه شده جهت تشخیص ماهیت متغیرهای انعطاف‌پذیر نتایج متفاوتی در تعیین ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، ممکن است یک متغیر انعطاف‌پذیر، با استفاده از مدل خروجی محور، ورودی تعیین شود در حالیکه همان متغیر با استفاده از مدل ورودی محور، خروجی تعیین شود. در

خروجی بودن، مشکلات بیان شده را ندارد. مدل پیشنهادی نه تنها می‌تواند مشکلات تاثیرات ناشی از مقادیر متفاوت عدد بزرگ  $M$  و ماهیتی بودن را مرتفع سازد بلکه می‌تواند تمام کارایی تکنیکی و ترکیبی را در ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده مورد توجه قرار دهد.

مدل‌های غیرماهیتی نیز به ازای مقادیر مختلفی از عدد بزرگ  $M$  نتایج متفاوتی در انتخاب ماهیت متغیر انعطاف‌پذیر، مقادیر کارایی و نوع بازده به مقیاس حاصل می‌شود. در حالیکه مدل پیشنهادی به دلیل متکی نبودن به عدد بزرگ  $M$  در حذف یکی از قیود شامل متغیر انعطاف‌پذیر به جهت انتخاب آن از نقطه نظر ورودی یا

## فهرست منابع

- [1] Charns, A., Cooper, W.W., and Rhodes. E.L., (1978), "Measuring the efficiency of decision making units," European Journal of Operational Research Vol. 2. pp. 424-449.
- [2] Banker R.D. (1984) Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. European Journal of Operational Research 17 35-44.
- [3] Cook, W.D., Zhu, J. (2007), Classifying inputs and outputs in DEA, European Journal of Operational Research, 180 692-699.
- [4] Toloo, M. Alternative solutions for classifying inputs and outputs in Data Envelopment Analysis, *Computers and Mathematics with Applications*, 63 (2012) 1104-1110.
- [5] Amirteimoori, A., Emrouznejad, A. (2011), Flexible measures in production process: a DEA- based approach, *RAIRO Operations Research*, 25 63-74.
- [6] Tohidi, G., Matroud, F. 68 (2015), A new non-oriented model for classifying flexible measures in DEA, *Journal of the Operational Research Society*, pp 1019-1029.
- [7] Russell, R.R. (1985), Measure of technical efficiency, *J. Econ. Theory* 35 109-126.

Appendix A: Data set for higher education institutions

| DMU | General expenditure | Equipment expenditure | UG students | PG teaching | PG research | Research income |
|-----|---------------------|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------|
| 1   | 528                 | 64                    | 145         | 0           | 26          | 254             |
| 2   | 2605                | 301                   | 381         | 16          | 54          | 1485            |
| 3   | 304                 | 23                    | 44          | 3           | 3           | 45              |
| 4   | 1620                | 485                   | 287         | 0           | 48          | 940             |
| 5   | 490                 | 90                    | 91          | 8           | 22          | 106             |
| 6   | 2675                | 767                   | 352         | 4           | 166         | 2967            |
| 7   | 422                 | 0                     | 70          | 12          | 19          | 298             |
| 8   | 986                 | 126                   | 203         | 0           | 32          | 776             |
| 9   | 523                 | 32                    | 60          | 0           | 17          | 39              |
| 10  | 585                 | 87                    | 80          | 17          | 27          | 353             |
| 11  | 931                 | 161                   | 191         | 0           | 20          | 293             |
| 12  | 1060                | 91                    | 139         | 0           | 37          | 781             |
| 13  | 500                 | 109                   | 104         | 0           | 19          | 215             |
| 14  | 714                 | 77                    | 132         | 0           | 24          | 269             |
| 15  | 923                 | 121                   | 135         | 10          | 31          | 392             |
| 16  | 1267                | 128                   | 169         | 0           | 31          | 546             |
| 17  | 891                 | 116                   | 125         | 0           | 24          | 925             |
| 18  | 1395                | 571                   | 176         | 14          | 27          | 764             |
| 19  | 990                 | 83                    | 28          | 36          | 57          | 615             |
| 20  | 3512                | 267                   | 511         | 23          | 153         | 3182            |
| 21  | 1451                | 226                   | 198         | 0           | 53          | 791             |
| 22  | 1018                | 81                    | 161         | 5           | 29          | 741             |
| 23  | 1115                | 450                   | 148         | 4           | 32          | 347             |
| 24  | 2055                | 112                   | 207         | 1           | 47          | 2945            |
| 25  | 440                 | 74                    | 115         | 0           | 9           | 453             |
| 26  | 3897                | 841                   | 353         | 28          | 65          | 2331            |
| 27  | 836                 | 81                    | 129         | 0           | 37          | 695             |
| 28  | 1007                | 50                    | 174         | 7           | 23          | 98              |
| 29  | 1188                | 170                   | 253         | 0           | 38          | 879             |
| 30  | 4630                | 628                   | 544         | 0           | 217         | 4838            |
| 31  | 977                 | 77                    | 94          | 26          | 26          | 490             |
| 32  | 829                 | 61                    | 128         | 17          | 25          | 291             |
| 33  | 898                 | 39                    | 190         | 1           | 18          | 327             |
| 34  | 901                 | 131                   | 168         | 9           | 50          | 956             |
| 35  | 924                 | 119                   | 119         | 37          | 48          | 512             |
| 36  | 1251                | 62                    | 193         | 13          | 43          | 563             |
| 37  | 1011                | 235                   | 217         | 0           | 36          | 714             |
| 38  | 732                 | 94                    | 151         | 3           | 23          | 297             |
| 38  | 444                 | 46                    | 49          | 2           | 19          | 277             |
| 40  | 308                 | 28                    | 57          | 0           | 7           | 154             |
| 41  | 483                 | 40                    | 117         | 0           | 23          | 531             |
| 42  | 515                 | 68                    | 79          | 7           | 23          | 305             |
| 43  | 593                 | 82                    | 101         | 1           | 9           | 85              |
| 44  | 570                 | 26                    | 71          | 20          | 11          | 130             |
| 45  | 1317                | 123                   | 293         | 1           | 39          | 1043            |
| 46  | 2013                | 149                   | 403         | 2           | 51          | 1523            |
| 47  | 992                 | 89                    | 161         | 1           | 30          | 743             |
| 48  | 1038                | 82                    | 151         | 13          | 47          | 513             |
| 49  | 206                 | 1                     | 16          | 0           | 6           | 72              |
| 50  | 1193                | 95                    | 240         | 0           | 32          | 485             |

Source: Beasley (1990)