

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## تحلیل پایداری معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای حالت تاخیری محدود

داود ناصح<sup>۱\*</sup>، ناصر پریرز<sup>۲</sup>، علی وحیدیان کامیاد<sup>۳</sup>

<sup>(۱ و ۲)</sup> گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

### چکیده

در این مقاله معیارهایی برای بررسی پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر محدود در حالت ارائه می‌گردد. ابتدا، قضیه مقایسه جدیدی برای کراننداری پاسخ سیستم دیفرانسیل فازی در قیاس با سیستم دیفرانسیل معمولی تعیینی در فضای  $N$  بعدی بر اساس مفهوم توابع غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بیان می‌گردد؛ همچنین، برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری تعریف می‌گردند. سپس با استفاده از این توابع برداری شبه لیاپانوف به همراه قضیه مقایسه جدیدی که مطرح شده است، برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری (پایداری نهایی، پایداری مجانبی، پایداری قوی و پایداری یکنواخت) برای سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای حالت تاخیردار مطرح می‌شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می‌رسند. در انتها مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی، قضیه مقایسه، توابع شبه لیاپانوف برداری، غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی، پایداری کاربردی.

## ۱- مقدمه

یکنواخت<sup>۱۲</sup> معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای

حالت تاخیری ارائه خواهیم کرد.

بخش‌های این مقاله بدین شرح است: در بخش ۲، برخی مفاهیم و تعاریف پایه که در ادامه مقاله از آن‌ها استفاده می‌کنیم را معرفی می‌کنیم. در بخش ۳، ابتدا قضیه مقایسه<sup>۱۳</sup> سیستم دیفرانسیل فازی<sup>۱۴</sup> با سیستم دیفرانسیلی معمولی<sup>۱۵</sup> در  $N$  بعد بر اساس مفهوم غیرنزولی شبه یکنواخت فوقانی<sup>۱۶</sup> بیان می‌گردد. در اینجا برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی فازی، توابع شبه لیاپانوف برداری<sup>۱۷</sup> تعریف می‌گردند. سپس با استفاده از این توابع به همراه قضیه مقایسه جدید برخی قضایا برای بررسی انواع مفاهیم پایداری برای سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر مطرح می‌شوند. علاوه بر آن، قضایای پایداری کاربردی بر حسب دو معیار ارائه شده و به اثبات می‌رسند. پس از آن مثالی روشنگر برای نحوه بکارگیری قضایای پایداری مطرح و پایداری یک سیستم دیفرانسیل فازی دارای تاخیر بررسی می‌گردد. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۴ آورده شده است.

## ۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این بخش برخی نمادها، تعاریف و نتایج را که در ادامه مقاله استفاده می‌شوند از مراجع [7, 10, 17, 28, 7, 9, 30] ذکر می‌شوند.

فضای توابع فازی را بصورت زیر نمایش و تعریف می‌کنیم

$$E^n = \{u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]\}$$

به قسمی که  $u$  شرایط زیر را ارضا می‌کند:

(الف)  $u$  نرمال است، یعنی  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  وجود دارد به

$$u(x_0) = 1$$

امروزه نظریه پایداری لیاپانوف<sup>۱</sup> کاملاً شناخته شده است و تئوری و کاربردهای آن در [1, 2] ارائه شده‌اند. از آن جایی که یافتن تابع لیاپانوف امری مشکل است، در عمل مفهوم پایداری بر حسب دو معیار<sup>۲</sup> مطرح شده که روشی بسیار قدرتمند است [3-6]. در برخی موارد، از جمله نگه داشتن دمای یک پروسه شیمیایی بین کران‌هایی خاص، نوسان فضاپیما حول یک مسیر و غیره، حالت سیستم شاید ناپایدار باشد، ولی سیستم می‌تواند به اندازه کافی نزدیک به حالت مطلوب نوسان داشته باشد به گونه‌ای که عملکرد سیستم عملاً مناسب باشد. در این موارد مفهوم پایداری کاربردی<sup>۳</sup> معرفی شده است [7-9]. در مراجع فوق، نویسندگان پایداری سیستم‌های بدون ضربه<sup>۴</sup> (جهش حالت) را بررسی کرده‌اند. این در حالی است که در مدل‌سازی بسیاری از مسائل دنیای واقعی، از جمله سیستم‌های سوئیچ شونده<sup>۵</sup>، باید اثرات ضربه‌ای را نیز در نظر بگیریم. در مراجع [5, 10-20] پایداری معادلات دیفرانسیل ضربه‌ای<sup>۶</sup> بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در کارهای قبلی نویسندگان فوق فرض کرده‌اند که حالت‌ها فقط به حالت کنونی بستگی دارد؛ این در حالی است که در بسیاری موارد که تاخیر زمانی داریم، آن‌ها به حالت گذشته هم وابستگی دارند [21-23].

چنانچه مشاهده می‌گردد، در کارهای پیشین، فازی بودن<sup>۷</sup> پدیده‌ها لحاظ نشده است؛ در حالی که این مساله در دنیای واقعی غیرقابل اجتناب است؛ چرا که فازی، راهی برای مدل‌سازی سیستم‌های دارای عدم قطعیت<sup>۸</sup> و بطور یقینی مشخص نشده است [24-29]. بنابراین، ما در این مقاله قضایایی برای بررسی انواع پایداری (پایداری نهایی<sup>۹</sup>، پایداری مجانبی<sup>۱۰</sup>، پایداری قوی<sup>۱۱</sup> و پایداری

10. asymptotic stability
11. strong stability
12. uniform stability
13. comparison theorem
14. fuzzy differential system
15. ordinary differential equation
16. upper quasi-monotone nondecreasing
17. vector lyapunov-like functions

1. Lyapunov stability theory
2. stability in terms of two measurements
3. practical stability
4. impulse
5. switching systems
6. impulsive differential equations
7. fuzziness
8. uncertainty
9. eventual stability

$$\|U\| \equiv \|U\|_M \triangleq \max_{1 \leq i \leq N} |U_i|$$

کره فازی بصورت زیر قابل فرض است

$$S(\rho) \triangleq \{X \in (E^n)^N : \|\widetilde{D}_0(X, \widehat{0})\| < \rho\}$$

**تعریف ۱-۲:** فرض کنید  $\mathcal{T}$  یک مقیاس زمانی<sup>۲۳</sup> با کوچکترین عضو<sup>۲۴</sup>  $t_0 \geq 0$  و بدون بزرگترین عضو<sup>۲۵</sup> باشد. نگاشت‌های (عملگرهای پرش)<sup>۲۶</sup>  $\sigma, \rho: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  بصورت زیر تعریف می‌شوند [9]

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathcal{T}; s > t\}$$

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathcal{T}; s < t\}.$$

**تعریف ۲-۲:** تابع  $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$  که  $\mathcal{G}$  ناحیه‌ای در فضای  $\mathbb{R}^N$  است، را غیرنزولی شبه یکنوا در  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$  گوئیم اگر برای هر جفت نقطه  $(t, \alpha)$  و  $(t, \beta)$  از  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$  و  $j = 1, 2, \dots, N$  نامساوی  $G_j(t, \alpha) \geq G_j(t, \beta)$  برقرار باشد بازای  $\alpha_j = \beta_j$  و  $i = 1, 2, \dots, N, i \neq j$  یعنی برای هر  $t \in \mathcal{T}$  و  $j = 1, 2, \dots, N$ ، توابع  $G_j(t, \alpha)$  بر حسب  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_N)$  صعودی باشند [10].

**تعریف ۳-۲:** تابع  $G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $N \geq 1$ ) را غیرنزولی شبه یکنوا از بالا بر حسب  $U$  گوئیم، اگر برای  $U, W \in \mathbb{R}_+^N$  نامساوی  $\|U\| \leq \|W\|$  نتیجه دهد  $\|G(t, U)\| \leq \|G(t, W)\|$  [9].

**تعریف ۴-۲:** کلاس‌هایی از توابع بصورت زیر تعریف می‌شوند

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ \alpha : C[R^+, R^+], \alpha(0) = 0 \text{ و } \alpha(t) \text{ اکیدا صعودی است} \right\}$$

$$\Gamma \triangleq \{h \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, R^+]; \forall t \in \mathcal{T}, \inf_{X \in (E^n)^N} h(t, X) = 0\}$$

(ب)  $u$  محدب فازی<sup>۱۸</sup> است، یعنی برای هر  $x, y \in \mathbb{R}^n$  و  $\lambda \in [0, 1]$  داریم:

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\};$$

(ج) شبه پیوسته از بالا<sup>۱۹</sup> است:

(د)  $[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R}^n | u(x) > 0\}$  فشرده است.

برای  $\alpha \in (0, 1]$ ، تعریف می‌کنیم: [28]

$$[u]^\alpha = cl\{x \in \mathbb{R}^n | u(x) \geq \alpha\}.$$

سپس فضای فازی N-بعدی

$$(E^n)^N \equiv E^n \times E^n \times \dots \times E^n, \quad N \text{ بار},$$

$$N \in \mathbb{N}$$

را به همراه متر فازی برداری<sup>۲۰</sup> زیر بر روی آن

$$\widetilde{D}_0(X, Y) = (D_0(X_1, Y_1), D_0(X_2, Y_2), \dots, D_0(X_N, Y_N))$$

در نظر می‌گیریم که در آن:

$$D_0(X_i, Y_i) \equiv \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} D([X_i]^\alpha, [Y_i]^\alpha)$$

متر فازی بر روی  $E^n$  است، به طوری که فاصله هاسدورف<sup>۲۱</sup> بصورت زیر تعریف می‌گردد

$$D[A, B] \equiv \max\{\sup_{x \in B} d(x, A), \sup_{y \in A} d(y, B)\}$$

که منظور از  $d(x, A) \equiv \inf_{y \in A} d(x, y)$  فاصله عنصر  $x$  تا مجموعه  $A$  است.

همچنین، مشتق هاگوهارا<sup>۲۲</sup> برای توابع فازی بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D_H F(t) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(t-h)}{h}$$

با تعریف نرم ماکزیمم بصورت

23. time scale  
24. minimal element  
25. maximal element  
26. jump operators

18. fuzzy convex  
19. upper semicontinuous  
20. vector fuzzy metric  
21. Hausdorff distance  
22. Hukuhara derivative

که در آن  $L(t)$  یک ماتریس  $N \times N$  با عناصر غیرمنفی پیوسته بر  $\mathbb{R}_+$  است و

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \equiv (|V_1(t, X) - V_1(t, Y)|, |V_2(t, X) - V_2(t, Y)|, \dots, |V_N(t, X) - V_N(t, Y)|).$$

در اینجا منظور از  $|V(t, X)|$  بردار  $(|V_1(t, X)|, |V_2(t, X)|, \dots, |V_N(t, X)|)$  است که  $V_i$  ها ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) عناصر  $V$  هستند. (ج) برای هر  $k \in \mathbb{N}$  حدود کراندار زیر وجود داشته باشند

$$\lim_{(t, Y) \rightarrow (t_k, X)} V(t, Y) = V(t_k^-, X)$$

**تعریف ۹-۲:** فرض کنید  $V \in \mathbb{V}_0$  است؛ مشتق چپ

$$D^-V(t, X) \equiv \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf V(t+h(t), X(t+h(t)) + h(t)F(t, X(t), X(t-d))) - V(t, X(t)) \\ = \frac{V(\sigma(t), X(\sigma(t)) + (\sigma(t) - t)F(t, X(t), X(t-d))) - V(t, X(t))}{\sigma(t) - t}$$

### ۳- نتایج اصلی

سیستم معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای دارای تاخیر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} D_H X(t) = F(t, X(t), X(t-d)), \quad t \in (t_k, t_{k+1}] \\ X(t_0^+) = X_0, \quad I_0(X_0) = X_0, \quad X(t_0 + t) = \psi(t), \quad t \in [-d, 0] \\ X(t_k) = X_k, \quad X(t_k^+) = X_k^+, \quad X_k^+ = X_k + I_k(X_k), \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

که در آن  $d = const > 0$  تاخیر محدود،  $\Omega$  حوزه‌ای شامل مبدا در فضای فازی،  $\psi \in C([-d, 0], \Omega)$ ،  $I_k(\hat{0}) = 0$ ،  $F(t, \hat{0}, \hat{0}, \cdot) \equiv 0$ ،  $t_1 < \dots < t_k < \dots$  بازای  $k \rightarrow \infty$ ،  $X(t^-) = X(t^+) = \lim_{r \rightarrow t^+} X(r)$  و  $I_k: (E^n)^N \rightarrow (E^n)^N$  هستند. توابع  $I_k$  به گونه‌ای هستند که اگر  $\|\widehat{D}_0(X, \hat{0})\| < L$  و  $I_k(X) \neq \hat{0}$  باشد، آنگاه  $\|\widehat{D}_0(X + I_k(X), \hat{0})\| < L$  است که در آن  $L$  ثابتی مثبت و  $\hat{0}$  مبدا فازی است.

$$\Gamma_d \triangleq \{h \in C[\mathbb{R}_d \times (E^n)^N, \mathbb{R}^+]: \forall t \in \mathbb{R}_d = [-d, \infty), \inf_{X \in (E^n)^N} h(t, X) = 0\}$$

**تعریف ۵-۲:** با فرض  $h_0 \in \Gamma_d$   $\psi \in PC([-d, 0], (E^n)^N)$  و بازای هر  $t \in \mathcal{T}$  تعریف می‌کنیم [7]

$$\widetilde{h}_0(t, \psi) \triangleq \sup_{-d \leq \zeta \leq 0} h_0(t + \zeta, \psi(\zeta))$$

**تعریف ۶-۲:** عضو غیرماکزیمال  $t \in \mathcal{T}$  را پراکنده از راست  $rs$ <sup>۲۷</sup> گوئیم اگر  $\sigma(t) > t$  و متراکم از راست  $rd$ <sup>۲۸</sup> نامیم اگر  $\sigma(t) = t$ . عضو غیرمینیمال  $t \in \mathcal{T}$  را پراکنده از چپ  $ls$ <sup>۲۹</sup> گوئیم اگر  $\rho(t) < t$  و متراکم از چپ  $ld$ <sup>۳۰</sup> نامیم اگر  $\rho(t) = t$  [9].

**تعریف ۷-۲:** نگاشت  $H: \mathcal{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  را پیوسته متراکم از راست  $rs$ <sup>۳۱</sup> گوئیم و بصورت  $H \in C_{rd}[\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$  نمایش می‌دهیم اگر (الف) بازای  $t$  ماکزیمال یا متراکم از راست، در هر  $(t, x)$  پیوسته باشد؛

(ب) حدود  $H(t^-, x) = \lim_{(s, y) \rightarrow (t^-, x)} H(s, y)$  و  $\lim_{y \rightarrow x} H(t, y)$  در هر  $(t, x)$  بازای  $t$  متراکم از چپ موجود باشند. [9]

**تعریف ۸-۲:** تابع  $V: \mathcal{T} \times S(\rho) \rightarrow \mathbb{R}^N$  متعلق به کلاس  $\mathbb{V}_0$  است اگر [17]

(الف) تابع  $V$  در تمام بازه‌های  $[t_{k-1}, t_k] \times S(\rho)$  پیوسته باشد و برای تمام  $t \in \mathcal{T}$  داشته باشیم  $V(t, \hat{0}) \equiv 0$

(ب) تابع  $V(t, X)$  لیپ شیتز محلی<sup>۳۲</sup> برحسب  $X$  باشد؛ یعنی برای

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \leq L(t) \widehat{D}_0(X, Y),$$

27. right-scattered (rs)  
28. right-dense (rd)  
29. left-scattered (ls)  
30. left-dense (ld)  
31. right-dense (rd) continuous  
32. locally Lipschitzian

$$\|U_0\| < \alpha \Rightarrow \|U(t)\| < \beta, \quad t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), \quad t \in \mathcal{T};$$

(ب) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت<sup>۳۴</sup> (UEPS) گوئیم، اگر (الف) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

(ج) شبه پایدار کاربردی نهایی<sup>۳۵</sup> (EPQ) نامیم، اگر  $\alpha, \beta, T > 0$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}$  با:

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < \alpha \Rightarrow t_0 + T \in \mathcal{T} \\ \|U(t)\| < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), \quad t \in \mathcal{T};$$

(د) شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت<sup>۳۶</sup> (UEPQ) گوئیم، اگر (ج) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

(ه) پایدار کاربردی نهایی قوی<sup>۳۷</sup> (SEPS) نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و) پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی<sup>۳۸</sup> (SUEPS) گوئیم، اگر (ب) و (د) بطور توأم برقرار باشند.

**تعریف ۳-۲:** فرض کنید  $Q_0, Q \in \mathcal{K}$  و  $U(t) = U(t, t_0, U_0)$  پاسخی از سیستم (۳،۲) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف)  $(Q_0, Q)$ -پایدار کاربردی نهایی  $(Q_0, Q)$ -EPS نامیم، اگر برای  $0 < \alpha < \beta$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \quad Q_0(\|U_0\|) < \alpha \Rightarrow \\ Q(\|U(t)\|) < \beta, \quad t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), \quad t \in \mathcal{T};$$

(ب)  $(Q_0, Q)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت  $((Q_0, Q)$ -UEPS) گوئیم، اگر (الف) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

منظور از  $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$  مجموعه توابع تکه‌ای پیوسته از چپ  $f: [-d, 0] \rightarrow \mathbb{R}^N$  با نرم سوپریم  $\| \cdot \|$  است، که در آن  $\|f\| = \sup_{-d \leq r \leq 0} \|f(r)\|$  نرمی در فضای  $\mathbb{R}^N$  است.

فرض می‌کنیم شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) برای هر تابع  $X(s): [t_0 - d, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^n)^N$  که همه جا پیوسته است به جز در  $t_k$  که در آن  $X(t_k^+) = X(t_k)$  و  $X(t_k^-)$  موجود است، تابع  $(F(t, X(t), X(t-d)))$  بازای تقریباً هر  $t \in \mathcal{T}$  پیوسته است و در نقاط ناپیوستگی‌اش، از چپ پیوسته است.

(ب) تابع  $F(t, \varphi)$  بر حسب  $\varphi$  در هر مجموعه فشرده از  $PC([-d, 0], \mathbb{R}^N)$  لپ شیتز است.

با شرایط فوق، جواب یکتایی برای سیستم (۳،۱) موجود است [23].

به همراه سیستم دیفرانسیل فازی (۳،۱)، سیستم مقایسه‌ای معمولی (یقینی) زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} U'(t) = G(t, U), \quad t > t_0, t \in (t_k, t_{k+1}] \\ U(t_0) = U_0, \\ U(t_k) = U_k, U(t_k^+) = U_k^+, U_k^+ = U_k + J_k(U_k), k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

در آن  $J_k: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N, k \in \mathbb{N}, G: \mathcal{T} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$  که  $\mathcal{G}$  حوزه‌ای از  $\mathbb{R}^N$  شامل مبدا و  $U_0 \in \mathcal{G}$  است. اگر ماکزیمم بازه به فرم  $[t_0, w)$  که جواب سیستم (۳،۲) تعریف شده است را با  $J^+(t_0, U_0)$  نمایش دهیم، با فرض برقراری شرایط (الف) و (ب) فوق،  $J^+(t_0, U_0) = \mathcal{T} = [t_0, \infty)$  است [10].

حال به تعریف برخی از مفاهیم پایداری می‌پردازیم که با توجه به مراجع [9, 23] استخراج شده‌اند.

**تعریف ۳-۱:** اگر  $U(t) = U(t, t_0, U_0)$  پاسخی از سیستم (۳،۲) باشد، آنگاه این سیستم را

نامیم، اگر برای (الف) پایدار کاربردی نهایی<sup>۳۳</sup> (EPS)  $0 < \alpha < \beta$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}, \exists \tau(\alpha, \beta) > 0;$

34. uniform eventual practical stable (UEPS)  
35. eventual practical quasistable (EPQ)  
36. uniform eventual practical quasistable (UEPQ)  
37. strong eventual practical stable (SEPS)  
38. strong uniform eventual practical stable (SUEPS)

33. eventual practical stable (EPS)

(ه)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی قوی  $(\bar{h}_0, h)$ -SEPS نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی  $(\bar{h}_0, h)$ -SUEPS گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توأم برقرار باشند.

(ز)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار مجانبی کاربردی  $(\bar{h}_0, h)$ -PAS نامیم، اگر (الف) برقرار باشد و

$$\forall t_0 \in \mathcal{T} \exists T = T(t_0, \varepsilon) > 0;$$

$$\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \varepsilon, t \geq t_0 + T;$$

(ح)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار مجانبی کاربردی یکنواخت<sup>۴۰</sup>

$(\bar{h}_0, h)$ -UPAS گوییم، اگر (ب) برقرار باشد و  $T$  در (ز) مستقل از  $t_0$  باشد.

حال اصول مقایسه و قضایای پایداری جدید را برای سیستم معادلات دیفرانسیل فازی دارای تاخیر، در فضای فازی  $N$ -بعدی را ارائه می‌کنیم.

**قضیه ۳-۳:** فرض کنید

(الف)  $V \in C[\mathcal{T} \times (E^n)^N, R^N]$  و برای  $X, Y \in (E^n)^N$  داشته باشیم  $|V(t, X) - L(t)| \leq L(t)\bar{D}_0(X, Y)$  که در آن

ماتریس  $N \times N$  با عناصر پیوسته نامنفی بر  $R_+$  است و طبق تعریف

$$|V(t, X) - V(t, Y)| \equiv (|V_1(t, X) - V_1(t, Y)|, |V_2(t, X) - V_2(t, Y)|, \dots, |V_N(t, X) - V_N(t, Y)|).$$

در اینجا منظور از  $|V(t, X)|$  بردار  $(|V_1(t, X)|, |V_2(t, X)|, \dots, |V_N(t, X)|)$  است که  $V_i$ ها ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) مولفه‌های  $V$  هستند.

(ب)  $G$  غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی بر حسب  $U$  بازای  $t \in \mathcal{T}$  است، و برای  $X \in (E^n)^N$  داریم:  $D^-V(t, X) \leq G(t, V(t, X))$

(ج)  $(Q_0, Q)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی  $(Q_0, Q)$ -EPQ نامیم، اگر برای  $\alpha, \beta, T > 0$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}$  با  $t_0 + T \in \mathcal{T}$

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; Q_0(\|U_0\|) < \alpha \Rightarrow Q(\|U(t)\|) < \beta, t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(د)  $(Q_0, Q)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت  $(Q_0, Q)$ -UEPQ گوییم، اگر (ج) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

(ه)  $(Q_0, Q)$ -پایدار کاربردی نهایی قوی  $(Q_0, Q)$ -SEPS نامیم، اگر (الف) و (ج) همزمان برقرار باشند؛

(و)  $(Q_0, Q)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت قوی  $(Q_0, Q)$ -SUEPS گوییم، اگر (ب) و (د) بطور توأم برقرار باشند.

**تعریف ۳-۳:** فرض کنید  $h_0 \in \Gamma_d$   $h \in \Gamma$

و  $X(t) = X(t, t_0, \psi)$  پاسخی از سیستم (۳.۱) باشد، آنگاه این سیستم را

(الف)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی  $(\bar{h}_0, h)$ -EPS نامیم، اگر برای  $0 < \alpha < \beta$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}$

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(ب)  $(\bar{h}_0, h)$ -پایدار کاربردی نهایی یکنواخت  $(\bar{h}_0, h)$ -UEPS گوییم، اگر (الف) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

(ج)  $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی  $(\bar{h}_0, h)$ -EPQ نامیم، اگر برای  $\alpha, \beta, T > 0$  و برخی  $t_0 \in \mathcal{T}$  با  $t_0 + T \in \mathcal{T}$

$$\exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T};$$

(د)  $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایدار کاربردی نهایی یکنواخت  $(\bar{h}_0, h)$ -UEPQ گوییم، اگر (ج) بازای هر  $t_0 \in \mathcal{T}$  برقرار باشد؛

39.  $(\bar{h}_0, h)$ -practical asymptotic stable  $(\bar{h}_0, h)$ -PAS

40.  $(\bar{h}_0, h)$ -uniform practical asymptotic stable  $(\bar{h}_0, h)$ -UPAS

$$D^-m(t) \equiv \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf \frac{m(t+h(t)) - m(t)}{h(t)} \leq \lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf \left[ \frac{L(t+h(t)) \bar{D}_0(X(t+h(t)) - X(t), h(t)F(t, X(t)))}{h(t)} + \frac{V(t+h(t), X+h(t)F(t, X)) - V(t, X)}{h(t)} \right] =$$

$$\lim_{h(t) \rightarrow 0^-} \inf L(t + h(t)) \bar{D}_0 \left[ \frac{X(t+h(t)) - X(t)}{h(t)}, F(t, X(t)) \right] + D^-V(t, X) = L(t) \bar{D}_0 [D_H X, F(t, X(t))] + D^-V(t, X)$$

(ج)  $M(t) = M(t, t_0, U_0)$  و  $U \in \mathbb{R}^N$  پاسخ  
ماکزیمال<sup>۴۱</sup> سیستم زیر است:  
 $U' = G(t, U), \quad U(t_0) = U_0$   
آنگاه برای هر پاسخ سیستم فازی  
 $D_H X = F(t, X), \quad X(t_0) = X_0$   
داریم  
 $\|V(t, X)\| \leq \|U(t)\|, \quad t \in \mathcal{T},$

بنابراین

$$D^-m(t) \leq G(t, m(t))$$

که نتیجه می‌دهد

$$\|V(t_0, X_0)\| \leq \|U_0\|$$

که می‌توان گفت:

$$\|D^-m(t)\| \leq \|G(t, m(t))\|$$

اثبات: تعریف می‌کنیم  $m(t) = V(t, X(t))$ . طبق (الف) داریم

با استفاده از تئوری نامعادلات دیفرانسیلی به این نتیجه می‌رسیم که

$$\|V(t, X)\| \leq \|M(t)\|$$

$$m(t+h(t)) - m(t) = V(t+h(t), X(t+h(t))) - V(t, X(t)) = V(t+h(t), X(t+h(t))) - V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t)) \leq L(t+h(t)) \bar{D}_0(X(t+h(t)), X(t) + h(t)F(t, X(t))) + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t))$$

**قضیه ۳-۵:** فرض کنید (الف) تابع  $G$  غیرنزولی شبه یکنوای فوقانی و پیوسته بر روی مجموعه‌های  $t_k, t_{k+1} \times \mathcal{G}$  بازای  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

با اعمال خواص متر هاسدورف<sup>۴۲</sup> بدست می‌آوریم:

$$M(t) = \begin{cases} U_0 & t = t_0 \\ M_0(t, t_0, U_0) & t \in (t_0, t_1] \\ M_1(t, t_1, U_1^+) & t \in (t_1, t_2] \\ \dots \\ M_k(t, t_k, U_k^+) & t \in (t_k, t_{k+1}] \end{cases}$$

$$m(t+h(t)) - m(t) \leq L(t+h(t)) \bar{D}_0(X(t+h(t)), X(t), h(t)F(t, X(t))) + V(t+h(t), X(t) + h(t)F(t, X(t))) - V(t, X(t))$$

جواب ماکزیمال سیستم (۳،۲) است:

(ب) توابع  $\varphi_k: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N, \varphi_k(U) = U + J_k(U)$

غیرنزولی یکنوای فوقانی در  $\mathcal{G}$  هستند؛

(ج) بازای هر  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  و  $\beta \in \mathcal{G}$  حد

$$\lim_{(t, \alpha) \rightarrow (t, \beta)} G(t, \alpha)$$

(د) تابع  $V \in \mathcal{V}_0$  به گونه‌ای است که

$$\|V(t_0, \psi)\| \leq \|U_0\|$$

طبق تعریف مشتق چپ دینی خواهیم داشت:

41. maximal solution  
42. Hausdorff metric

$$\begin{aligned} & \left\| V(t_k^+, X(t_k^+) + I_k(X(t_k^+))) \right\| \leq \\ & \left\| \varphi_k(V(t_k, X(t_k))) \right\| \leq \\ & \left\| \varphi_k(M(t_k, t_0, U_0)) \right\| = \\ & \left\| \varphi_k(M_{k-1}(t_k, t_{k-1}, U_{k-1})) \right\| = U_k. \end{aligned}$$

به طریق مشابه با اعمال قضیه ۳-۴ به بازه‌های بعدی تا  $t \in (t_k, t_{k+1}]$  بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left\| V(t, X(t, t_0, \psi)) \right\| \leq \left\| M_k(t, t_k, U_k) \right\| \\ & = \left\| M(t, t_0, U_0) \right\| \end{aligned}$$

بنابراین، نامساوی (۳،۴) به استقراء برقرار است و اثبات به اتمام می‌رسد.

**قضیه ۳-۶:** فرض کنید  $h \in \Gamma$ ,  $\varphi \in \mathcal{K}$  و شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است. علاوه بر آن داریم  $h_0 \in \Gamma_d$  (الف)  $0 < \alpha < \beta$

(ب)  $h(t, X) \leq \bar{h}_0(t, X) < \alpha$  نتیجه می‌دهد  $\varphi(\bar{h}_0(t, X))$  و به اصطلاح گوییم  $\bar{h}_0$  ظرفتر<sup>۳۳</sup> از  $h$  است؛

(ج) برای  $\forall \mathbf{0} \in V$ ، وجود دارد  $a, b \in \mathcal{K}$  به قسمی که  $(h(t, X)) \leq \|V(t, X)\| \leq a(\bar{h}_0(t, X))$ ؛  
(د)  $\varphi(\alpha) < \beta$  و  $a(\alpha) < b(\beta)$

آنگاه انواع مفاهیم پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲)، منجر به انواع خواص مشابه  $(\bar{h}_0, h)$ -پایداری نهایی سیستم فازی ضربه ای تاخیری (۳،۱) می‌گردند.

**اثبات:** ابتدا به بررسی پایداری یکنواخت می‌پردازیم. فرض کنید سیستم (۳،۲) پایدار به مفهوم UEPS باشد. در اینصورت برای  $(a(\alpha), b(\beta))$  داده شده با  $0 < \alpha < \beta$   
 $\forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \tau(\alpha, \beta) > 0$  ;  $\|U_0\| < a(\alpha)$   
 $\Rightarrow \|U(t, t_0, U_0)\| < b(\beta), t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T}$ .

(ه) معادلات زیر برقرار هستند:

$$\begin{aligned} & D^-V(t, X(t)) \leq G(t, V(t, X(t))), \\ & t \in (t_k, t_{k+1}) \\ & \left\| V(t^+, X(t^+) + I_k(X(t^+))) \right\| \\ & \leq \left\| \varphi_k(V(t, X(t))) \right\|, \\ & t = t_k \end{aligned}$$

در اینصورت برای هر تابع  $X \in C_{rd}[\mathcal{T}, \Omega]$  به قسمی که

$$\begin{aligned} & \left\| V(t+r, X(t+r)) \right\| \leq \left\| V(t, X(t)) \right\|, \\ & r \in [-d, 0]. \end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \left\| V(t, X(t, t_0, \psi)) \right\| \leq \left\| M(t, t_0, U_0) \right\|, \\ & t \in \mathcal{T}. \end{aligned} \tag{۳،۴}$$

که  $X(t) = X(t, t_0, \psi)$  بیانگر پاسخ سیستم (۳،۱) و  $M(t) = M(t, t_0, U_0)$  پاسخ ماکزیمال سیستم (۳،۲) است.

**اثبات:** از آن جایی که در بازه  $(t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$  تابع  $X(t)$  منطبق بر پاسخ سیستم (۳،۱) است، نتیجه می‌گیریم که برای  $t_{k-1} < t \leq t_k$  تابع  $X(t)$  در معادله انتگرالی زیر صدق می‌کند

$$\begin{aligned} & X(t) = X(t_k) + I_k(X(t_k)) + \\ & \int_{t_k}^t F(r, X(r), X(r-d)) dr \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم  $t \in (t_0, t_1]$  در اینصورت طبق قضیه ۳-۴ داریم

$$\begin{aligned} & \left\| V(t, X(t, t_0, \psi)) \right\| \leq \left\| M(t, t_0, U_0) \right\|, \\ & t \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

با فرض اینکه نامعادله (۳،۴) بازای هر  $t \in (t_{k-1}, t_k], k \in \mathbb{N}$  برقرار است، با استفاده از (۳،۳) و توجه به این که توابع  $\varphi_k$  غیرنزولی یکنوا هستند، داریم:



اثبات کردیم، سیستم فازی (۳،۱) پایدار به مفهوم  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi)$ -UEPS است. بنابراین

$$\forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \tau_1(\alpha, \beta) > 0; \widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$$

$$\Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 \geq \tau_1(\alpha, \beta).$$

فرض کنید سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) پایدار به مفهوم UEPQ است؛ آنگاه بازای  $(a(\alpha), b(\beta))$  داده شده

$$\forall t_0 \in \mathcal{T}, \exists \tau_2(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < a(\alpha)$$

$$\Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau_2(\alpha, \beta).$$

با تعریف

$$\tau(\alpha, \beta) \equiv \max\{\tau_1(\alpha, \beta), \tau_2(\alpha, \beta)\},$$

ثابت می‌کنیم

(۳،۶)

$$h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T,$$

$$t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T}$$

فرض کنید  $V(t_0, \psi) = U_0$  باشد، از آن جایی که  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  است، از (ج) نتیجه می‌گیریم

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 \geq \tau_2(\alpha, \beta).$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است داریم

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0,$$

این معادله به همراه (ج) منجر به تناقض زیر می‌شود

$$b(h(t, X(t))) \leq \|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

بنابراین (۳،۶) برقرار است، یعنی

$$\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < u \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

بازای هر  $(t_0, \psi) \in \mathcal{T} \times PC([-d, 0], (E^n)^N)$  به گونه ای که  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  باشد، طبق شرایط (ب) و (د) داریم

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می‌کنیم که

(۳،۵)

$$h(t, X(t)) < \beta \quad \forall t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

به برهان خلف ادعای فوق را ثابت می‌کنیم. اگر معادله فوق صحیح نباشد، فرض خلف را به این صورت می‌گیریم که وجود دارد  $t^* > t_0$  که  $t^* \in [t_k, t_{k+1}]$  برای برخی  $k \in \mathbb{N}$  به قسمی که

$$h(t^*, X(t^*)) \geq \beta, \quad h(t, X(t)) < \beta,$$

$$t_0 \leq t < t^*$$

فرض می‌کنیم  $V(t_0, \psi) = U_0$  باشد، از آن جایی که  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  است طبق شرط (ج):

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha)$$

که منجر می‌شود به

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad \text{for } t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta).$$

از آن جایی که شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است، داریم

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0,$$

این معادله به همراه (ج) ما را به تناقض زیر می‌رساند

$$b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq \|V(t^*, X(t^*))\| \leq \|M(t^*)\| < b(\beta)$$

این تناقض نشانگر باطل بودن فرض خلف و برقراری نامعادله (۳،۵) است، یعنی  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  نتیجه می‌دهد  $h(t, X(t)) < \beta$  بازای هر  $t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$  که به معنای پایداری  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi)$ -UEPS برای سیستم فازی (۳،۱) است.

حال به بررسی پایداری قوی می‌پردازیم. برای ثوابت  $0 < \alpha < \beta$  و  $T > 0$ ، طبق آنچه در بخش قبل

این به همراه (ج) به تناقض زیر می‌انجامد:

$$b(h(t, X(t))) \leq \|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\| < b(\beta),$$

$$t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

بنابراین (۳.۷) برقرار است یعنی:

$$\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

پس سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳.۱)،  $(\widetilde{h}_0, h)$ -UEPQ است.

**قضیه ۳-۸:** فرض کنید  $\alpha \in \mathcal{K}$ ،  $h \in \Gamma$ ،  $\varphi \in \mathcal{K}$  و  $h_0 \in \Gamma_d$  (الف)  $0 < \alpha < \beta$

(ب)  $\widetilde{h}_0(t, X) < \alpha$  نتیجه می‌دهد  $h(t, X) \leq \varphi(\widetilde{h}_0(t, X))$  و به اصطلاح گوییم  $\widetilde{h}_0$  ظریفتر از  $h$  است؛

(ج) برای  $V \in \mathbb{V}_0$ ، وجود دارد  $a, b \in \mathcal{K}$  به قسمی که

$$b(h(t, X)) \leq \|V(t, X)\| \leq a(\widetilde{h}_0(t, X));$$

$$D^-V(t, X(t)) \leq 0, \quad X \in C_{rd}[\mathcal{J}, \Omega], \quad (د)$$

$$t \in (t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\|V(t^+, X(t) + I_k(X(t)))\| \leq \|V(t, X(t))\|, \quad (ه)$$

$$X \in C_{rd}[\mathcal{J}, \Omega], \quad t = t_k, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\varphi(\alpha) < \beta \text{ و } a(\alpha) < b(\beta) \quad (و)$$

آنگاه سیستم تاخیری فازی ضربه‌ای (۳.۱)،  $(\widetilde{h}_0, h)$ -UEPS است.

**اثبات:** از (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

سپس ثابت می‌کنیم  $(\widetilde{h}_0, h)$ -UEPS است، یعنی

و سیستم فازی ضربه‌ای (۳.۱) پایدار  $(\widetilde{h}_0, h)$ -SUEPS است.

**قضیه ۳-۷:** فرض کنید شرایط قضیه ۳-۶ برقرار است به غیر از شرط (د) که با شرط زیر جایگزین شده است  $\varphi(\alpha) < \beta$  (ذ)

آنگاه خواص شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳.۲) بیانگر خواص  $(\widetilde{h}_0, h)$ -شبه پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری متناظر (۳.۱) خواهند بود.

**اثبات:** فرض کنید سیستم (۳.۲)، UEPQ باشد؛ در اینصورت بازای  $(a(\alpha), b(\beta))$  داده شده با  $\alpha, \beta, T > 0$  داریم:

$$\forall t_0 \in \mathcal{J}, \exists \tau(\alpha, \beta) > 0; \|U_0\| < a(\alpha) \Rightarrow \|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta).$$

بازای هر  $(t_0, \psi) \in \mathcal{J} \times PC([-d, 0], (E^n)^N)$  به گونه‌ای که  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  از (ب) و (ذ) می‌یابیم

$$h(t_0, \psi) \leq \varphi(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < \varphi(\alpha) < \beta$$

ادعا می‌کنیم که: (۳.۷)

$$h(t, X(t)) < \beta, \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta)$$

فرض می‌گیریم  $V(t_0, \psi) = U_0$  باشد، چون  $\widetilde{h}_0(t_0, \psi) < \alpha$  است از (ج) داریم:

$$\|V(t_0, \psi)\| = \|U_0\| \leq a(\widetilde{h}_0(t_0, \psi)) < a(\alpha)$$

که بیانگر آن است که

$$\|U(t)\| < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, \quad t_0 \geq \tau(\alpha, \beta).$$

پس چون شرایط قضیه ۳-۵ برقرار است

$$\|V(t, X(t))\| \leq \|M(t)\|, \quad t \geq t_0,$$

برای هر  $\varepsilon \in (0, \alpha)$  داده شده، فرض می‌کنیم

$$T = \frac{a(\alpha)}{c(b(\varepsilon))} > 0$$

ثابت می‌کنیم  $t^* \in [t_0, t_0 + T]: t_k < t^* \leq t_{k+1}, k \in \mathbb{N}$  وجود دارد، به قسمی که: (۳،۱۰)

$$m(t^*) < b(\varepsilon).$$

اگر چنین نباشد، آنگاه

$$m(t) \geq b(\varepsilon), t \in [t_0, t_0 + T].$$

با فرض  $t_1, t_2, \dots, t_p \in [t_0, t_0 + T]$ ، از (۵) و (ذ) داریم:

$$\begin{aligned} m(t_0 + T) - m(t_0^+) &= [m(t_0 + T) - m(t_p)] + [m(t_p) - m(t_{p-1})] + \dots + \\ &+ [m(t_2) - m(t_1)] + [m(t_1) - m(t_0^+)] \leq [m(t_0 + T) - m(t_p^+)] + \\ &+ [m(t_p) - m(t_{p-1}^+)] + \dots + [m(t_2) - m(t_1^+)] + [m(t_1) - m(t_0^+)] \leq \int_{t_p^+}^{t_0+T} D^-V(t, X(t), X_p) dt + \\ &+ \int_{t_{p-1}^+}^{t_p} D^-V(t, X(t), X_{p-1}) dt + \dots + \int_{t_1^+}^{t_2} D^-V(t, X(t), X_1) dt + \\ &+ \int_{t_0^+}^{t_1} D^-V(t, X(t), X_0) dt \leq -c(b(\varepsilon))T \end{aligned}$$

این نامساوی به همراه (ج) منجر می‌شود به

$$-a(\alpha) \leq -m(t_0^+) \leq m(t_0 + T) - m(t_0^+) \leq -c(b(\varepsilon))T < -a(\alpha) - 1$$

که تناقض است. بنابراین نامعادله (۳،۱۰) برقرار است.

با استفاده از (ج)، (ه)، (ذ) و (۳،۱۰) بدست می‌آوریم

$$b(h(t, X)) \leq m(t) \leq m(t^*) < b(\varepsilon), t \geq t^*,$$

چون  $b$  تابعی از کلاس  $\mathcal{K}$  (اکیداً صعودی) است نتیجه می‌شود

$$h(t, X) < \varepsilon, t \geq t_0 + T.$$

بنابراین سیستم دیفرانسیل فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۱) پایدار به مفهوم UPAS- $(\bar{h}_0, h)$  است.

$$h(t, X) < \beta, t \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{h}_0(t_0, \psi) < \varphi(\alpha)$$

اگر اینگونه نباشد، وجود دارد جوابی از سیستم (۳،۱) با  $t^* \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N}$  و  $\bar{h}_0(t_0, \psi) < \varphi(\alpha)$

به گونه‌ای که:

$$(۳،۸)$$

$$h(t^*, X(t^*)) = \beta, X \in C_{rd}[\mathcal{T}, \Omega], t \in [t_0, t^*].$$

حال با تعریف  $m(t) = V(t, X(t))$  بازای

$t \in [t_0, t^*]$  از (د) و (ه) می‌یابیم:

$$(۳،۹)$$

$$m(t^*) \leq m(t_k^+) \leq m(t_k) \leq \dots \leq m(t_0^+).$$

با استفاده از (ج)، (و)، (۳،۸)، و (۳،۹) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq m(t^*) \leq m(t_0^+) \leq a(\bar{h}_0(t_0, \psi)) \leq a(\alpha) < b(\beta) \end{aligned}$$

که تناقض است و اینگونه اثبات به اتمام می‌رسد.

**قضیه ۳-۹:** فرض کنید شرایط قضیه ۳-۸ برقرار باشند

به جز شرط (د) که با شرط زیر جایگزین گردد

$$D^-V(t, X(t)) \leq -c(V(t, X(t))), \quad (ذ)$$

$$X \in C_{rd}[\mathcal{T}, \Omega], t \in (t_k, t_{k+1}), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, c \in \mathcal{K}$$

آنگاه سیستم تاخیری فازی ضربه‌ای (۳،۱)  $(\bar{h}_0, h)$ -UPAS است.

**اثبات:** از آن جایی که (ذ) بطور ضمنی (د) را نتیجه می‌دهد، طبق قضیه ۳-۸ سیستم (۳،۱) پایدار UEPS- $(\bar{h}_0, h)$  است، یعنی:

$$\bar{h}_0(t_0, \psi) < \alpha \Rightarrow h(t, X(t)) < \beta, t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t \in \mathcal{T}$$

آنگاه مفاهیم  $(Q_0, Q)$ -شبه پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) متناظر با  $(\bar{h}_0, h)$ -شبه پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲) است.

**اثبات:** فرض کنید سیستم  $(Q_0, Q)$ -EPQ، (۳،۲) است. آنگاه  $(a(\alpha), b(\beta))$  داریم به گونه‌ای که

$$Q_0(\|U_0\|) < a(\alpha) \Rightarrow Q(\|U(t)\|) < b(\beta), \quad t \geq t_0 + T, t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t_0 \in \mathcal{T}, T > 0.$$

فرض کنید سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲)،  $(Q_0, Q)$ -EPS نباشد، آنگاه مشابه آنچه در اثبات قضیه ۳-۷ بیان شد، با استفاده از قضیه ۳-۵، (ب) و (ج) می‌توانیم ثابت کنیم که

$$Q_0(\|V(t, X(t))\|) \leq a(\bar{h}_0(t, X(t))) \leq a(\bar{h}_0(t^*, X(t^*))) \leq a(\alpha).$$

سپس با استفاده از (ج) داریم

$$b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq Q(\|V(t^*, X(t^*))\|) \leq Q(\|M(t^*)\|) < b(\beta),$$

که تناقض است و ادعای قضیه برقرار است.

**توجه:** در مدل‌سازی، کنترل و بهینه سازی پروسه‌های شیمیایی باشد عدم قطعیت‌های ناشی از عدم دقت پارامترها، از جمله ضرایب انتقال جرم و حرارت<sup>۴۴</sup>، و خطاهای اندازه‌گیری، مثلاً در اندازه‌گیری در لحظه تشکیل بخار<sup>۴۵</sup> و تقریب ویژگی‌های فیزیکی در نظر گرفته شوند. در این موارد، نظریه فازی ابزار قدرتمندی برای لحاظ کردن عدم قطعیت‌های پروسه است. مثالی عملی از یک پروسه شیمیایی که در آن دما و فشار متغیرهای حالت آن هستند در زیر آورده شده است [31].

**قضیه ۳-۱۰:** فرض کنید شرایط قضیه ۳-۶ برقرار است بجز شرط (ج) که با شرط زیر جایگزین شده است (ج) بازای  $a, b, Q_0, Q \in \mathcal{K}$

$$Q(\|V(t, X)\|) \geq b(h(t, X)), \\ Q_0(\|V(t, X)\|) \leq a(\bar{h}_0(t, X)).$$

آنگاه مفاهیم  $(Q_0, Q)$ -پایداری نهایی سیستم مقایسه‌ای (۳،۲) به معنای مفاهیم مشابه  $(\bar{h}_0, h)$ -پایداری نهایی سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲) است.

**اثبات:** فرض کنید سیستم  $(Q_0, Q)$ -EPS، (۳،۲) است. آنگاه  $(a(\alpha), b(\beta))$  داریم به گونه‌ای که:

$$Q_0(\|U_0\|) < a(\alpha) \Rightarrow Q(\|U(t)\|) < b(\beta), \quad t \geq t_0 \geq \tau(\alpha, \beta), t_0 \in \mathcal{T}.$$

فرض کنید سیستم فازی ضربه‌ای تاخیری (۳،۲)،  $(Q_0, Q)$ -EPS نباشد، آنگاه مشابه آنچه در اثبات قضیه ۳-۶ بیان شد، با استفاده از قضیه ۳-۵، (ب) و (ج) می‌توانیم ثابت کنیم که

$$Q_0(\|V(t, X(t))\|) \leq a(\bar{h}_0(t, X(t))) \leq a(\bar{h}_0(t^*, X(t^*))) \leq a(\alpha).$$

سپس با استفاده از (ج) داریم

$$b(\beta) \leq b(h(t^*, X(t^*))) \leq Q(\|V(t^*, X(t^*))\|) \leq Q(\|M(t^*)\|) < b(\beta),$$

که تناقض است و ادعای قضیه برقرار است.

**قضیه ۳-۱۱:** فرض کنید شرایط قضیه ۳-۷ برقرار است بجز شرط (ج) که با شرط زیر جایگزین شده است (ج) بازای  $a, b, Q_0, Q \in \mathcal{K}$

$$Q(\|V(t, X)\|) \geq b(h(t, X)), \\ Q_0(\|V(t, X)\|) \leq a(\bar{h}_0(t, X)).$$

44. heat and mass transfer coefficients

45. real-time measurement of steam composition

همچنین طبق خواص فاصله  $D_0(X, Y)$  از مراجع [23, 28] برای تمام  $X, Y, W, Z \in E^n$  و  $\lambda \in \mathbb{R}$  داریم:

$$\begin{aligned} D_0(X + W, Y + W) &= D_0(X, Y) \text{ (الف)} \\ D_0(\lambda X, \lambda Y) &= |\lambda| D_0(X, Y) \text{ (ب)} \\ D_0(X + W, Y + Z) &\leq D_0(X, Y) + D_0(W, Z) \text{ (ج)} \end{aligned}$$

از تعریف مشتق دینی تابع لیاپانوف و با استفاده از خواص فوق بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} D^-V(t, X) &= \\ \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{D_0(t + h, X(t + h(t)) + h(t)F(t, X(t), X(t - d))) - D_0(t, X(t))}{h} &\leq -D_0(\varphi_1, \varphi_2) + L\rho \end{aligned}$$

که در آن  $L = \max\{L_1, L_2\}$  است. بنابراین، معادله سیستم اسکالر مقایسه‌ای را در این حالت بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u'(t) = -u + L\rho$$

که دارای پاسخ

$$u(t) = (-L\rho + u_0)e^{-(t-t_0)} + L\rho$$

است. بنابراین،  $|u(t)| \leq |u_0| + 2L\rho$  که نشان می‌دهد پاسخ سیستم مقایسه‌ای اسکالر پایدار یکنواخت است، پس طبق قضیه ۳-۸ سیستم فازی (۳،۱۱) پایدار کاربردی یکنواخت است.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله، قضایایی برای تحلیل پایداری دستگاه معادلات دیفرانسیل فازی ضربه‌ای تاخیری ارائه کردیم. برای این منظور از توابع شبه لیاپانوف برداری به همراه قضیه مقایسه سیستم دیفرانسیل فازی با سیستم دیفرانسیلی معمولی استفاده شد. در این راستا، پایداری را از دیدگاه‌های مختلف یعنی پایداری نهایی، پایداری قوی، پایداری مجانبی و پایداری یکنواخت بررسی کردیم. همچنین قضایایی برای پایداری کاربردی سیستم‌های دینامیکی فازی به اثبات رساندیم. در انتها با مثالی کاربردی، کارایی روش را نشان دادیم.

**مثال:** سیستم دیفرانسیل فازی تاخیری مربوط به یک پروسه شیمیایی با معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} D_H x_1(t) = -1.5x_1(t) + x_2(d(t)) + h_1(t) \\ D_H x_2(t) = -1.5x_2(t) + x_1(d(t)) + h_2(t) \end{cases}, t \geq t_0 \quad (3,11)$$

که شرایط اولیه آن به صورت زیر است

$$\begin{cases} x_1(t + t_0) = \varphi_1(t) \\ x_2(t + t_0) = \varphi_2(t) \end{cases}, t \in [-1, 0]$$

که در آن

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2) \in E^2, & t_0 &\geq 0, \\ d &\in C(\mathbb{R}, [-1, 0]); & t - 1 &\leq d(t) \leq t. \end{aligned}$$

توجه داریم که  $d(t) = t - |\sin t|$  مثالی از تاخیر متغیر با زمان کراندار است.

فرض کنید ثوابت  $L_1, L_2 > 0$  وجود دارند به قسمی که  $D_0(h_i(t_1), h_i(t_2)) \leq L_i |t_1 - t_2|, i = 1, 2$  همچنین تابع شبه لیاپانوف را بصورت  $V(t, x_1, x_2) = D_0(x_1, x_2)$  در نظر بگیرید. اگر برای هر  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in S(\rho), \rho > 0$  نامعادله زیر برقرار است:

$$D_0(\varphi_1(0), \varphi_2(0)) > D_0(\varphi_1(r), \varphi_2(r))$$

تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} f_1(t, \varphi) = -1.5\varphi(t) + \varphi_2(d(t)) + h_1(t) \\ f_2(t, \varphi) = -1.5\varphi_2(t) + \varphi_1(d(t)) + h_2(t) \end{cases}$$

به این خواص  $E^2$  که در مرجع [29] دیده می‌شود توجه کنید:

(الف) برای هر  $a, b \in \mathbb{R}$  با فرض  $a, b \geq 0$  و  $a, b \leq 0$  داریم  $(a + b)X = aX + bX$

(ب) برای هر  $\lambda \in \mathbb{R}$  و هر  $X, Y \in E^2$  داریم  $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$

(ج) برای هر  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  و هر  $X \in E^2$  داریم  $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$

## فهرست منابع

- [9] P. Wang, W. Sun: Practical stability in terms of two measures for set differential equations on time scales, *The Scientific World Journal* (2014), Article ID 241034, 7 pages.
- [10] D.D. Bainov, I.M. Stamova: On the practical stability of the solutions of impulsive systems of differential-difference equations with variable impulsive perturbations, *J. Math. Anal. Appl.* 200 (1996) 272-288.
- [11] Z.G. Luo, J.H. Shen: New Razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations, *Appl. Math. Comput.* 125 (2002) 375-386.
- [12] A.A. Soliman: Stability criteria of impulsive differential systems, *Appl. Math. Comput.* 134 (2003) 445-457.
- [13] J.T. Sun: Stability criteria of impulsive differential system, *Appl. Math. Comput.* 156 (2004) 85-91.
- [14] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Impulsive control of a nuclear spin generator, *J. Comput. Appl. Math.* 157 (1) (2003) 235-242.
- [15] J.T. Sun, Y.P. Zhang: Stability analysis of impulsive control systems, *IEE Proc. Control Theory Appl.* 150 (4) (2003) 331-334.
- [16] J.T. Sun, Y.P. Zhang, Q.D. Wu: Less conservative conditions for asymptotic stability of impulsive control systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 48 (5) (2003) 829-831.
- [17] T. Yang: *Impulsive Systems and Control: Theory and Applications*, Nova Science Publishers, Huntington NY, 2001.
- [1] J.P. Lasalle, S.Lefschetz: *Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, NY, USA, 1961.
- [2] N. Rouche, P. Habets, M. Laloy: *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Springer, New York, NY, USA, 1997.
- [3] V. Lakshmikantham, X.Z. Liu: *Stability Analysis in Terms of Two Measures*, World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] S.M.S. de Godoy, M.A. Bena: Stability criteria in terms of two measures for functional differential equations, *Applied Mathematics Letters* 18 (6) (2005) 701-706.
- [5] P. Wang, H. Lian: On the stability in terms of two measures for perturbed impulsive integro-differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 313 (2) (2006) 642-653.
- [6] P. Wang, Z. Zhan: Stability in terms of two measures of dynamic system on time scales, *Computers and Mathematics with Applications* 62 (12) (2011) 4717-4725.
- [7] C.H. Kou, S.N. Zhang: Practical stability for finite delay differential systems in terms of two measures, *Acta Math. Appl. Sinica* 25 (3) (2002) 476-483.
- [8] V. Lakshmikantham, V.M. Matrosov, S. Sivasundaram: *Vector Lyapunov Functions and Stability Analysis of Nonlinear Systems*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

- Dynamics and Systems Theory 1 (2) (2001) 111-119.
- [26] V. Lakshmikantham, R. Mohapatra: Basic properties of solutions of fuzzy differential equations, *Nonlinear Studied* 8 (2001) 113-124.
- [27] C. Yakar, M. Cicek, M.B. Gucen: Practical stability, boundedness criteria and Lagrange stability of fuzzy differential systems, *J. Computers and Mathematics with Applications* 64 (2012) 2118-2127.
- [28] S. Zhang, J. Sun: Stability of fuzzy differential equations with the second type of Hukuhara derivative, *IEEE Transaction on Fuzzy Systems* (2014).
- [29] B. Bede, S. G. Gal: Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets Sys.* 151 (3) (2005) 581-599.
- [30] S. Sun, Z. Han, E. Akin-Bohner, P. Zhao, Practical stability in terms of two measures for hybrid dynamic systems, *Bulletin of the Polish academy of sciences, Mathematics* (210) (2010).
- [31] Renhong Zhao, "Application of fuzzy set theory to chemical process optimization and control", Ph.D. Doctoral dissertations, University of Cincinnati, 1992.
- [18] S.G. Hristova, A. Georgieva: Practical stability in terms of two measures for impulsive differential equations with supremum, *Int. J. Diff. Eq.* 2011 (2011) Article ID 703189, 13 pages.
- [19] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive differential systems, *Advance in Differential equation and Control Processes* 10 (2012) 171-182.
- [20] S. Dilbaj, Srivastava S.K.: Strict stability criteria for impulsive functional differential equations, *Lecture Notes in Engineering and Computer Science* 2197 (2012) 169-171.
- [21] J.S. Yu: Stability for nonlinear delay differential equations of unstable type under impulsive perturbations, *Applied Mathematics Letters* 14 (2001) 849-857.
- [22] Y. Zhang, J.T. Sun: Boundedness of the solutions of impulsive differential systems with time-varying delay, *Appl. Math. Comput.* 154 (1) (2004) 279-288.
- [23] Y. Zhang, J. Sun: Eventual practical stability of impulsive differential equations with time delay in terms of two measurements, *J. Comput. and Appl. Math.* 176 (2005) 223-229.
- [24] V. Lakshmikantham, S. Leela: Stability theory of fuzzy differential equations via differential inequalities, *Mathematical Inequalities and Applications* 2 (1999) 551-559.
- [25] V. Lakshmikantham, S. Leela: Fuzzy differential systems and the new concept of stability, *Nonlinear*

