دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره پانزدهم، پاییز ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار با نقاط دوجمله‌ای

محمد مسجدجامعی[1*]، محمدرضا بیکی[2]

[۱ و ۲] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۵/۱۲/۲۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۰۷

چکیده

در این مقاله کلاس جدیدی از قوانین انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار به شکل

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\,w_k + R_{n+1}[f],$$

ارائه شده که در آن $w(x)$ یک تابع وزن مثبت، $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ نقاط درونیابی، $\{w_k\}_{k=0}^{n}$ ضرایب وزنی و نهایتاً $R_{n+1}[f]$ جمله‌ی خطا می‌باشد. شکل کلی نقاط درونیاب به صورت $x_k = p^{n-k}q^k$ در نظر گرفته شده که در آن $p,q \in \mathbb{R}$ و با استفاده از قضیه‌ی q–دوجمله‌ای فرم‌های صریحی برای وزن‌های $\{w_k\}_{k=0}^{n}$ به‌دست می‌آوریم. در ادامه به آنالیز خطای فرمول معرفی شده پرداخته و کاربرد آن را در قالب چند مثال عددی شرح می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: قوانین انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار، نقاط دو جمله‌ای، قضیه‌ی q–دوجمله‌ای، درونیابی نیوتن، چندجمله‌ای‌های گره.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mmjamei@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

فرمول انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار $n+1$ نقطه‌ای

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)w_k + R_{n+1}[f], \quad (۱،۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن $w(x)$ یک تابع وزن مثبت روی بازه‌ی $[a,b]$، $\{x_k\}_{k=0}^n$ و $\{w_k\}_{k=0}^n$ به ترتیب گره‌ها و ضرایب وزنی و $R_{n+1}[f]$ جمله‌ی خطا یا مانده‌ی رابطه‌ی (1.1) است. اگر x_kها هر دو نقطه‌ی a و b را شامل شوند فرمول فوق را بسته و چنانچه این نقاط را شامل نشوند آن را باز و اگر فقط یکی از این دو نقطه را شامل شوند آن را نیم باز (نیم بسته) می‌نامیم. فرض کنیم $\mathbb{P}_d$، فضای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه‌ی d باشد. گوییم فرمول انتگرال‌گیری (۱،۱) دارای درجه‌ی دقت d است اگر به ازای هر $p \in \mathbb{P}_d$ داشته باشیم: $R_{n+1}[p]=0$.

مرتبه‌ی همگرایی فرمول (۱،۱) به هموار بودن تابع f و همچنین به درجه‌ی دقت این فرمول بستگی دارد. همان طور که می‌دانیم برای $n+1$ نقطه‌ی دو به دو متمایز $\{x_k\}_{k=0}^n$ می‌توان همیشه یک فرمول انتگرال‌گیری عددی به کمک درونیابی در این نقاط و انتگرال‌گیری از چندجمله‌ای درونیاب به جای تابع f با درجه‌ی دقت $d=n$ به دست آورد. یعنی اگر

$$\psi_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k), \quad (۲،۱)$$

چندجمله‌ای گره نامیده شود، با انتگرال‌گیری از فرمول درونیابی لاگرانژ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) + r_{n+1}(f;x),$$

که در آن

$$l_k(x) = \frac{\psi_{n+1}(x)}{\psi'_{n+1}(x_k)(x-x_k)},$$

می‌توان رابطه‌ی (۱،۱) را با وزن‌های

$$w_k = \frac{1}{\psi'_{n+1}(x_k)} \int_a^b \frac{\psi_{n+1}(x)w(x)}{x-x_k}dx, \quad (۳،۱)$$

و مانده‌ی

$$R_{n+1}[f] = \int_a^b r_{n+1}(f;x)w(x)dx,$$

به‌دست آورد. توجه داشته باشیم که به ازای هر $f \in \mathbb{P}_n$ داریم $r_{n+1}(f;x)=0$ و لذا $R_{n+1}[f]=0$. فرمولی را که از این روش به‌دست می‌آید فرمول انتگرال‌گیری عددی از نوع درونیاب می‌نامند. شایان ذکر است که هر فرمول انتگرال‌گیری عددی از نوع درونیاب (۱،۱) با ضرایب نامنفی (۳،۱) به ازای تمام توابع پیوسته روی بازه‌ی $[a,b]$ همگرا است. ساده‌ترین فرمول انتگرال‌گیری عددی (۱،۱)، فرمول وزن‌دار نیوتن–کاتس نام دارد که به ازای $w(x)=1$ و گره‌های متساوی‌الفاصله‌ی

$$x_k = a + kh \quad (h = \frac{b-a}{n})$$

به‌دست می‌آید. در این راستا فرمول انتگرال‌گیری عددی از نوع درونیاب که دارای بیشترین درجه‌ی دقت است فرمول انتگرال‌گیری گاوس می‌باشد که ساختار آن ارتباط زیادی با چندجمله‌ای‌های متعامد دارد. برای جزئیات بیشتر [1] و [13] را ببینید. به علاوه یادآور می‌شویم که انواع دیگری از انتگرال‌گیری‌های عددی استاندارد و غیر استاندارد نیز به تازگی مورد توجه قرار گرفته‌اند ([3]-[12]).

در این مقاله کلاس جدیدی از فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی از نوع درونیاب را به کمک نقاط دوجمله‌ای ارائه می‌دهیم. ابتدا در بخش۲، پیشینه‌ای از فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار ارائه می‌شود. در بخش۳، نقاط دوجمله‌ای $\{p^{n-k}q^k\}_{k=0}^n$ را برای فرمول (۱،۱) در نظر گرفته و به کمک یک روش محاسباتی جدید، فرم صریح ضرایب $\{w_k\}_{k=0}^n$ را به همراه مانده‌ی $R_{n+1}[f]$ به دست می‌آوریم. در بخش۴، یک آنالیز خطا برای فرمول انتگرال‌گیری ارائه شده مطرح کرده و فرم صریح کران خطای متناظر با تابع وزن $w(x)=1$ را برای نوع بسته‌ی فرمول (۱،۱) محاسبه می‌کنیم.

نهایتاً در بخش آخر به ارائه‌ی چند مثال عددی می‌پردازیم.

۲- پیشینه تحقیق

انتگرال‌گیری عددی ارتباط تنگاتنگی با نظریه‌ی تقریب دارد و برای یادگیری و به کار بردن آن باید بر مباحث تقریب توابع و درونیابی آن‌ها مسلط بود. انتگرال معین یک تابع را می‌توان به دو روش تقریب زد: روش اول، تقریب تابع تحت انتگرال و انتگرال‌گیری دقیق از تابع تقریب است. روش دوم، در نظر گرفتن کل انتگرال به عنوان یک تابعک و سپس تقریب آن است. گاهی این دو روش با هم یکسان هستند اما در اغلب مواقع متفاوت از هم عمل می‌کنند و همچنین روش اول بیشتر مورد توجه است. اگر تابع تحت انتگرال خوش‌رفتار باشد آن‌گاه به کمک فرمول‌های انتگرال‌گیری معمولی نظیر قاعده‌ی ذوزنقه‌ای و سیمپسون می‌توان به دقت مطلوبی دست یافت. اما در صورتی که تابع در بازه‌ی انتگرال‌گیری دارای نقاط منفرد باشد با روش‌های فوق دقت خوبی حاصل نمی‌شود و باید با تقسیم بازه‌ی انتگرال‌گیری به زیر بازه‌هایی مناسب، نقاط منفرد را به مرزهای این زیر بازه‌ها انتقال داده و از فرمول‌های انتگرال‌گیری وزن‌دار استفاده کنیم. همچنین به کمک روش رامبرگ می‌توان تقریب‌های به دست آمده را بهبود بخشید و دقت بالاتری را به دست آورد.

در اوایل قرن هجدهم، نیوتن و کاتس فرمول ارائه شده در (۱،۱) را برای حالت $w(x)=1$ و گره‌های متساوی‌الفاصله‌ی $x_k \in [a,b]$ توسعه دادند که امروزه به فرمول‌های نیوتن-کاتس مشهورند. همان طور که در قسمت مقدمه اشاره شد فرمول‌های نیوتن-کاتس نیز به سه حالت باز، بسته و نیم باز (نیم بسته) تقسیم می‌شوند. همچنین ضرایب w_k به تابع f وابسته نیستند و می‌توان آن‌ها را به ازای n های مختلف محاسبه کرده و به کار برد. به علاوه می‌توان نشان داد که:

$$\forall k = 0,1,\ldots,n:\ w_k = w_{n-k}.$$

یکی از اشکالات روش نیوتن-کاتس این است که در صورت منفی بودن ضرایب w_k، پایداری و همگرایی روش مختل خواهد شد. لذا برای n های بزرگ، بهتر است که بازه‌ی انتگرال‌گیری را به زیر بازه‌های کوچک‌تری تقسیم کرده و در هر زیر بازه یک فرمول نیوتن-کاتس با n کوچک را اعمال کنیم که ضرایب آن مثبت باشند. به چنین فرمول‌هایی، فرمول‌های مرکب نیوتن-کاتس می‌گوییم. همان طور که قبلا اشاره شد این فرمول‌ها دارای درجه‌ی دقت $d = n$ هستند. اما برای به دست آوردن فرمول‌های با درجه‌ی دقت بالاتر، باید از روش گاوس استفاده کنیم که در آن روش گره‌های انتگرال‌گیری نیز مجهول فرض می‌شوند. این گره‌ها و ضرایب وزنی را طوری به دست می‌آورند که روش مورد نظر دارای دقت $d = 2n+1$ باشد. همچنین توجه کنیم که در روش گاوسی بازه‌ی انتگرال‌گیری به صورت $[a,b]=[-1,1]$ است و می‌توان نشان داد که اگر n زوج باشد آن‌گاه به ازای $\forall k = 0,1,\ldots,\frac{n}{2}-1$ داریم:

$$\begin{cases} x_{n-k} = -x_k, \\ x_{n/2} = 0, \\ w_{n-k} = w_k, \end{cases}$$

و اگر n فرد باشد آن‌گاه داریم:

$$\begin{cases} x_{n-k} = -x_k, \\ w_{n-k} = w_k, \end{cases}$$

به طوری که: $k = 0,1,\ldots,\frac{n-1}{2}$.

از خصوصیات بارز روش انتگرال‌گیری گاوس این است که تمامی ضرایب آن مثبت هستند و مهم‌تر این که داریم: $|w_k| \le 1$. این ویژگی و دقت بالای فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس استفاده از آن‌ها را اجتناب ناپذیر می‌کند. تنها اشکال این روش، اصم بودن گره‌های انتگرال‌گیری و ضرایب وزنی است که کمی محاسبات را مشکل می‌کند اما با یک برنامه‌ی کامپیوتری می‌توان گره‌ها و ضرایب را به ازای n های مختلف به دست آورد و آن‌ها را در مسائل مختلف به کار برد.

۳- قوانین انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار با گره‌های دوجمله‌ای

ابتدا برای رسیدن به هدفمان، به جای فرمول درونیابی لاگرانژ از فرمول درونیابی نیوتن ([1]) با گره‌های

$$0 < a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \le b,$$

به صورت

$$f(x) = b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + b_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) + r_{n+1}(f;x), \quad (۱،۳)$$

استفاده می‌کنیم به طوری که

$$b_0 = f[x_0],\ b_1 = f[x_0,x_1],\ \ldots,\ b_n = f[x_0,x_1,\ldots,x_n],$$

تفاضلات تقسیم شده‌ی نیوتن و

$$r_{n+1}(f;x) = f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]\psi_{n+1}(x),$$

خطای درونیابی است که در آن چندجمله‌ای گره‌ی $\psi_{n+1}(x)$ در (۲،۱) تعریف شده است. همچنین اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$ آن‌گاه خطای یادشده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_{n+1}(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\psi_{n+1}(x), \quad \xi(x) \in (a,b).$$

به طور دقیق‌تر، نقطه‌ی $\xi(x)$ بین کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار از مقادیر $x_0,x_1,\ldots,x_n,x$ قرار دارد.

اکنون با استفاده از فرمول درونیابی نیوتن می‌توان ضرایب وزنی $\{w_k\}_{k=0}^{n}$ را به کمک گره‌های دوجمله‌ای مستقیماً محاسبه کرد. برای این منظور، ابتدا گره‌های انتگرال‌گیری را به صورت $x_k = p^{n-k}q^k$ در نظر می‌گیریم به طوری که $p \ge \sqrt[n]{a},\ q \le \sqrt[n]{b}$.

واضح است که چنانچه $p = \sqrt[n]{a}$ و $q = \sqrt[n]{b}$، آن‌گاه نوع بسته‌ی فرمول (۱،۱) و اگر $p > \sqrt[n]{a}$ و $q < \sqrt[n]{b}$، نوع باز این فرمول به‌دست می‌آید. طبق قضیه‌ی $q-$ دوجمله‌ای کُشی ([2]) داریم:

$$(x;q) = \prod_{i=0}^{n-1}(1-xq^i) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k, \quad (۲،۳)$$

که در آن

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \qquad (q;q)_m = \prod_{i=1}^{m}(1-q^i).$$

اگر قرار دهیم $x = \dfrac{t}{p^n}$ و $q \to \dfrac{p}{q}$، آن‌گاه رابطه‌ی (۲،۳) به صورت

$$\left(\frac{t}{p^n};\frac{p}{q}\right) = \prod_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{p^n}\left(\frac{p}{q}\right)^i\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{p}{q}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\binom{k}{2}} \left(\frac{t}{p^n}\right)^k,$$

تغییر می‌کند و بنابراین داریم:

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x - p^{n-i}q^i) = \left(-p^n\right)^n \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{-n(n-1)}{2}} \times \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{p}{q}} p^{\frac{k(k-1)}{2}} q^{\frac{-k(k-1)}{2}} p^{-nk} t^k. \quad (۳،۳)$$

از طرف دیگر، چون

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{p}{q}} = p^{k(n-k)} q^{-k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{q}{p}},$$

چندجمله‌ای (۳،۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$G_n(x) = G_n(x;p,q) = \prod_{i=0}^{n-1}(x - p^{n-i}q^i) = \sum_{k=0}^{n}\left(-p^n\right)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{n-k}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} x^k, \quad (۴،۳)$$

بطوری که $n = 1,2,\cdots$ و $G_0(x) = 1$.

اکنون با توجه به رابطه‌ی (۴،۳) داریم:

$$A_m(p,q)=\int_a^b G_m(x;p,q)w(x)dx$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\left(-p^n\right)^{m-k}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{m-k}{2}} q^{\binom{m-k}{2}}\int_a^b x^k w(x)dx, \quad (۵،۳)$$

که در آن $\int_a^b x^k w(x)\mathrm{d}x=\mu_k$ گشتاور مرتبه‌ی kاُم نسبت به تابع وزن $w(x)$ است. لذا رابطه‌ی (۵،۳) به صورت زیر تبدیل خواهد شد

$$A_m(p,q)=\sum_{k=0}^{m}\left(-p^n\right)^{m-k}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{m-k}{2}} q^{\binom{m-k}{2}}\mu_k.$$

حال در فرمول درونیابی (۱،۳)، گره‌های دوجمله‌ای $x_k=p^{n-k}q^k$ را قرار می‌دهیم. بنابراین:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} f[x_0,x_1,\ldots,x_k]G_k(x)$$
$$+f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]G_{n+1}(x). \quad (۶،۳)$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی (۶،۳) در $w(x)$ و سپس انتگرال‌گیری روی بازه‌ی $[a,b]$ می‌توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^{n}A_k(p,q)f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$$
$$+\int_a^b f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]G_{n+1}(x)w(x)dx. \quad (۷،۳)$$

از سوی دیگر، چون

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{G'_{n+1}(x_k)},$$

که در آن $G'_{n+1}(x_k)$ مقدار مشتق چندجمله‌ای G_{n+1} به ازای $x=x_k$ است، عبارت مجموع سمت راست رابطه‌ی (۷،۳) را می‌توان به صورت زیر ساده‌تر نمود

$$\sum_{k=0}^{n}A_k(p,q)f[x_0,x_1,\ldots,x_k]$$
$$=\sum_{k=0}^{n}A_k(p,q)\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{G'_{k+1}(x_j)}\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}f(x_k)\left(\sum_{j=k}^{n}\frac{A_j(p,q)}{G'_{j+1}(x_k)}\right).$$

بنابراین، ضرایب وزنی در فرمول انتگرال‌گیری عددی

$$\int_a^b f(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^{n}w_k(p,q)f(x_k) \quad (۸،۳)$$
$$+R_{n+1}[f],$$

که در آن

$$R_{n+1}[f]=\int_a^b f[x_0,x_1,\ldots,x_n,x]G_{n+1}(x)w(x)dx,$$

به صورت $w_k(p,q)=\sum_{j=k}^{n}\frac{A_j(p,q)}{G'_{j+1}(x_k)}$ محاسبه می‌شوند بطوری که

$$A_m(p,q)=\sum_{k=0}^{m}\left(-p^n\right)^{m-k}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{m-k}{2}} q^{\binom{m-k}{2}}\mu_k, \quad (۹،۳)$$

و

$$G_m(x)=G_m(x;p,q)$$
$$=\sum_{k=0}^{m}\left(-p^n\right)^{m-k}\begin{bmatrix} m\\ k\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{m-k}{2}} q^{\binom{m-k}{2}}x^k. \quad (۱۰،۳)$$

به عبارت دیگر قضیه‌ی زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۳-۱: ضرایب وزنی فرمول انتگرال‌گیری عددی (۸،۳) با گره‌های دوجمله‌ای $x_k=p^{n-k}q^k$ که در آن $p\geq\sqrt[n]{a}$ و $q\leq\sqrt[n]{b}$، عبارتند از

$$w_k(p,q)=\sum_{j=k}^{n}\frac{A_j(p,q)}{G'_{j+1}(x_k)}, \quad (۱۱،۳)$$

بطوری که $A_m(p,q)$ و $G_m(x;p,q)$ به ترتیب از روابط (۹،۳) و (۱۰،۳) به‌دست می‌آیند.

به‌علاوه اگر $f \in C^{n+1}[a,b]$، آن‌گاه مانده‌ی $R_{n+1}[f]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R_{n+1}[f]=\frac{1}{(n+1)!}\int_a^b f^{(n+1)}\left(\xi(x)\right)G_{n+1}(x;p,q)w(x)dx,$$

به شرطی که $\xi(x)\in(a,b)$. همچنین اگر $\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_{n+1},\ x\in(a,b)$ آن‌گاه داریم:

$$\left|R_{n+1}[f]\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\int_a^b\left|G_{n+1}(x;p,q)\right|w(x)dx.$$

نکته۳-۱: با جایگذاری $f(x)=x^j$، ضرایب وزنی $\{w_k(p,q)\}_{k=0}^n$ در رابطه‌ی (۱۱،۳) را می‌توان به کمک دستگاه خطی زیر نیز بدست آورد

$$\int_a^b f(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^n w_k(p,q)f(x_k). \quad (۱۲،۳)$$

به عبارت دیگر داریم

$$\sum_{k=0}^n w_k(p,q)x_k^j=\sum_{k=0}^n w_k x_k^j$$
$$=\int_a^b x^j w(x)dx=\mu_j$$
$$(j=0,1,\ldots,n),$$

که شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

دستگاه فوق همواره دارای جواب یکتا است زیرا ماتریس ضرایب آن (ماتریس واندرموند) به ازای گره‌های دو به دو متمایز $x_k=p^{n-k}q^k$ ماتریسی نامنفرد است. اما توجه کنیم که این ماتریس بد وضع می‌باشد، یعنی با افزایش n، عدد حالت آن نیز افزایش یافته و در نتیجه برای nهای بزرگ، حل دستگاه فوق ناکارامد است.

۴- آنالیز خطا

به ازای رده‌ی توابع $f\in C^{n+1}[a,b]$، می‌توان کران خطایی برای فرمول انتگرال‌گیری عددی(۸،۳) به‌دست آورد. ابتدا بنا به قضیه‌ی ۳-۱ داریم:

$$\left|R_{n+1}[f]\right|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right| \quad (۱،۴)$$
$$\times\int_a^b\left|G_{n+1}(x;p,q)\right|w(x)dx.$$

از آنجایی که $G_{n+1}(x)$ قابل تجزیه است، انتگرل سمت راست رابطه‌ی (۱،۴) یعنی

$$F_n(p,q;w)=\int_a^b\left|G_{n+1}(x;p,q)\right|w(x)dx,$$

هم برای حالت بسته و هم برای حالت باز به طور مستقیم قابل محاسبه است. ابتدا فرض کنیم $p=\sqrt[n]{a}$ و $q=\sqrt[n]{b}$. دو حالت فرد و زوج را برای n به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

چنانچه $n=2m+1$ عددی فرد باشد، آن‌گاه داریم

$$F_{2m+1}(p,q;w)=\int_a^b\left|(x-p^{2m+1})(x-p^{2m}q)\ldots(x-q^{2m+1})\right|w(x)dx$$

$$=-\int_a^{p^{2m}q}G_{2m+2}(x)w(x)dx+\int_{p^{2m}q}^{p^{2m-1}q^2}G_{2m+2}(x)w(x)dx-\cdots$$

$$-\int_{pq^{2m}}^{b}G_{2m+2}(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^{k+1}\int_{p^{2m+1-k}q^k}^{p^{2m-k}q^{k+1}}G_{2m+2}(x)w(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^{k+2m+1}\int_{p^{2m+1-k}q^k}^{p^{2m-k}q^{k+1}}\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{2m+2}\left(-p^n\right)^{2m+2-j}\begin{bmatrix}2m+2\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}}\\ p^{-\binom{2m+2-j}{2}}q^{\binom{2m+2-j}{2}}x^j\end{pmatrix}w(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{2m}(-1)^{k+2m+1}\left(\sum_{k=0}^{2m+2}\left(-p^{n}\right)^{2m+2-j}\begin{bmatrix}2m+2\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{2m+2-j}{2}}q^{\binom{2m+2-j}{2}}\int_{p^{2m+1-k}q^{k}}^{p^{2m-k}q^{k+1}} x^{j}w(x)dx\right).$$

و چنانچه $n=2m$، بطور مشابه بدست می‌آوریم

$$F_{2m}(p,q;w)=\int_a^b\left|\left(x-p^{2m}\right)\left(x-p^{2m-1}q\right)\ldots\left(x-q^{2m}\right)\right|w(x)dx$$

$$=\int_a^{p^{2m-1}q} G_{2m+1}(x)w(x)dx-\int_{p^{2m-1}q}^{p^{2m-2}q^{2}} G_{2m+1}(x)w(x)dx+\cdots$$

$$-\int_{pq^{2m-1}}^{b} G_{2m+1}(x)w(x)dx=\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k}\int_{p^{2m-k}q^{k}}^{p^{2m-1-k}q^{k+1}} G_{2m+1}(x)w(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+2m}\int_{p^{2m-k}q^{k}}^{p^{2m-1-k}q^{k+1}}\left(\sum_{k=0}^{2m+1}\left(-p^{n}\right)^{2m+1-j}\begin{bmatrix}2m+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{2m+1-j}{2}}q^{\binom{2m+1-j}{2}}x^{j}\right)w(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{2m-1}(-1)^{k+2m}\left(\sum_{j=0}^{2m+1}\left(-p^{n}\right)^{2m+1-j}\begin{bmatrix}2m+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{2m+1-j}{2}}q^{\binom{2m+1-j}{2}}\int_{p^{2m-k}q^{k}}^{p^{2m-1-k}q^{k+1}} x^{j}w(x)dx\right).$$

بنابراین با ترکیب دو رابطه‌ی اخیر خواهیم داشت

$$F_n(p,q;w)=\int_a^b\left|G_{n+1}(x;p,q)\right|w(x)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\left(-p^{n}\right)^{n+1-j}\begin{bmatrix}n+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{n+1-j}{2}}q^{\binom{n+1-j}{2}}\int_{p^{n-k}q^{k}}^{p^{n-1-k}q^{k+1}} x^{j}w(x)dx\right)$$

$$=(-1)^{n}\sum_{j=0}^{n+1}\left(-p^{n}\right)^{n+1-j}\begin{bmatrix}n+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{n+1-j}{2}}q^{\binom{n+1-j}{2}}\times$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\int_{p^{n-k}q^{k}}^{p^{n-1-k}q^{k+1}} x^{j}w(x)dx\right).$$

بطور مشابه رابطه‌ی زیر برای حالت $p>\sqrt[n]{a}$ و $q<\sqrt[n]{b}$ برقرار است:

$$F_n(p,q;w)=(-1)^{n}\sum_{j=0}^{n+1}\left(-p^{n}\right)^{n+1-j}\begin{bmatrix}n+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}} p^{-\binom{n+1-j}{2}}q^{\binom{n+1-j}{2}}$$

$$\times\sum_{k=-1}^{n}(-1)^{k}\int_{y_k}^{y_{k+1}} x^{j}w(x)dx,$$

که در آن

$$y_{-1}=a,\ y_{n+1}=b,\ y_k=x_k$$
$$(k=0,1,\ldots,n)$$

همچنین در حالت خاص $w(x)=1$، عبارت $F_n(p,q;w)$ برای فرمول بسته به صورت

$$F_n(p,q;1)=(p^{n})^{n+2}\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{j+1}\begin{bmatrix}n+1\\ j\end{bmatrix}_{\frac{q}{p}}\times$$

$$p^{-\binom{n+1-j}{2}}q^{\binom{n+1-j}{2}}\frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n(j+1)}+1}{j+1}\,\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{j+1}-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{j+1}+1},$$

محاسبه می‌گردد. بنابراین داریم:

$$\left|R_{n+1}[f]\right|=\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n} w_k(p,q)f\left(q^{k}p^{n-k}\right)\right|$$

$$\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}F_n(p,q;1),$$

به طوری که:

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right|\le M_{n+1},\ \ x\in[a,b].$$

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، فرمول انتگرال‌گیری ارائه شده را در قالب چند مثال عددی بکار می‌بریم.

مثال ۵-۱: به عنوان اولین مثال می‌خواهیم با استفاده از فرمول انتگرال‌گیری عددی بدون وزن (۸،۳)، حاصل $\int_a^b f(x)\,dx$ را به ازای چند تابع استاندارد محاسبه کنیم. برای این منظور گره‌های انتگرال‌گیری را به صورت $x_k = p^{n-k}q^k \quad (k = 0,1,\cdots,n)$ در نظر می‌گیریم بطوری که $p = \sqrt[n]{a}$ و $q = \sqrt[n]{b}$ و همچنین $n = 5,10,15$. خطای مطلق تقریب انتگرال‌گیری در جدول ۱ نمایش داده شده است.

مثال ۵-۲: در این مثال قصد داریم با به کارگیری فرمول انتگرال‌گیری عددی (۸،۳)، انتگرال

$$\int_1^3 e^{-x}\log(x)\,dx = 0.1516388681756285\ldots,$$

را محاسبه نماییم. از آنجایی که هر دو تابع e^{-x} و $\log x$ روی بازه‌ی (۱،۳) مثبت هستند، سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: $f(x) = e^{-x}\log(x),\ \ w(x) = 1$

حالت دوم: $f(x) = \log(x),\ \ w(x) = e^{-x}$

حالت سوم: $f(x) = e^{-x},\ \ w(x) = \log(x)$

خطای مطلق حاصل از فرمول انتگرال‌گیری عددی در جدول ۲ نشان داده شده‌است.

$$u(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = x + \frac{x^3}{6}$ است. جدول ۲ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

جدول ۱: خطای مطلق انتگرال‌گیری عددی (بدون وزن) با نقاط دوجمله‌ای به ازای n=5,10,15 برای مثال ۵-۱

(a,b)	$f(x)$	$n=5$	$n=10$	$n=15$
(1,2)	$\sqrt{x}$	8.62×10^{-7}	2.21×10^{-10}	1.16×10^{-10}
(1,2)	e^{x^2}	3.14×10^{-2}	1.30×10^{-5}	2.05×10^{-9}
(1,3)	$\sqrt[3]{x}$	5.04×10^{-5}	2.78×10^{-7}	4.82×10^{-9}
$(\frac{\pi}{4},\pi)$	$\sin(x)$	4.20×10^{-4}	1.38×10^{-9}	1.50×10^{-9}
(1,2)	$\log(x)$	5.84×10^{-6}	2.09×10^{-9}	3.48×10^{-10}
(1,3)	$\frac{1}{x}$	1.02×10^{-3}	1.32×10^{-5}	2.96×10^{-7}
(1,3)	e^x	7.90×10^{-4}	2.84×10^{-9}	2.84×10^{-9}

جدول ۲: خطای مطلق انتگرال‌گیری عددی به ازای n=5,10,15 در حالات مختلف برای مثال ۵-۲

(a,b)	$f(x)$	$w(x)$	$n=5$	$n=10$	$n=15$
(1,3)	$e^{-x}log(x)$	1	4.68×10^{-4}	2.50×10^{-6}	3.55×10^{-8}
(1,3)	$log(x)$	e^{-x}	2.12×10^{-5}	1.10×10^{-7}	1.43×10^{-9}
(1,3)	e^{-x}	$log(x)$	1.49×10^{-5}	6.42×10^{-11}	3.20×10^{-10}

نتیجه گیری

در این مقاله، یک روش انتگرال‌گیری عددی وزن‌دار معرفی شده که گره‌های آن نقاط بسط دوجمله‌ای است. سپس با استفاده از این نقاط، در قالب دو مثال عددی دقت دقیقی به ازای تعداد نقاط نسبتاً کم به دست آورده‌ایم. همچنین فرم صریح ضرایب وزنی این روش را محاسبه کرده و یک کران بالا برای مانده‌ی این قانون انتگرال‌گیری بدست آورده ایم. با توجه به ماهیت نقاط دوجمله‌ای (نوع ساختاری که دارند) انجام محاسبات روی آن‌ها آسان است و لذا برای کارهای آتی قصد داریم در دیگر روش‌های انتگرال‌گیری عددی از این نقاط استفاده کنیم و آنالیز خطای آن را نیز مورد بررسی قرار دهیم تا در صورت به دست آمدن کران خطای مناسب، نتایج را به عنوان یک کار علمی ارائه کنیم. لازم به ذکر است که در این مقاله کلیه‌ی محاسبات با استفاده از نرم افزار Mathematica انجام شده است.

فهرست منابع

[1] W. Gautschi, Numerical Analysis: An Introduction, Birkhauser, Boston, 1997.

[2] R. Koekoek, R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, Report no. 98–17, Technical Universiteit Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, Delft, 1998. Web site: http://aw.twi.tudelft.nl /koekoek/aske

[3] M. Masjed-Jamei, A linear constructive approximation for integrable functions and a parametric quadrature model based on a generalization of Ostrowski-Grüss type inequalities. Electron. Trans. Numer. Anal. 38 (2011), 218–232.

[4] M. Masjed-Jamei, A new type of weighted quadrature rules and its relation with orthogonal polynomials. Appl. Math. Comput. 188 (2007), no. 1, 154–165.

[5] M. Masjed-Jamei, New error bounds for Gauss-Legendre quadrature rules. Filomat 28 (2014), no. 6, 1281–1293.

[6] M. Masjed-Jamei, On constructing new interpolation formulas using linear operators and an operator type of quadrature rules.J. Comput. Appl. Math. 216 (2008), no. 2, 307–318.

[7] M. Masjed-Jamei, Unified error bounds for all Newton-Cotes quadrature rules. J. Numer. Math. 23 (2015), no. 1, 67–80.

[8] M. Masjed-Jamei, I. Area, Error bounds for Gaussian quadrature rules using linear kernels. Int. J. Comput. Math. 93 (2016), no. 9, 1505–1523.

[9] M. Masjed-Jamei, M. Dehghan, A probabilistic model for quadrature rules. Appl. Math. Comput. 187 (2007), no. 2, 1520–1526.

[10] M. Masjed-Jamei, G. V. Milovanović, Weighted Hermite quadrature rules, Electron. Trans. Numer. Anal. 45 (2016), 476 – 498.

[11] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, Gaussian quadrature rules using function derivatives. IMA J. Numer. Anal. 31 (2011), no. 1, 358–377.

[12] G. V. Milovanović, A. S. Cvetković, Nonstandard Gaussian quadrature formulae based on operator values. Adv. Comput. Math. 32 (2010), no. 4, 431–486.

[13] G. Mastroianni, G.V. Milovanović, Interpolation Processs: Basic Theory and Applications, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg, 2008.