دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک زیر فضای خاص از فضاهای وزن‌دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی

محمد علی اردلانی *

استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۲/۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۲

چکیده

هدف ما در این مقاله تعریف مفاهیم وزن، فضاهای وزن‌دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی و بررسی دو دسته خاص از این فضاهای وزن‌دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی می‌باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که این فضاهای وزن‌دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی با نرم سوپریمم وزنی که روی آنها تعریف می‌شود فضاهای باناخ هستند. سپس این فضاهای وزن‌دار از این توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی را از یک جنبه جدیدکه تا کنون مورد توجه قرارنگرفته است بررسی خواهیم کرد. در واقع نشان خواهیم داد بدون اینکه لازم باشد تابع وزن در هیچ شرط سرعت رشدی برای محدود کردن سرعت رشد از بالا یا پایین (ساختن کران بالا یا پایین) یا شرط حدی خاصی (بجز پیوستگی روی نیم صفحه بالایی) صدق کند هر فضای وزن‌دار از توابع تمامریخت روی نیم صفحه بالایی دارای یک زیر فضای خاص است، که به صورت اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته قابل نوشتن می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: فضای باناخ، قضیه رسته‌ایی بئر، مجموعه F_σ، نرم سوپریمم وزنی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.ardalani@uok.ac.ir

۱– مقدمه

فرض کنید Ω یک زیر مجموعه باز از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد. یک تابع پیوسته و مثبت $\upsilon: \Omega \to (0.\infty)$ را یک تابع وزن می‌نامیم. برای هرتابع هولومورفیک f، $f: \Omega \to \mathbb{C}$ نرم سوپریمم وزنی f، $\|f\|_\upsilon$ و فضای وزن‌دار از توابع هولومورفیک روی Ω، $H_\upsilon(\Omega)$ را به ترتیب چنین تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\upsilon = \operatorname*{Sup}_{Z\in\Omega} |f(z)|\upsilon(z)$$

و

$$H_\upsilon(\Omega) = \left\{ f: \Omega \to \mathbb{C} \text{ . هولومورفیک است } f \text{ ،} \|f\|_\upsilon < \infty \right\}.$$

هم‌چنین گوییم $|f|\upsilon$ در بی‌نهایت صفر می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک زیر مجموعه فشرده از Ω مانند K وجود داشته باشد بطوریکه

$$|f(z)|\upsilon(z) < \varepsilon \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus K$$

با استفاده از تعریف فوق می‌توان $H_{\upsilon_0}(\Omega)$ را به عنوان یک زیر فضای از $H_\upsilon(\Omega)$ به صورت زیر تعریف کرد

$$H_{\upsilon_0}(\Omega) = \left\{ f \in H_\upsilon(\Omega) \text{: در بی نهایت صفر می شو د } |f|\upsilon \right\}.$$

ثابت خواهیم کرد که $H_\upsilon(\Omega)$ همراه با $\|\cdot\|_\upsilon$ یک فضای باناخ و $H_{\upsilon_0}(\Omega)$ یک زیر فضای بسته از $H_\upsilon(\Omega)$ است. فضاهای وزن‌دار از توابع هولومورفیک (و از توابع هارمونیک) اولین بار توسط شیلدز و ویلیامز در سال ۱۹۷۲ در حالتی که $\Omega = D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ گوی یکه باز بود معرفی شدند. آنها در سری مقالات خود، با این فرض که وزن υ در شرایط خاصی صدق می‌کند به بررسی این فضاها از جنبه های مختلف پرداختند[1,2,3].پس از باز شدن این زمینه‌ی تحقیقاتی جدید،تحقیقات زیادی از جنبه‌های مختلف روی این فضاها توسط ریاضیدانان متعددی انجام گرفت، که از جمله کارهای برجسته در این زمینه می‌توان به مقالات لوسکی [4,5,6] بونت، دومانسکی و لیندشتروم [7,8] اشاره کرد. یک حالت بسیار مهم دیگر از فضاهای وزن‌دار وقتی به وجود می‌آید که $\Omega = G = \{\omega \in \mathbb{C}: Im\,\omega > 0\}$ انتخاب شود. بررسی کلاس‌های یکریختی $H_\upsilon(G)$ و همچنین کرانداری عملگر ترکیب و عملگر مشتق بین این فضاها، در حالتی که وزن υ در شرایط رشدی خاصی صدق می‌کند، توسط لوسکی واردلانی انجام شد[9,10].

هدف این مقاله طرح یک سوال جدید در باره‌ی $H_\upsilon(G)$ می‌باشد که تا کنون مورد توجه قرار نگرفته است. در واقع سوالی که حال می‌خواهیم مطرح کنیم این است که چه زیر فضایی از $H_\upsilon(G)$ را می‌توان به صورت یک F_σ (اجتماع شمارش پذیر از مجموعه‌های بسته) یا به صورت یک G_σ (اشتراک شمارش پذیر از مجموعه‌های باز) نوشت؟

ما در قضیه ۱ در یک حالت خاص به این سوال جواب داده و نشان می‌دهیم که $H_{\upsilon_0}(G)$ یک زیر فضای F_σ از $H_\upsilon(G)$ است بدون اینکه لازم باشد که وزن υ در شرایط رشدی یا شرایط حدی مانند آنچه در [۹] فرض شده است صدق کند.

۲– نتایج اصلی

در ابتدا ثابت می‌کنیم که $H_\upsilon(G)$ و $H_{\upsilon_0}(G)$ فضاهای باناخ هستند. اما برای این منظور ابتدا به یادآوری قضیه شناخته شده زیر از آنالیز مختلط می‌پردازیم.

قضیه ۱[11]: فرض کنید $f_n(\omega)$ دنباله ایی از توابع تحلیلی باشد که بر زیر مجموعه‌های فشرده از G به تابع $f(\omega)$ همگرای یکنواخت است. در اینصورت $f(\omega)$ در G تحلیلی است.

لم ۱: اگر $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در $H_\upsilon(G)$ باشد، آنگاه روی هر زیر مجموعه فشرده از G بطور یکنواخت همگرا است.

اثبات: فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در $H_\upsilon(G)$ باشد و فرض کنید $K \subset G$ فشرده باشد.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, m,n \geq N \quad \|f_n - f_m\|_\upsilon < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ sup_{\omega\in G} |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\upsilon(\omega) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ \forall \omega \in G \ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\upsilon(\omega) < \varepsilon.$$

چون $K \subset G$ پس:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ \forall \omega \in K \ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\upsilon(\omega) < \varepsilon.$$

حال چون K فشرده و υ تابع پیوسته است لذا مینیم خود را روی K اختیار می‌کند. یعنی

$$\exists \ \omega_0 \in K \ s.t \ \min_{\omega\in K} \upsilon(\omega) = \upsilon(\omega_0)$$

حال

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ \forall \omega \in K \ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\upsilon(\omega_0) < \varepsilon.$$

در نتیجه

$$\forall \omega \in K \ |f_m(\omega) - f_n(\omega)| < \frac{\varepsilon}{\upsilon(\omega_0)}.$$

پس دنباله $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی یکنواخت روی K است و در نتیجه دنباله $\{f_n\}$ روی K همگرای یکنواخت است.

قضیه ۲: $H_\upsilon(G)$ و $H_{\upsilon_0}(G)$ فضاهای باناخ هستند.

اثبات: فرض کنید $\{f_n\}$ یک دنباله کوشی در $H_\upsilon(G)$ باشد باید ثابت کنیم

$$\exists \ f \in H_\upsilon(G) \ s.t \ f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\upsilon} f.$$

فرض کنید $K \subset G$ دلخواه، فشرده باشد. بنا به لم ۱ دنباله $\{f_n\}$ روی K به تابعی مانند f در $\|.\|_\upsilon$ همگرای یکنواخت است. پس بنا به قضیه ۱ f روی G تحلیلی است.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ \|f_n - f_m\|_\upsilon < \varepsilon.$$

$$\|f_n - f_m\|_\upsilon = Sup_{\omega\in G} \ |f_m(\omega) - f_n(\omega)|\upsilon(\omega) < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m,n \geq N \ \|f_m\upsilon - f_n\upsilon\|_\infty < \varepsilon.$$

یعنی دنباله $\{f_m\upsilon\}$ یک دنباله کوشی نسبت به $\|.\|_\infty$ است. اما $H_\upsilon(G)$ با نرم سوپریمم یک فضای باناخ است، پس تابع g وجود دارد که $f_m\upsilon \longrightarrow g$ روی K فشرده همگرایی یکنواخت است. بنابراین $f_m \longrightarrow \frac{g}{\upsilon}$ بطور یکنواخت روی K. پس $f = \frac{g}{\upsilon}$.

$$\|f\|_\upsilon = Sup_{\omega\in G} |f(\omega)|\upsilon(\omega) = Sup_{\omega\in G} \left|\frac{g(\omega)}{\upsilon(\omega)}\right| \upsilon(\omega) = Sup_{\omega\in G} |g(\omega)| < \infty.$$

در نتیجه $f \in H_\upsilon(G)$. اثبات برای $H_{\upsilon_0}(G)$ مشابه است.

نتیجه ۱: $H_{\upsilon_0}(G)$ فضای باناخ و زیر فضای $H_\upsilon(G)$ است. بنابراین $H_{\upsilon_0}(G) \subset H_\upsilon(G)$ بسته است.

تعریف ۱: به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، مجموعه B_n را چنین تعریف می‌کنیم:

$$B_n = \{f \in H_{\upsilon_0}(G) : \exists \ \omega \in G \ . \ |\omega| \leq n \ . \ |f(\omega)|\upsilon(\omega) = \|f\|_\upsilon\}$$

قضیه ۳: فرض کنید υ یک وزن روی G باشد. در اینصورت $H_{\upsilon_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. همچنین

۱) به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، B_n یک مجموعه بسته در $H_{\upsilon_0}(G)$ است، نسبت به $\|\cdot\|_\upsilon$.

۲) حداقل یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوریکه $B_{n_0}^o \neq \emptyset$

اثبات: بدیهی است که $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq H_{\upsilon_0}(G)$. بلعکس، فرض کنید $f \in H_{\upsilon_0}(G)$. اگر $f = 0$ آنگاه به وضوح به ازای هر عدد طبیعی n، $f \in B_n$. اما اگر $f \in H_{\upsilon_0}(G)$ و $f \neq 0$، کافیست $\varepsilon = \frac{\|f\|_\upsilon}{2} > 0$ اختیار کنیم. چون $|f|\upsilon$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، پس K زیر مجموعه فشرده G وجود دارد به طوریکه

$$\forall\, \omega \in G \setminus K \qquad |f(\omega)|\upsilon(\omega) < \frac{\|f\|_\upsilon}{2}$$

$|f|\upsilon$ یک تابع پیوسته روی G و $K \subseteq G$ فشرده است پس $|f|\upsilon$ روی K ماکزیمم خود را در نقطه‌ای مانند ω_0 اختیار می‌کند یعنی

$$Sup_{\omega\in K}|f(\omega)|\upsilon(\omega) = |f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)$$

همچنین بدیهی است که

$$\|f\|_\upsilon = \max\begin{pmatrix} Sup_{\omega\in K}|f(\omega)|\upsilon(\omega). \\ Sup_{\omega\in G\setminus K}|f(\omega)|\upsilon(\omega)\end{pmatrix} < \max\left(|f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\ .\ \frac{\|f\|_\upsilon}{2}\right)$$

اگر

$$\max\left(|f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\ .\ \frac{\|f\|_\upsilon}{2}\right) = \frac{\|f\|_\upsilon}{2}$$

آنگاه $\|f\|_\upsilon < \frac{\|f\|_\upsilon}{2}$ که تناقض است. بنابراین

$$\max\left(|f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\ .\ \frac{\|f\|_\upsilon}{2}\right) = |f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)$$

و در نتیجه

$$\|f\|_\upsilon \le |f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0) \qquad (۱)$$

از طرف دیگر

$$|f(\omega_0)|\upsilon(\omega_0) \le Sup_{\omega\in K}|f(\omega)|\upsilon(\omega) = \|f\|_\upsilon \qquad (۲)$$

حال ازروابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$H_{\upsilon_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

برای اثبات قسمت ۱، فرض کنید که $n_0 \in \mathbb{N}$ دلخواه داده شده باشد. همچنین فرض کنید

$$g \in \overline{B_{n_0}}$$

بنابراین یک دنباله $\{f_n\} \subseteq B_{n_0}$ وجود دارد بطوریکه $f_n \to g$ در $\|\cdot\|_\upsilon$. چون $H_{\upsilon_0}(G)$ یک فضای باناخ است بنابراین $g \in H_{\upsilon_0}(G)$، لذا کافی است ثابت کنیم که $\omega_0 \in G$ وجود دارد به طوریکه

$$|\omega_0| \le n_0\ .\ |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0) = \|g\|_\upsilon$$

چون به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \in B_n$ بنابراین

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \omega_n \in G \ \ s.t \quad |\omega_n| \le n_0 |f(\omega_n)|\upsilon(\omega_n) = \|f_n\|_\upsilon \qquad (۳)$$

از آنجایی که $\{\omega_n\}$ یک دنباله کراندار در G است بنابراین، از قضیه بولتسانو-وایرشتراس نتیجه می‌شود که یک زیر دنباله‌ی همگرا از $\{\omega_n\}$ مانند $\{\omega_{n_k}\}$ وجود دارد، به طوریکه $\omega_{n_k} \to \omega_0$.
چون یک تناظر۱-۱ بین f_nها و ω_n ها وجود دارد، بنابراین $f_{n_k} \to g$ در نرم $\|\cdot\|_\upsilon$. فرض کنید $\varepsilon > 0$ داده شده باشد در نتیجه $m_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوریکه به ازای هر $n_k \ge m_0$

$$\left|\|f_{n_k}\|_\upsilon - \|g\|_\upsilon\right| \le \|f_m - g\|_\upsilon \le \varepsilon \quad (۴)$$

$A = \{\omega \in G : |\omega| \le n_0\}$ را در نظر بگیرید، چون تابع $|g|\upsilon$ روی G پیوسته و $A \subseteq G$ فشرده است پس $|g|\upsilon$ روی A پیوسته یکنواخت و در نتیجه $\delta > 0$ وجود دارد به طوریکه

$$|\omega - \widetilde{\omega}| < \delta \Rightarrow \left||g(\omega)| - \upsilon(\omega) - |g(\widetilde{\omega})|\upsilon(\widetilde{\omega})\right| < \varepsilon \quad \forall \omega.\widetilde{\omega} \in A$$

$\omega_0 \in A$. $\omega_{n_k} \to \omega_0$ بنابراین $m_1 \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه

$$|\omega_{n_k} - \omega_0| < \delta \quad \forall\, n_k \ge m_1$$

در نتیجه

$$\left||g(\omega_{n_k})|\upsilon(n_k) - |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\right| < \varepsilon$$

$$\forall n_k \geq m_1 \qquad (۵)$$

حال اگر $m_2 = \max\{m_0 . m_1\}$ اختیار شود، آنگاه روابط (۳)، (۴) و (۵) برای هر $m \geq m_2$ برقرار هستند. بنابراین

$$\begin{aligned} |\| g \|_\upsilon - |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)| &\leq \left|\| f_{n_k} \|_\upsilon - \| g \|_\upsilon\right| + \left|\| f_{n_k} \|_\upsilon - |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\right| \\ &< \varepsilon + \left||f_{n_k}(\omega_{n_k})|\upsilon(\omega_{n_k}) - |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\right| \\ &< \varepsilon + \left||f_{n_k}(\omega_{n_k})|\upsilon(\omega_{n_k}) - |g(\omega_{n_k})|\upsilon(n_k)\right| + \left||g(\omega_{n_k})|\upsilon(n_k) - |g(\omega_0)|\upsilon(\omega_0)\right| \\ &< \varepsilon + \|f_{n_k} - g\|_\upsilon + \varepsilon < 3\varepsilon. \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت ۲ از بکار بردن قضیه رسته‌ایی بئر و اینکه $H_{\upsilon_0}(G) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ نتیجه می‌شود که $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوریکه $\left(\overline{B_{n_0}}\right)^o \neq \emptyset$. حال از قسمت (۱) نتیجه می‌شود که $B_{n_0}^o \neq \emptyset$.

نتیجه۲: فرض کنید $n_0 \in \mathbb{N}$ طوری باشد که $\left(\overline{B_{n_0}}\right)^o \neq \emptyset$. در این صورت $f_0 \in B_{n_0}$ و $\varepsilon > 0$ وجود دارند به طوریکه هر $f \in H_{\upsilon_0}$ که $f \neq 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$f = \frac{\|f\|_\upsilon}{2\varepsilon}\left(f_0 + \varepsilon \frac{f}{\|f\|_\upsilon}\right) + \frac{\|f\|_\upsilon}{2\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon f}{\|f\|_\upsilon} - f_0\right)$$

در واقع اگر

$$B = \left\{f \in H_{\upsilon_0}(G) : \|f\|_\upsilon \leq 1\right\}$$

آنگاه $B \subseteq \frac{1}{2\varepsilon} B_{n_0} + \frac{1}{2\varepsilon} B_{n_0}$.

فهرست منابع

[1] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections and the growth of harmonic conjugates in the disc, Michigan Math. J. 3(1982), 3-25.

[2] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of harmonic functions, J. Reine. Angew Math. 299/300 (1978), 265-279.

[3] A.L.Shields, D.L. Williams, Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions, Trans. Amer. Math. Soc. 162 (1971), 287-302.

[4] W.Lusky, on the isomorphism classes of weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, Studia Math. 1(2006), 19-45.

[5] W.Lusky, on weighted spaces of harmonic and holomorphic functions, J. Lond. Math Soc. 51(1995), 309-320.

[6] W.Lusky, Growth conditions for harmonic and holomorphic functions, Functional Analysis (Trier, 1994), S. Dierolfetal. (End), de Gruyter (1996), 281-291.

[7] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions, Studia math. 137(1999), 177-194.

[8] J.Bonet, P.Domanski, M.Lindstrom, Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions, Canad. Math. Bull. 42(1999), 139-148.

[9] M.A.Ardalani and W.Lusky, Bounded operators on weighted spaces of holomorphic functions on upper half plane, Studia math. 209(2012), 225-234.

[10] M.A.Ardalani and W.Lusky, weighted spaces of holomorphic functions on the upper half-plane math, Scandinavica, 111 (2012), 224-260.

[11] S. Lang, Complex Analysis, Springer Verlag, New York, 1999.