

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM
JOURNAL OF
NONLINEAR
REPRODUCTION
MODELING

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

تحلیل پایداری یک مدل مرتبه کسری از ویروس HIV و عفونت ایدز در جامعه

محمدصادق شاهروخی دهکردی^{۱*}، یاسمن احمدی^۲

^(۱ و ۲) گروه ریاضی کاربردی و صنعتی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۰۲

چکیده

در این مقاله یک مدل غیرخطی از مرتبه کسری برای تحلیل و کنترل گسترش ویروس HIV ارائه شده و سپس نقاط تعادل آن E_0 که به نقطه تعادل بدون بیماری و E^* نقطه تعادل عفونت شناخته می‌شوند یافت می‌شوند و پایداری آن‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد. شاخص انتقال یا عدد مولد R_0 که تابعی از پارامترهای ثابت موجود در مدل است، نقش مهمی در پایداری مدل فوق ایفا می‌کند. به عبارتی دقیق‌تر زمانی که $R_0 < 1$ ، نقطه تعادل بدون بیماری E_0 جاذب است. در مقابل وقتی که $R_0 > 1$ ، E_0 ناپایدار و نقطه تعادل عفونت E^* وجود دارد و جاذب خواهد بود. در پایان نیز چند مثال عددی برای بررسی تاثیر پارامترهای موجود در مدل بر گسترش بیماری بیان می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نقاط تعادل، پایداری، مدل HIV /ایدز با مشتقات مرتبه‌ی کسری، حل عددی، الگوریتم گرانوالد-لتینکوف^۱.

Email: m_shahrokhi@sbu.ac.ir

1. Grünwald-Letinkov

*. عهده‌دار مکاتبات:

۱- مقدمه

ایدز (سندروم اکتسابی نقص ایمنی) یک بیماری جدی تهدید کننده‌ی زندگی است که توسط ویروس نقص ایمنی بدن انسان (HIV) ایجاد شده، که برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ در ایالات متحده آمریکا کشف شد. ایدز بیماری ناخوشایندی است که نرخ مرگ و میر بالایی دارد بطوریکه هر ساله بیش از بیست و پنج میلیون نفر در سراسر دنیا توسط این ویروس کشته می‌شوند. همچنین سرعت گسترش آن بگونه‌ای است که روزانه چهارده هزار نفر را مبتلا می‌کند. پیشرفت ایدز حدود شش ماه تا پانزده سال طول می‌کشد. حمله این ویروس و انهدام CD_4^+ در سلول‌های T باعث اختلال و از بین رفتن سلول‌های ایمنی بدن می‌شود. این ویروس از راه تماس جنسی بدون حفاظت، مسیر تولید خون با به اشتراک گذاری سوزن آلوده یا انتقال خون آلوده منتقل می‌شود. همچنین می‌تواند از مادر به بچه‌اش در طول بارداری، شیردهی، یا در طول تولد انتقال یابد. فرد مبتلا عموماً به علت عفونت و بدخیمی گسترش یافته در سراسر بدن، طی دو سال یا کمتر از آن به کام مرگ کشیده می‌شود. ریاضیدانان علاقه زیادی به مطالعه گسترش پویایی HIV/ایدز برای کمک به زیست شناسان برای یافتن درمان مناسب برای افراد آلوده دارند، آن‌ها به دنبال از بین بردن این تهدید برای بشریت هستند. مدل‌های ریاضی ابزار مهمی در تحلیل گسترش و کنترل HIV/ایدز هستند زیرا آن‌ها پیش‌بینی‌های کوتاه مدت و بلند مدت بیماری‌های HIV و ایدز را ارائه می‌دهند.

بسیاری از مدل‌های موجود و مطالعات انجام شده در این راستا نشان می‌دهد پویایی بیماری فوق را می‌توان توسط یک سیستم از معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی بدون تاخیر زمانی در نظر گرفت [۴۶]. با این حال، در نظر گرفتن تاخیر در مدل‌های معادلات دیفرانسیل عادی و پاره‌ای، آن‌ها را بیشتر واقع گرایانه می‌سازد. بنابراین محققانی مانند رمنارش^۱ و همکارانش [۱۳] یک مدل ریاضی غیرخطی را برای بررسی تاثیر تاخیر زمانی بر شیوع انتقال HIV/ایدز توسط افراد آلوده ارائه کرده‌اند

همچنین تریپاتی^۲ و همکارانش [۱۷] یک مدل غیرخطی را برای بررسی تاثیر غربالگری آلودگی‌های ناخواسته بر گسترش HIV/ایدز در یک جامعه همگن با مهاجرت دائمی پیشنهاد کرده‌است. آن‌ها همچنین تاثیر غربالگری عفونت‌های ناخواسته را در مورد گسترش بیماری HIV بررسی کردند. سیرینیوسارائو^۳ [۱۶] یک چارچوب نظری برای انتقال بیماری فراگیر HIV/ایدز در هند ارائه کرد. کای^۴ و همکارانش [۴] یک مدل HIV را با درمان بررسی کردند، آن‌ها مدل را با دو مرحله عفونی تشکیل دادند و ثابت کردند که پویایی گسترش بیماری به طور کامل براساس عدد مولد پایه R_0 ، که در ادامه معرفی خواهد شد، تعیین می‌شود.

در سال‌های اخیر، موضوع حسابان کسری که شامل نظریه‌های مشتقات و انتگرال‌ها از هر مرتبه‌ی دلخواه غیر صحیحی است، به طور گسترده در توصیف بسیاری از پدیده‌های موجود در طبیعت مانند: آب‌شناسی [۲]، مدل انتقال گرما [۱۵]، مدل ویسکوالاستیسیته پویا [۱۰]، مالی [۷]، کنترل موتور و دما [۳] و پدیده‌های دیگر [۸]، استفاده شده است. بنابراین، معرفی روش‌هایی برای تعیین جواب‌های مدل‌های با مرتبه‌ی کسری از اهمیت زیادی برخوردار است. اغلب، این مدل‌ها شامل معادلات دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل کسری هستند. هدف اصلی ما در این مقاله ارائه یک مدل غیرخطی با مرتبه کسری α ، $0 < \alpha \leq 1$ برای HIV/ایدز و تحلیل آن است. مشتق کسری کاپوتو^۵ و گرانوالد-لتنیکیف دو تعریف از پر استفاده‌ترین تعاریف انتگرال‌ها و مشتقات کسری هستند [۵،۹]، در سال ۱۸۶۷، گرانوالد-لتنیکیف مشتق کسری را به این صورت تعریف کرد:

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h^\alpha} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha) f(x-kh)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)},$$

$$n-1 < \alpha \leq n$$

2. Tripathi
3. Srinivasa Rao
4. Cai
5. Caputo

1. Ram Naresh

اول سیستم بالا ظاهر نمی‌شود، لذا می‌توانیم سیستم معادلات (۱) را به معادل آن که در زیر آمده است کاهش دهیم:

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} S(t) = Q_0 - (\beta_1 I(t) + \beta_2 J(t)) S(t) - \mu S(t) \\ D^{\alpha_2} I(t) = (\beta_1 I(t) + \beta_2 J(t)) S(t) - (\theta + \delta + \mu) I(t) \\ D^{\alpha_3} J(t) = \theta I(t) - (\delta + \mu) J(t) \end{cases} \quad (2)$$

از طرفی دیگر اگر $\alpha_i = 1$ شوند، سیستم فوق یک سیستم معادلات دیفرانسیل عادی، غیرخطی خواهد شد. همانطور که در [۱۳، ۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. بنابر [۹] منطقه پایداری یک سیستم مرتبه کسری شاخه‌ای است که در آن مقادیر ویژه λ ی سیستم، معادله مشخصه‌ی حاصل از ماتریس ژاکوبی سیستم (۲) در یک نقطه تعادل معین، در رابطه $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}}{2}$ صدق کند.

هدف اصلی در این مقاله بررسی پایداری مدل HIV/ایدز و ارتباط آن با پارامترهای سیستم مورد بحث بوده و بعد از آن به مطالعه رفتار سیستم، هنگامی که یک تاخیر زمانی در غربالگری وجود دارد، می‌پردازیم. روند کلی پیشرفت این مقاله به شرح زیر است: نقاط تعادل و ویژگی‌های پایداری مدل ایدز در بخش بعدی ارائه شده و شرایط لازم و کافی برای آن بدست آمده است. در ادامه برای نشان دادن کارایی و دقت روش، مثال‌هایی در بخش سوم با آنالیز روش عددی گرانوالد-لنتیکوف در نظر گرفته شده است.

۲- نقاط تعادل و پایداری

هدف این بخش بدست آوردن نقاط تعادل سیستم (۲) و بحث پیرامون پایداری آنها است. به خوبی می‌دانیم که نقاط تعادل سیستم (۲) با حل کردن معادلات جبری غیرخطی زیر بدست می‌آیند.

$$D^{\alpha_1} S(t) = D^{\alpha_2} I(t) = D^{\alpha_3} J(t) = 0$$

با حل معادلات بالا، اگر $R_0 < 1$ سیستم (۲) دارای نقطه

در سال ۱۹۶۷ کاپوتو، مشتق کسری از یک تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad n-1 < \alpha < n$$

در این مقاله مدل HIV/ایدز را به یک سیستم مرتبه کسری از مرتبه کسری α با توجه به تعریف کاپوتو، تعمیم خواهیم داد. به بیانی دقیق‌تر اگر جامعه را به چهار گروه از، افراد مستعد پذیرش بیماری $S(t)$ ، افراد آلوده‌ای که نمی‌دانند آلوده هستند $I(t)$ ، افراد آلوده‌ای که می‌دانند آلوده هستند $J(t)$ (با استفاده از غربالگری پزشکی یا غیره) و جمعیت ایدز $A(t)$ ، تقسیم کنیم آنوقت مدل مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} D^{\alpha_1} S(t) = Q_0 - (\beta_1 I(t) + \beta_2 J(t)) S(t) - \mu S(t) \\ D^{\alpha_2} I(t) = (\beta_1 I(t) + \beta_2 J(t)) S(t) - (\theta + \delta + \mu) I(t) \\ D^{\alpha_3} J(t) = \theta I(t) - (\delta + \mu) J(t) \\ D^{\alpha_4} A(t) = (I(t) + J(t)) \delta - (\eta + \mu) A(t) \end{cases} \quad (1)$$

پارامترهای ظاهر شده در سیستم معادلات بالا همگی مقادیری مثبت، ثابت و مقدار تعریف شده‌ای دارند. Q_0 نرخ مهاجرت افراد مستعد پذیرش بیماری، β_1 نرخ سرانه افراد حساس به عفونت‌های بدون علائم (ناخواسته)، β_2 نرخ سرانه‌ی افراد حساس به عفونت‌های همراه با بروز علائم (آگاهانه)، μ نرخ مرگ و میر طبیعی غیرمرتبط با ایدز، θ نرخ عفونت‌های ناخواسته است که توسط غربالگری به عفونت‌های آگاهانه تبدیل می‌شوند، δ نرخ انواع عفونت‌هاست که با آن ایدز شیوع پیدا می‌کند و η نرخ مرگ و میر مرتبط با ایدز است. با توجه به اینکه تابع $A(t)$ در سه معادله

$$\begin{aligned} & \mu(\delta + \mu)(\theta + \delta + \mu) > \\ & Q_0\beta_1(\delta + \mu) + Q_0\beta_2\theta \\ & > Q_0\beta_1(\delta + \mu) \\ \Rightarrow & \mu(\theta + \delta + \mu) > Q_0\beta_1 \end{aligned}$$

با توجه به نامنفی بون پارامترها میتوان نتیجه گرفت

$$\theta + 2\delta + 2\mu \geq \theta + \delta + \mu > \frac{Q_0\beta_1}{\mu}$$

بنابراین $q_1 > 0$ است. همچنین از مثبت بودن $(1 - R_0) > 0$ نیز مقدار $q_2 > 0$ نتیجه می‌شود. در پایان با بکاربردن معیار راف-هرویتز^۱ برای چندجمله‌ای از درجه دوم نتیجه می‌شود نقطه E_0 در این حالت، پایداری مجانبی است. حال اگر $R_0 > 1$ باشد آنگاه $q_2 < 0$ و معادله (۴) یک ریشه حقیقی مثبت خواهد داشت که این باعث ناپایداری نقطه E_0 بوده و لذا اثبات کامل است.

لم ۱: اگر $R_0 = 1$ باشد آنگاه سیستم (۲) حول نقطه E_0 پایداری مجانبی خواهد بود.

اثبات: اگر $R_0 = 1$ آن وقت $q_2 = 1$ و $q_1 > 0$ می‌شود. بدیهی است که در این حالت ریشه‌های معادله (۴) به صورت $\lambda_2 = 0$ و $\lambda_3 = -q_1$ خواهند بود و این نشان می‌دهد که سیستم مورد نظر حول نقطه E_0 پایدار مجانبی است. □

در ادامه به بررسی پایداری نقطه تعادل عفونت E^* خواهیم پرداخت. برای این منظور تعریفی در زیر ارائه می‌شود که تعمیم مفهوم دلتا برای معادلات درجه سوم است که در روند بررسی پایداری نقطه تعادل E^* از آن استفاده خواهد شد.

تعریف ۱: مبین^۲ چند جمله‌ای درجه سه $\mathfrak{D}(P)$ را با نماد $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$

تعادل آزاد $E_0 = (\frac{Q_0}{\mu}, 0, 0)$ است و در مقابل اگر $R_0 > 1$ علاوه بر E_0 ، یک تعادل عفونت $E^* = (S^*, I^*, J^*)$ مثبت وجود خواهد داشت که در آن R_0 عدد مولد پایه تعریف شده در [۵،۹] بوده و برابر $R_0 = \frac{Q_0[\beta_1(\delta + \mu) + \beta_2\theta]}{\mu(\delta + \mu)(\theta + \delta + \mu)}$

است. همچنین در نقطه تعادل عفونت نیز داریم:

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{Q_0}{(\theta + \delta + \mu)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \\ J^* &= \frac{\theta}{(\delta + \mu)} I^*, \\ S^* &= \frac{Q_0}{\mu R_0}. \end{aligned}$$

حال با در دست داشتن نقاط تعادل، رفتار آنها را بررسی می‌کنیم. قضیه زیر پایداری رفتار سیستم (۲) را پیرامون نقطه تعادل بدون بیماری E_0 بیان می‌کند.

قضیه ۱: اگر $R_0 < 1$ ، سیستم (۲) پیرامون E_0 پایدار مجانبی (به طور موضعی پایدار) خواهد بود و اگر $R_0 > 1$ ناپایدار است.

اثبات: به آسانی می‌توان دید معادله مشخصه ماتریس ژاکوبی برای سیستم (۲) پیرامون نقطه تعادل E_0 به صورت زیر بوده

$$(-\mu - \lambda)(\lambda^2 + q_1\lambda + q_2) = 0 \quad (۳)$$

که در آن $q_1 = \theta + 2\delta + 2\mu - \frac{\beta_1 Q_0}{\mu}$ و $q_2 = (\theta + \delta + \mu)(\delta + \mu)(1 - R_0)$ است. به وضوح $\lambda_1 = -\mu$ یکی از مقادیر ویژه و دیگر مقادیر ویژه ریشه‌های معادله درجه دوم

$$\lambda^2 + q_1\lambda + q_2 = 0 \quad (۴)$$

می‌باشند. با فرض $R_0 < 1$ داریم:

1. Routh-Hurwitz
2. Discriminate

نمایش می‌دهند و عبارت است از

$$\mathcal{D}(P) := 18a_1a_2a_3 + (a_1a_2)^2 - 4a_3(a_1)^2 - 4(a_2)^3 - 27(a_3)^2$$

در واقع $\mathcal{D}(P)$ تعمیم مفهوم دلتا برای چندجمله‌ای‌های از درجه دوم است و نقشی مشابه دلتا برای بدست آوردن ویژگی‌های ریشه‌ها در درجات بالا ایفا می‌کند. برای اطلاعات بیشتر پیرامون این مفهوم خواننده می‌تواند به منبع [۱۴] مراجعه کند.

در ادامه اگر قرار دهیم $k := (\theta + \delta + \mu) = \beta_1 S^* + \beta_2 J^* S^* / I^*$ و معادله مشخصه سیستم (۲) را حول نقطه تعادل E^* بدست آوریم این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

که در آن ضرایب a_i برای $i = 1, 2, 3$ به صورت زیر خواهند بود:

$$a_1 = \delta + 2\mu + \frac{kI^*}{S^*} + k - \beta_1 S^*$$

$$a_2 = (k - \beta_1 S^* + \delta + \mu)(\mu + \frac{kI^*}{S^*}) + k\beta_1 I^*$$

$$a_3 = kI^*(\beta_1(\delta + \mu) + \beta_2\theta) > 0$$

حال با در نظر گرفتن نمادهای معرفی شده در بالا، قضیه زیر که در مورد پایداری نقطه تعادل E^* است بیان می‌شود.

قضیه ۲: سیستم (۲) را در حالتی که $R_0 > 1$ است در نظر بگیرید. آنگاه نقطه عفونت E^* پایداری مجانبی خواهد بود اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

(الف) برای هر $\alpha_i \in (0, 1]$ نقطه عفونت پایدار مجانبی است اگر $\mathcal{D}(P) > 0$ و $a_1a_2 > a_3$ باشد.

(ب) در حالتی که $\mathcal{D}(P) < 0$ است نقطه عفونت برای مقادیر $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in [0, \frac{2}{3})$ پایدار مجانبی است.

که در آن نمادهای $\mathcal{D}(P)$ ، a_1 ، a_2 و a_3 مقادیری

است که قبل از قضیه تعریف شده‌اند.

اثبات: حالت اول $\mathcal{D}(P) < 0$ ، $0 < a_3 < a_1a_2$ و طبق تعریف

$$k - \beta_1 S^* = \frac{\beta_2 J^* S^*}{I^*} > 0$$

و لذا $\beta_1 S^* < k$ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت ضرایب $0 < a_1$ و $0 < a_3$ مقادیری مثبت هستند. حال با به کارگیری معیار راف-هرویتز برای چند جمله‌ایهای از درجه سه در می‌یابیم برای هر مقدار

$$\alpha_i \in (0, 1]$$

$$|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha_i \pi}{2}.$$

بنابراین سیستم مورد نظر حول E^* پایداری مجانبی خواهد بود. برای قسمت (ب) فرض کنیم که $\mathcal{D}(P) < 0$ و $\max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \in [0, \frac{2}{3})$ است. می‌توان با یک محاسبه ساده نشان داد عبارت $(k - \beta_1 S^*)(\delta + \mu) - \beta_2 \theta S^*$ برابر صفر است. با کمک از این تساوی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_2 &= (k - \beta_1 S^* + \delta + \mu)(\mu + \frac{kI^*}{S^*}) + k\beta_1 I^* \\ &= (\frac{\beta_2 \theta S^*}{\delta + \mu} + \delta + \mu)(\mu + \frac{kI^*}{S^*}) + k\beta_1 I^* \\ &\geq (\frac{\beta_2 \theta S^*}{\delta + \mu})(\frac{kI^*}{S^*}) = \frac{k\beta_2 \theta I^*}{\delta + \mu} \end{aligned}$$

و از آنجایی که مقادیر θ ، β_2 و k مقادیری مثبت اکید هستند در می‌یابیم که $a_2 > 0$. پس شرایط پایداری برای سیستم مرتبه کسری فوق طبق گزاره ۱ منبع [۱] برقرار است، بنابراین E^* با شرایط قسمت دوم نیز پایداری مجانبی خواهد بود و اثبات کامل است.

۳- نتایج عددی با استفاده از الگوریتم گرانوالد-لتنیکف

در این بخش، به منظور تحقیق نتایج تحلیلی بدست آمده در قسمت‌های قبل، نمونه‌های قابل تاملی را برای مدل

با بکار بردن روش تفاضل متناهی غیراستاندارد می‌کنز^۱ [۱۱،۱۲] همراه با تکنیک گسسته‌سازی گرانوالد-لتینکف برای هر کدام از معادلات سیستم (۲) خواهیم داشت

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n+1} C_i^{\alpha_1} S^{n+1-i} = \\ Q_0 - (\beta_1 I^n + \beta_2 J^n) S^{n+1} - \mu S^{n+1} \\ \sum_{i=0}^{n+1} C_i^{\alpha_2} I^{n+1-i} = \\ (\beta_1 I^n + \beta_2 J^n) S^{n+1} - (\theta + \mu + \delta) I^{n+1} \\ \sum_{i=0}^{n+1} C_i^{\alpha_3} J^{n+1-i} = \\ \theta I^{n+1} - (\mu + \delta) J^{n+1} \end{cases}$$

حال با ساده‌سازی عبارت‌های بالا و بدست آوردن توابع I, J, S در مرحله $(n+1)$ -ام برای مقادیر $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S^{n+1} &= \frac{Q_0 - \sum_{i=1}^{n+1} C_i^{\alpha_1} S^{n+1-i}}{C_0^{\alpha_1} + \mu + \beta_1 I^n + \beta_2 J^n}, \\ I^{n+1} &= \frac{(\beta_1 I^n + \beta_2 J^n) S^{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} C_i^{\alpha_2} I^{n+1-i}}{C_0^{\alpha_2} + \theta + \mu + \delta}, \\ J^{n+1} &= \frac{\theta I^{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} C_i^{\alpha_3} J^{n+1-i}}{C_0^{\alpha_3} + (\mu + \delta)}. \end{aligned}$$

توجه کنیم در بالا همان $(S^0, J^0, I^0) = (S(0), J(0), I(0))$ شرایط اولیه مسئله در نقطه $t = 0$ است. برای بدست آوردن نتیجه بهتر در همگرایی این روش عددی، برای هر کدام از معادلات سیستم (۲) مقادیر $C_i^{\alpha_i}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم به بیانی دقیق تر

$$C_0^{\alpha_1} = \left(\frac{e^{\mu h} - 1}{\mu} \right)^{-\alpha_1},$$

ایدز در نظر گرفته و به حل عددی آنها می‌پردازیم. برای این منظور از روش تفاضل متناهی غیر استاندارد و روش گسسته‌سازی گرانوالد-لتینکف استفاده شده است. در ابتدا بطور مختصر روش فوق را توضیح داده سپس به مثال‌های مربوطه خواهیم پرداخت. در پایان خاطر نشان می‌کنیم که برنامه‌های مربوط به این مثال‌ها با نرم‌افزار Mathematica نوشته و اجرا شده‌اند.

۳،۱. تقریب گرانوالد-لتینکف:

با معادله دیفرانسیل از مرتبه کسری زیر شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} D^\alpha X(t) &= f(t, X(t)), \\ X(0) &= X_0, \\ t &\in [0, \tau], \end{aligned}$$

که $\alpha > 0$ و D^α بیانگر مشتق کسری است. با استفاده از تعریف گرانوالد-لتینکف برای مشتق کسری یک بعدی می‌توان نوشت:

$$D^\alpha X(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(g(h))^\alpha} \sum_{i=0}^{\left[\frac{\tau}{g(h)} \right]} (-1)^i \binom{\alpha}{i} X(t - ig(h)),$$

که در آن $g(h)$ اندازه گام افراز بازه $[0, \tau]$ و تابع g در همسایگی نقطه صفر پیوسته و برابر صفر بوده و $\left[\frac{\tau}{g(h)} \right]$ جزء صحیح، $\frac{\tau}{g(h)}$ را نشان می‌دهد. با توجه به این تساوی سیستم معادلات فوق به صورت زیر گسسته خواهد شد

$$\sum_{i=0}^n C_i^\alpha X_{n-i} \approx f(t_n, X_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

که در بالا $t_n = ng(h)$ و C_i^α ها ضرایب GL نامیده می‌شوند و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} C_i^\alpha &= \left(1 - \frac{1+\alpha}{i} \right) C_{i-1}^\alpha, \\ C_0^\alpha &= (g(h))^{-\alpha}, \\ i &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

1. Micken's scheme

مقادیر زیر را داشته باشند:

$$Q_0 = 275, \quad \mu = 0.09, \\ \delta = 0.092, \quad \theta = 0.034, \\ \beta_1 = 0.00005, \quad \beta_2 = 0.000012$$

$$C_0^{\alpha_2} = \left(\frac{e^{(\theta+\mu+\delta)h} - 1}{\theta + \mu + \delta} \right)^{-\alpha_2}, \\ C_0^{\alpha_3} = \left(\frac{e^{(\mu+\delta)h} - 1}{\mu + \delta} \right)^{-\alpha_3},$$

آنگاه با محاسبه، عدد مولد پایه $R_0 = 0.739$ خواهد بود و لذا سیستم فوق طبق قضیه ۱ دارای نقطه تعادل آزاد $E_0 = (3055, 0, 0)$ است. حال با کمک از روش عددی گراناوالد-لتنیکف ارائه شده در بخش قبلی، توابع I, J, S را نسبت به زمان با فرض اولیه $(S^0, J^0, I^0) = (150, 50, 90)$ برای مقادیر متفاوتی از $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$ محاسبه می‌کنیم. شکل‌های ۱، ۲ و ۳ نمودار توابع فوق را نسبت به زمان نشان می‌دهند.

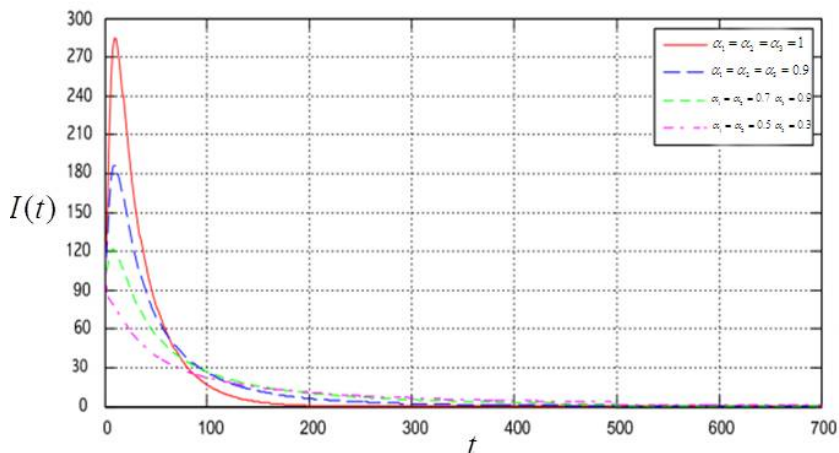
همچنین یادآوری می‌کنیم

$$C_i^{\alpha_j} = \left(1 - \frac{1 + \alpha_j}{i}\right) C_{i-1}^{\alpha_j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

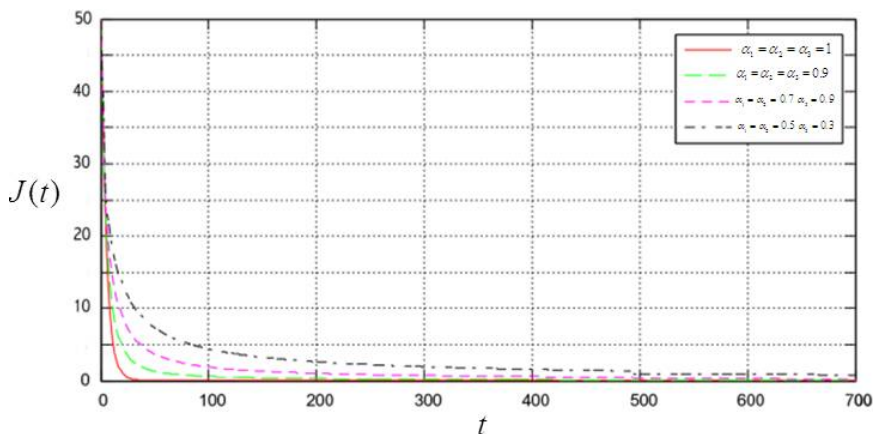
حال با کمک از روابط، تکنیک حل عددی بالا را برای مثال‌های بخش بعدی پیاده‌سازی می‌کنیم.

۳،۲. مثال‌هایی از مدل ایدز و حل عددی آن‌ها

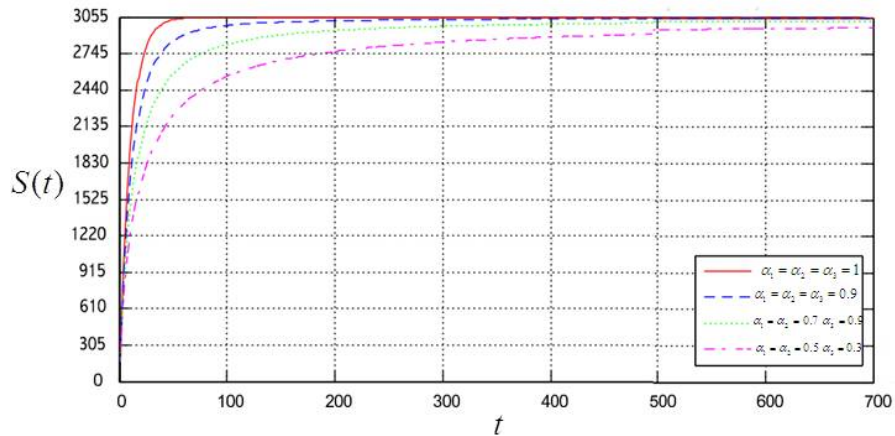
مثال ۱: فرض کنید پارامترهای ثابت در سیستم (۲)



شکل ۱: نمودار تابع I بر حسب زمان



شکل ۲: نمودار تابع J بر حسب زمان



شکل ۳: نمودار تابع S بر حسب زمان

نقطه تعادل عفونت
 استفاده از روش عددی گراناوالد-لتنیکیف که در بخش
 قبلی توضیح داده شده بود توابع I, J, S را نسبت به
 زمان با فرض اولیه
 $(S^0, J^0, I^0) = (1500, 16, 500)$ برای مقادیر
 متفاوتی از $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ محاسبه می‌کنیم. شکل‌های ۴،
 ۵ و ۶ نمودار توابع فوق را نسبت به زمان نشان می‌دهند.

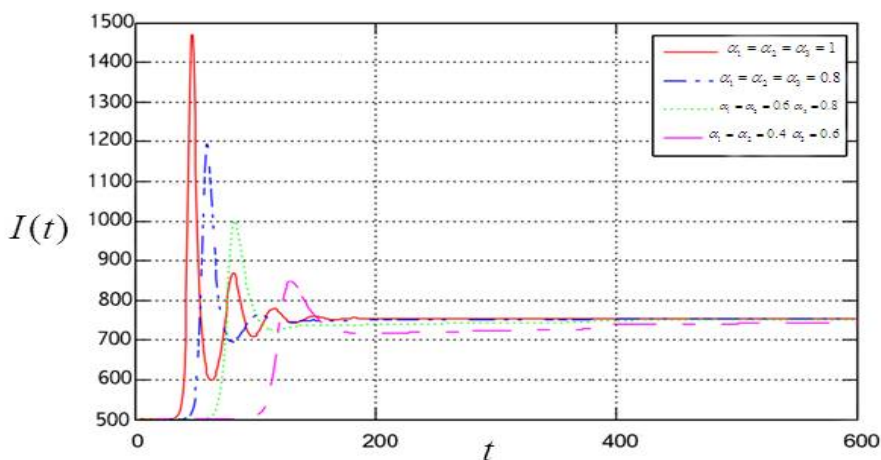
مثال ۲: فرض کنید پارامترهای ثابت در سیستم (۲)
 مقادیر زیر را داشته باشند:

$$Q_0 = 766, \quad \mu = 0.019,$$

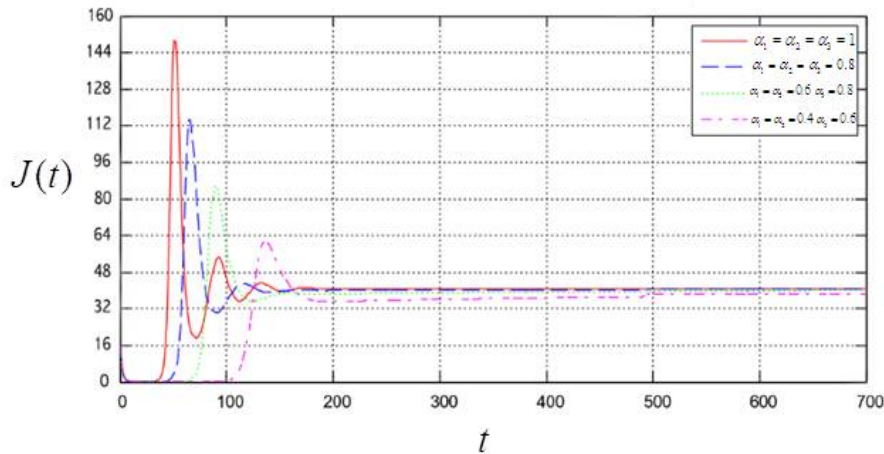
$$\delta = 0.74, \quad \theta = 0.04,$$

$$\beta_1 = 0.00009, \quad \beta_2 = 0.00002$$

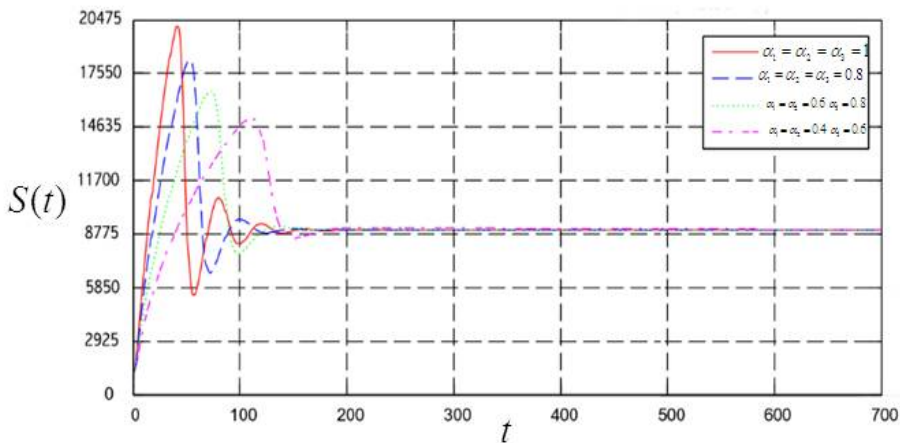
آنگاه با محاسبه، عدد مولد پایه برابر $R_0 = 4.594$
 خواهد بود. بنابراین سیستم فوق طبق قضیه ۲ دارای



شکل ۴: نمودار تابع I بر حسب زمان



شکل ۵: نمودار تابع J بر حسب زمان



شکل ۶: نمودار تابع S بر حسب زمان

مورد بررسی قرار گرفته است. سرانجام شبیه‌سازی‌های عددی برای مجموعه پارامترهای متفاوت حل شده و با نتایج تحلیلی بدست آمده برای سیستم (۲) سازگار است.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل ریاضی غیرخطی برای ویروس HIV و عفونت بیماری ایدز در جامعه انسانی با کمک از حسابان کسری ارائه شده است. پایداری سیستم فوق بررسی شده و نقاط تعادل آن، نقطه تعادل آزاد E_0 (بدون بیماری) و عفونت E^* هر دو مورد بحث قرار گرفته‌اند. شرایط لازم و کافی برای پایداری نقاط مورد بحث بر اساس عدد مولد پایه R_0 بیان شده و بدست آمده است، جایی که مدل غیرخطی فوق متناوباً پایدار است اگر $R_0 < 1$ و در مقابل تعادل عفونت E^* وجود دارد وقتی که $R_0 > 1$ باشد. در حالت $\alpha = 1$ ، پایداری سیستم (۲) مشابه با سیستم غیرخطی معادلات دیفرانسیل عادی مورد بحث در [۶،۱۳] با نتایج مشابه،

9. Kenneth S. Miller, Bertram Ross, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, A Wiley-Interscience Publication, USA, (1993).

10. Larsson S., Racheva M., Saedpanah F., "Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity", *Comput. Method. Appl. Mech. Eng.*, 283 (2015) 196-209.

11. Mickens R.E., Numerical integration of population models satisfying conservation laws: NSFD methods, *Biol. Dyn.* 1(4) (2007) 1751-1766.

12. Mickens R.E., *Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes*, World Scientific, Singapore, 2005.

13. Naresh R., Tripathi A., and Sharma D., A nonlinear AIDS epidemic model with screening and time delay, *App. Math. Comp.* 217 (2011) 4416-4426.

14. Radwan A.G., K. Moaddy and S. Momani, Stability and non-standard finite difference method of the generalized Chua's circuit, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 961-970.

15. Sierociuk D., Dzielinski A., Sarwas G., Petras I., Podlubny I., Skovranek T., "Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus", *Phil. Trans. R. Soc. A*, 371 (2013) 20120146.

16. Srinivasa Rao A.S.R., Mathematical modeling of AIDS epidemic in India, *Curr. Sci.* 84 (2003) 1192-1197.

17. Tripathi A., Naresh R., and Sharma D., Modeling the effect of screening of unaware infectives on the spread of HIV infection, *Appl. Math.* 184 (2007) 1053-1068.

فهرست منابع

1. Ahmed E., A.M. A.El-SayedbHala and A.A. El-Saka, On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rössler, Chua and Chen systems, *Physics Letters A*, 358 (2006)1-4.

2. Benson DA., Meerschaert M.M., Revielle, J., "Fractional calculus in hydrologic modeling: a numerical perspective", *Adv. Water Resour.*, 51 (2013) 479-497.

3. Bohannan G., "Analog fractional order controller in temperature and motor control applications", *J. Vib. Control*, 14 (2008) 1487-1498.

4. Cai L., Li X., Ghosh M., and Guo B., Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment, *Journal of computational and Applied Math.* 229 (2009) 313-323.

5. Das, S., "Fractional Calculus for System Identification and Controls", Springer, New York, (2008).

6. Hsieh Y.H., Chen C.H., Modeling the social dynamics of a sex industry: its implications for spread of HIV/AIDS, *Bull. Math. Biol.* 66 (2004) 143-249.

7. Jiang Y.L., Wang X.L., Wang Y., "On a stochastic heat equation with first order fractional noises and applications to finance", *J. Math. Anal. Appl.*, 396 (2012) 656-669.

8. Jiang Y.L., Ding X.L., "Waveform relaxation methods for fractional differential equations with the Caputo derivatives", *J. Comput. Appl. Math.*, 238 (2013) 51-67.