

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM  
JOURNAL OF  
NUMERICAL  
RESEARCH IN  
MATHEMATICS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## آزمونی جدید برای وجود دسته‌ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته

محمد‌هادی اقتصادی فرد<sup>۱</sup>، محمد‌هادی هوشمند<sup>۲\*</sup>

<sup>(۱)</sup> دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

<sup>(۲)</sup> دانشیار، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۲۷

### چکیده

یکی از مهمترین ثابت‌های ریاضی، ثابت اویلر-ماسکورونی<sup>۱</sup> است که حد دنباله  $(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) - \log n$  بوده و با نماد  $\gamma$  نمایش داده می‌شود ( $\gamma = 0.577215664\dots$ ). به منظور تعمیم این ثابت، ثابت‌های توسعه یافته دیگری معرفی شده که به ثابت‌های نوع اویلر<sup>۲</sup> معروف هستند. در این مقاله با ایده گرفتن از مشتق دنباله تابعی جمع‌بند حدی توابع (معرفی شده بوسیله نویسنده دوم)، دسته‌ای از ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته را معرفی و آزمونی برای همگرایی آنها و وجود چنین ثابت‌هایی را به اثبات می‌رسانیم. سپس نشان می‌دهیم که آزمون وجودی ارائه شده توسط ساندور<sup>۳</sup> نتیجه‌ای از آن بوده و ثابت‌های نوع اویلر تعمیم یافته ذکر شده طیف وسیع‌تری از آنها را شامل می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** ثابت اویلر-ماسکورونی، ثابت‌های نوع اویلر، تابع گاما، جمع‌پذیری حدی توابع حقیقی.

Email: [hadi.hooshmand@gmail.com](mailto:hadi.hooshmand@gmail.com)

\*. عهده‌دار مکاتبات:

1. Euler-Mascheroni Constant
2. Euler type Constants
3. Jozef Sandor

### ۱- تاریخچه و مقدمه

ثابت اویلر که با  $\gamma$  نشان داده می‌شود، یکی از ثابت‌های معروف پرکاربرد ریاضی است که در قرن هجدهم توسط اویلر و ماسکورونی معرفی شد (برای مثال مرجع [۱, ۲] را ببینید). سپس به منظور تعمیم آن، ثابت‌های نوع اویلر معرفی شد که یکی از مقالات مهم در آن زمینه مرجع [۷] است که در سال ۲۰۰۷ توسط ساندور ارئه گردید. همچنین در مرجع [۶] ثابت‌های نوع اویلر و تحقیقات انجام شده در مورد آنها، بطور کامل مورد مطالعه قرار گرفته است. از طرف دیگر در سال ۱۹۹۷ وبستر توابع نوع گاما را که در معادله تابعی

$$f(x+1) = g(x)f(x) \quad ; \quad x > 0$$

صدق می‌کردند، مورد مطالعه قرار داد و قضیه بوهر-مالرپ را تعمیم داد (مرجع [۲, ۸] را ببینید). اما در مرجع [۳] هوشمند مفهوم جدید جمع‌پذیر حدی توابع و توابع جمع‌بند آن‌ها را برای هر تابع تعریف شده بر زیرمجموعه اعداد حقیقی یا مختلط (فقط با شرط آن که دامنه آن شامل اعداد طبیعی باشد) مطرح نموده و نشان داد که توابع نوع گاما را می‌توان به عنوان زیر مبحثی از آن در نظر گرفت. در این راستا برخی از قضایای مربوطه از جمله قضیه بوهر-مالرپ به نحو مطلوبی تعمیم داده شده و شرایط یکتایی تابع جمع‌بند حدی و وجود جواب یکتا برای معادلات تابعی

$$\lambda(x) = f(x) + \lambda(x-1), \varphi(x) = f(x)\varphi(x-1)$$

مورد مطالعه قرار گرفت. اخیراً در مرجع [۵] جمع‌پذیر تحلیلی توابع نیز توسط نویسندگان دوم معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

### جمع‌پذیری حدی توابع حقیقی و مختلط

فرض کنید  $f$  تابعی از  $D_f$  به  $\mathbb{R}$  یا  $\mathbb{C}$  باشد بطوریکه  $\mathbb{N}^* \subseteq D_f$  ( $\mathbb{N}^*$  نشان‌دهنده مجموعه اعداد طبیعی است و  $\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ ). مجموعه جمع‌بند  $D_f$  با  $\Sigma_f = \{x : x + \mathbb{N}^* \subseteq D_f\}$

تعریف می‌شود. از اینرو  $x \in \Sigma_f$  اگر و فقط اگر  $\{x+1, x+2, \dots, x+n, \dots\} \subseteq D_f$  اگر  $\mathbb{N}^* \subseteq D_f$  آن‌گاه دنباله‌های تابعی زیر در مرجع [۳] به آن نظیر شده است:

$$R_n(f, x) = R_n(x) = f(n) - f(x+n),$$

$$f_{\sigma_n}(x) = xf(n) + \sum_{k=1}^n R_k(x)$$

برای تمام  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $x \in \Sigma_f$ . تابع  $f$  در  $\Sigma_f$  (بطور مشابه روی  $S \subseteq \Sigma_f$ ) جمع‌پذیر است اگر دنباله تابعی  $f_{\sigma_n}(x)$  در  $x_0$  (بطور مشابه در هر نقطه  $S$ ) همگرا باشد. تابع  $f$  جمع‌پذیر یکنواخت روی  $S$  نامیده می‌شود اگر  $f_{\sigma_n}(x)$  روی  $S$  همگرای یکنواخت باشد.

تابع حدی  $f_{\sigma_n}(x)$  (بطور مشابه  $R_n(f, x)$ ) با  $f_{\sigma}(x)$  (بطور مشابه با  $R(f, x)$ ) نشان داده می‌شود و به  $f_{\sigma}$  تابع جمع‌بند حدی  $f$  (یا به اختصار تابع جمع بند  $f$ ) می‌گوئیم. توجه کنید که دامنه  $f_{\sigma}$  بصورت  $D_{f_{\sigma}} = \{x \in \Sigma_f : f \text{ در } x \text{ جمع‌پذیر است}\}$

است. دانستن موارد زیر مهم است که  $\Sigma_f \cap D_f = \Sigma_f + 1 = \{x+1 : x \in \Sigma_f\}, f_{\sigma}(0) = 0$

(بنابراین  $0 \in D_{f_{\sigma}}$ ).

اگر  $0 \in D_{f_{\sigma}}$  داریم  $f_{\sigma}(-1) = -f(0)$  همچنین  $1 \in D_{f_{\sigma}}$  اگر و فقط اگر  $R_n(1)$  همگرا بوده و این نیز معادل آن است که  $D_f \cap D_{f_{\sigma}} = D_{f_{\sigma}} + 1$ . شرط لازم برای جمع‌پذیری  $f$  در  $x$  آن است که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (R_n(x) - xR_{n-1}(1)) = 0$$

همچنین اگر  $R(1) = 0$ ، آن‌گاه

$$(1.1) \quad f_{\sigma}(x) = f(x) + f_{\sigma}(x-1); \quad x \in D_{f_{\sigma}} + 1$$

$$(1.2) \quad f_{\sigma}(m) = \sum_{j=1}^m f(j); \quad m \in \mathbb{N}^*$$

**نتیجه ب ([۴]).** فرض کنید  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی حقیقی باشد بطوریکه دنباله  $f_n$  کراندار است. اگر  $f$  از جایی به بعد روی  $[1, +\infty)$  یکنوا آن‌گاه  $f$  جمع‌پذیری حدی است و روی هر زیرمجموعه کراندار  $[0, +\infty)$  جمع‌پذیر حدی بکنواخت است.

**۲- مشتق توابع جمع‌بند حدی و معرفی ثابت‌های نوع اولر تعمیم یافته**

مشتق توابع جمع‌بند (یعنی  $f_\sigma$ ) توسط هوشمند مطالعه شد که دنباله تابعی آن به دسته ای از ثابت‌های نوع اولر تعمیم یافته منتهی می‌شود.

اگر  $f$  روی  $\sum_f$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه قرار می‌دهیم

$$f_{\sigma'_n}(x) := (f_{\sigma_n}(x))' = f(n) - \sum_{k=1}^n f'(x+k)$$

و حد آن تابع در صورت وجود با  $f_{\sigma'}(x)$  نمایش داده می‌شود. چون  $(\ )$  با انتخاب  $f = \log$  داریم  $\log_{\sigma'}(0) = -\gamma$  اولر وابسته به  $f$  از نماد  $-\gamma_n(f, x)$  و  $-\gamma_n(f)$  نیز به جای  $f_{\sigma'_n}(x)$  و  $f_{\sigma'_n}(0)$  استفاده می‌کنیم و در واقع داریم

$$\gamma_n(f, x) = -f_{\sigma'_n}(x), \quad \gamma_n(f) = -f_{\sigma'_n}(0)$$

**مثال ۲-۱:** تابع حقیقی  $f(x) = \exp_a(x) = a^x$  با شرط  $0 < a < 1$  در نظر می‌گیریم. دنباله تابعی  $f_{\sigma'_n}(x)$  همگراست و داریم

$$\gamma(\exp_a, x) = -\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n - a^x \ln a \sum_{k=1}^n a^k)$$

$$= a^x \frac{a}{1-a} \ln a$$

و  $\gamma(f, x)$  در معادله تابعی زیر صدق می‌کند  $\gamma(\exp_a, x-1) - \gamma(\exp_a, x) = \exp'_a(x)$  ;  $x \geq 0$

در مرجع [۳] ثابت شده که گزاره های زیر معادل اند و هر تابعی که در یکی از آن شرایط صدق کند جمع‌پذیر حدی نامیده می‌شود:

الف)  $R(1) = 0, D_f \subseteq D_{f_\sigma}$

ب)  $R(1) = 0, D_f \subseteq D_{f-1}, D_{f_\sigma} = \sum_f$

پ) برای هر  $x \in D_f, f_\sigma(x) = f(x) + f_\sigma(x-1)$

لذا اگر  $f$  جمع‌پذیر حدی باشد آن‌گاه  $\lambda = f_\sigma$  در معادله تابعی تفاضلی

$$\lambda(x) = f(x) + \lambda(x-1); x \in D_f$$

صدق می‌کند بنابراین  $f_\sigma$  همچنین جواب معادله

$$g(x+1) - g(x) = F(x); x \in D_{f-1}$$

است که در آن  $F(x) = f(x+1)$ .

با بکارگیری قضیه ۳۰۳ از مرجع [۴] نتیجه می‌گیریم  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  جمع‌پذیر است اگر و فقط اگر

$$R(f, 1) = 0 \text{ و } (0, 1) \text{ جمع‌پذیر بوده و } R(f, 1) = 0.$$

یکی از مهمترین محک‌ها برای جمع‌پذیری حدی در مرجع [۴] معرفی شده است که نشان می‌دهد توابع محدب یا مقعری که  $R_n(f, 1)$  کراندار باشد جمع‌پذیری حدی هستند. قضیه زیر بیان دیگری از آن برای توابع  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  می‌باشد.

**قضیه الف ([۴]).** فرض کنید  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  یک

تابع حقیقی باشد بطوریکه  $R_n(1)$  کراندار باشد آن‌گاه الف) اگر  $f$  از جایی به بعد روی  $D_f = [1, +\infty)$  محدب یا مقعر باشد آن‌گاه  $f$  روی هر زیرمجموعه کراندار  $\sum_f = [0, +\infty)$  جمع‌پذیر بکنواخت است.

ب) اگر  $f$  روی  $[1, +\infty)$  محدب باشد، آن‌گاه

$$f_\sigma(x) \geq (x+1)f(1) - f(x+1); x \geq 0$$

یکی دیگر از محک‌های مهم از مرجع [۴]، قضیه ۳۰۱ است که نتیجه بعدی را برای جمع‌پذیری حدی توابع یکنوا می‌دهد.

$$(۱.۳) \quad \gamma(f, x) = \gamma(f, x-1) - f'(x) \quad ; \quad x \geq 1$$

$$(۱.۴) \quad f_{\sigma'}(x) = f_{\sigma'}(x-1) + f'(x) \quad ; \quad x \geq 1$$

**اثبات.** با اعمال قضیه مقدار میانگین (M.V.T) برای  $f$  روی بازه  $[n, n+1]$  ( $n$  عدد طبیعی دلخواه) وجود دارد  $n < c_n < n+1$  بطوریکه  
 $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$

از طرفی یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$(۱.۵) \quad -\gamma_{n+1}(f, x) + \gamma_n(f, x) \\ = f(n+1) - f(n) - f'(n+1+x) \\ = f'(c_n) - f'(n+1+x) \geq 0 \quad ; \quad x \geq 0$$

(زیرا  $c_n < n+1 < n+1+x$  و  $f'$  نزولی است). بنابراین دنباله  $f_{\sigma_n}(x) = -\gamma_n(f, x)$  برای  $x \geq 0$  صعودی است. حال عدد حقیقی ثابت  $x \geq 0$  را در نظر می‌گیریم از طرف دیگر برای هر عدد صحیح  $2 \leq k \leq n$  داریم

$$f'(x+k) \leq \int_{k-1}^k f'(t+x) dt \leq f'(x+k-1)$$

بنابراین

$$f'(x+k) \leq f(x+k) - f(x+k-1) \\ \leq f'(x+k-1) \quad ; \quad k = 2, 3, \dots, n$$

از ترکیب نامساوی‌های بالا نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{k=2}^n f'(x+k) \leq f(x+n) - f(x+1) \\ \leq \sum_{k=2}^n f'(x+k-1)$$

و این ایجاب می‌کند

$$(۱.۶) \quad f(n) - f(x+n) - f'(x+1) \\ + f(x+1) \leq -\gamma_n(f, x) \\ \leq f(n) - f(x+n+1) + \\ f'(x+1) f'(x+2) \quad ; \quad x \geq 0$$

در واقع داریم

$$\gamma(\exp_a, x-1) - \gamma(\exp_a, x) \\ = a^{x-1} \frac{a}{1-a} \ln a + a^x \frac{a}{1-a} \ln a \\ = a^x \frac{a}{1-a} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \ln a = a^x \ln a \\ = \exp'_a(x)$$

همچنین اگر تابع حقیقی  $f(x) = -\log x$  را در نظر بگیریم، دنباله تابعی  $f_{\sigma'_n}(x)$  نیز همگراست و در نتیجه داریم

$$\gamma(-\log, x) = -\log_{\sigma'}(x) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} \right) \\ = -\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k+x)} \\ = \psi(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \\ = \frac{1}{x} + \psi(x)$$

برای تمام  $x > 0$ . در این جا  $\psi$  نشان دهنده تابع دیگاما است و از قضیه الف نتیجه می‌گیریم

$$\log_{\sigma'}(x) = \log \Gamma(x+1)$$

و

$$\log_{\sigma'}(x) = -\gamma(\log, x) = \psi(x+1) \quad , \quad \gamma = \gamma(\log, 0)$$

حال آزمونی برای همگرایی مشتق دنباله تابعی جمع‌بند حدی و ثابت‌های تعمیم یافته نوع اوپلر حاصل از آن ارائه می‌کنیم که نه تنها شرایط وجودی دسته وسیعی از آنها را به ما می‌دهد بلکه در حالت خاص  $x=0$  آزمون ساندور از مرجع [۷] را نتیجه می‌دهد.

**قضیه ۲-۲:** فرض کنید  $\mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$ :  $f$  تابعی باشد که مشتق آن نزولی و مثبت (یا صعودی و منفی) است. آن‌گاه  $(f, x)$  برای هر  $x \geq 0$  همگراست. افزون بر آن اگر  $R_n(f, 1)$  همگرا باشد آن‌گاه تابع  $\gamma(f, x)$  و  $f_{\sigma'}(x)$  در معادلات تابعی زیر صدق می‌کند

**مثال ۲-۳:** تابع حقیقی  $f(x) = \tan^{-1}(x)$  با دامنه  $\mathbb{R}$  در نظر گرفته و با بکارگیری قضیه الف و قضیه ۲-۲ نتیجه می‌گیریم که  $f$  روی  $[1, +\infty)$  جمع پذیر است (چون  $f$  مقعر است) و  $f_{\sigma'}(x)$  برای هر  $x \in [0, +\infty)$  همگرا است. لذا

$$\begin{aligned} \gamma(f, x) &= \gamma(\tan^{-1}, x) = -(\tan^{-1})_{\sigma'}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+k)^2} - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

بویژه

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\pi \coth(\pi) - 1) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

همچنین  $\gamma(f, x)$  در معادله تابعی زیر صدق می‌کند.  
 $f_{\sigma'}(x) - f_{\sigma'}(x-1) = f'(x) \quad ; \quad x \geq 1$

یعنی

$$\begin{aligned} &\gamma(\tan^{-1}, x-1) - \gamma(\tan^{-1}, x) \\ &= (\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2} ; x \geq 1 \end{aligned}$$

در واقع داریم

$$\begin{aligned} \gamma(f, x-1) - \gamma(f, x) &= \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+k-1)^2} - \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+(x+k)^2} + \frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(x+n)^2} \right) = (\tan^{-1})'(x) \end{aligned}$$

که همان معادله تابعی (۱.۴) برای  $f = \tan^{-1}$  است.

**۳- ارتباط با برخی دیگر از ثابت‌های نوع اویلر**

ساندور برخی از ثابت‌های نوع اویلر و وجود آنها را در مقاله [۶] بررسی کرد و آزمونی برای همگرایی آنها ارائه

و بار دیگر با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای  $f$  روی بازه  $[n, x+n+1]$  پیدا می‌کنیم  
 $n < d_n < x+n+1$  بطوریکه

$$f(x+n+1) - f(n) = (x+1)f'(d_n)$$

بنابراین با بکارگیری نامساوی (۱.۶) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} (1.7) - \gamma_n(f, x) &\leq -(x+1)f'(d_n) \\ -f'(x+1) + f(x+2) \\ &\leq f(x+2) ; x \geq 0 \end{aligned}$$

لذا نامساوی‌های (۱.۷) و (۱.۵) ایجاب می‌کند که برای هر  $x \geq 0$  دنباله تابعی  $\gamma_n(f, x)$  همگراست. به منظور اثبات معادلات تابعی (۱.۳) و (۱.۴) با مشتق گیری از اتحاد

$$\begin{aligned} f_{\sigma_n}(x) &= f(x) + f_{\sigma_n}(x-1) \\ &+ R_n(f, x) ; x \geq 1 \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned} (1.8) \quad f_{\sigma'_n}(x) &= f'(x) + \\ f_{\sigma'_n}(x-1) &- f'(n+x) \end{aligned}$$

از طرفی یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} R_n(f, 1) + f'(x+n) &= \\ f_{\sigma'_n}(x-1) - f_{\sigma'_{n+1}}(x-1) ; x \geq 1 \end{aligned}$$

حال با توجه به همگرایی دنباله تابعی  $f_{\sigma'_n}(x)$  روی  $[0, +\infty)$  و دنباله  $R_n(f, 1)$  تساوی فوق ایجاب می‌کند  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(n+x) = -R(f, 1) ; x \geq 1$

بنابراین با  $n \rightarrow \infty$  در (۱.۸) نتیجه می‌شود

$$f_{\sigma'}(x) = f'(x) + f_{\sigma'}(x-1) + R(f, 1) ; x \geq 1$$

به ویژه اگر  $R(f, 1) = 0$  آن‌گاه داریم

$$\gamma(f, x) = \gamma(f, x-1) - f'(x) ; x \geq 1$$

$$(۱.۹) \quad B(f) = \gamma(F) + F(1)$$

لذا  $A_n(f)$  نیز با توجه به رابطه زیر همگرا است  
 $A_n(f) = B_n(f) - f(n+1)$

و در نتیجه

$$(۱.۱۰) \quad A(f) = \gamma(F) + F(1) - f(\infty)$$

که  $f(\infty) = 0$  اگر  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$  همان  $f(\infty)$  است. لذا اگر  $f(\infty) = 0$  آن‌گاه

$$A(f) = B(f) = \gamma(F) + F(1).$$

**مثال ۳-۲:** فرض کنید  $0 < p \leq 1$  عدد حقیقی ثابتی باشد و قرار دهید  $f(x) = (\log x)^p$ . با توجه به  $0 < p \leq 1$  نتیجه می‌شود  $f'$  بر  $[1, +\infty)$  نزولی و مثبت است پس شرایط قضیه ۲-۲ را دارد و

$$\gamma(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\log n)^p - \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} (\log k)^{p-1}) =$$

$$\begin{cases} -\gamma \\ p = 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} ((\log(k+1))^p - (\log k)^p) - \frac{p}{k} (\log k)^{p-1} \\ 0 < p < 1 \end{cases}$$

از طرفی با رابطه بدست آمده بین  $\gamma(f)$ ،  $B(f')$  و  $A(f')$  (با جایگزین کردن  $F$  بوسیله  $f$  و تابع  $f$  توسط  $f'$ ) در (۱.۹) و (۱.۱۰) خواهیم داشت  
 $\gamma_{f'} = A(f') = B(f') = f(1) + \gamma(f)$ .

داد. در آن مقاله تابع  $F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ویژگی‌های معینی در نظر گرفته شده است. مطابق نماد بکار رفته شده در قضیه ساندور فرض کنید  $A_n$  و  $B_n$  دو دنباله از تابع انتگرال‌پذیر  $F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  به ترتیب زیر باشد

$$A_n = A_n(F) = \sum_{i=1}^n F(i) - \int_1^{n+1} F(x) dx$$

$$B_n = B_n(F) = \sum_{i=1}^{n+1} F(i) - \int_1^{n+1} F(x) dx \quad ; n \geq 1$$

اگر  $F(x) = \frac{1}{x}$  آن‌گاه حد مشترک این دنباله‌ها همان ثابت اولر-ماسکورونی می‌باشد.

### قضیه پ (ساندور [Y])

فرض کنید تابع  $F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  مثبت و نزولی و پیوسته باشد آن‌گاه دنباله  $A_n(F)$  صعودی و همگرا و دنباله  $B_n(F)$  نزولی و همگراست و با فرض اینکه  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$  دو دنباله حد یکسان دارند.

حال ادعا می‌کنیم که قضیه (پ) نتیجه‌ای از قضیه ۲-۲ به ازای  $x = 0$  است (واضح است که عکس آن برقرار نیست).

**قضیه ۳-۱:** قضیه (پ) نتیجه‌ای از قضیه ۲-۲ است (در حالت خاص  $x = 0$ )

**اثبات.** فرض کنید که  $F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  در شرایط قضیه (پ) صدق کند (در اینجا  $f$  نقش  $F$  در قضیه ساندور را بازی می‌کند). از اینرو  $f$  پیوسته بوده و حد  $f$  در بی‌نهایت موجود و دارای تابع اولیه  $F$  روی  $[1, +\infty)$  است. حال تابع  $F$  شرایط قضیه ۲-۲ (به جای  $f$ ) را دارد لذا دنباله  $(F, x)$  برای  $x \geq 0$  همگرا می‌باشد. اما با محاسبه داریم

$$(۱.۸) \quad B_{n-1}(f) = \gamma_n(F) + F(1)$$

$$= F(1) - F(n) + \sum_{k=1}^n F'(k)$$

با توجه به همگرایی دنباله  $(F, 0)$ ، رابطه فوق ایجاب می‌کند  $B_n(f)$  همگرا بوده و داریم

Equation  $f(x+1) = g(x)f(x) : \Gamma$ -Type  
 Functions, J. Math. Anal. Appl.,  
 209(1997), 605-623.

فهرست منابع

- [1] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer, 1976.
- [2] E. Artin, The Gamma Function, Holt Rhinehart & Wilson, New York; Transl. by M. Butler (1931) from Einführung un dfr Theorie der Gamma fonktion, Teubner, Leipzig, 1964.
- [3] M. H. Hooshmand, Limit Summability of Real Functions, Real Analysis Exchange, 27(2) (2002), 463-472.
- [4] M. H. Hooshmand, Another Look at the Limit Summability of Real Functions, J. Math. Ext., 4(2009), 73-89.
- [5] M. H. Hooshmand, Analytic Summ-ability of Real and Complex Functions, J. Contemp. Math. Anal., 4(2016), 63-73.
- [6] J. C. Lagarias, Eulers constant: Eulers Work and Modern Developments, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, vol. 50, No. 4(2013), 527- 628
- [7] J. Sandor, On Generalized Euler Con-stant and Schlomilch-Lemonnier Type Inequalities, J. Math. Anal. Appl., 328(2007), 1336-1342.
- [8] R. J. Webster, Log-Convex Solutions to the Functional

