دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X–۲۵۸۸

JNRM
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ساختار اینشتین روی گروه‌های لی چهاربعدی خنثی

علی حاجی‌بدلی[*1]، امیر حسام زعیم[2]، رمیسا کرمی[3]

(۱) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب ۵۵۵۱۷۶۱۱۶۷، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵–۳۶۹۷، تهران، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب ۵۵۵۱۷۶۱۱۶۷، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۴/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

هنگامی که اینشتین به فکر ارائه نظریه نسبیت عام بر مبنای رفع محدودیت‌های نسبیت خاص(مخصوصاً ارتباط هندسی فضا و زمان) افتاد، متوجه اولین محدودیت نسبیت خاص در خصوص نادیده گرفتن تغییرات دربازه زمانی شد. چرا که با نسبیت خاص تنها انحنای فضایی مد نظر گرفته می‌شد. پس برای توضیح ریاضی آن بایستی از محاسبات تانسوری بهره می‌برد. بدین منظور ترکیبی از تانسور ریچی (که نماد انحنا در فضا – زمان است) و اسکالر ریچی از طریق اتحاد بیانچی بدست آورد که مشتق کواریانت آن صفر می‌باشد و به تانسور اینشتین معروف است. هدف اصلی این مقاله رده‌بندی مترهای اینشتین چپ‌پایا با علامت (۲,۲)، روی گروه‌های لی چهاربعدی است. گروه‌های لی چهاربعدی مجهز به متر چپ‌پایا با علامت خنثی، پیش از این به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و رده‌بندی کاملی از آنها ارائه شده است. اکنون در این پژوهش ساختار اینشتین این گروه‌ها را مطالعه خواهیم نمود. پس از آن برخی خواص هندسی این فضاها، مانند ریچی‌تخت بودن مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

واژه‌های کلیدی: منیفلد شبه‌ریمانی، مترچپ‌پایا، جبرلی، ریچی‌تخت.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email:haji.badali@bonabu.ac.ir

۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

در دوران اقلیدس تمایز آشکاری بین فضای فیزیکی و فضای هندسی وجود نداشت. از قرن نوزدهم و کشف هندسه نااقلیدسی، مفهوم فضا دستخوش تغییرات اساسی شده و پرسشی پدید آمده است: کدام فضای هندسی تطابق بیشتری با فضای فیزیکی دارد؟ امروزه باید بین فضاهای فیزیکی، فضاهای هندسی (که در آن هنوز خط و نقطه معانی حسی خود را دارند) و فضاهای انتزاعی تمایز قائل شد. ریمان (۱۸۲۶–۱۸۶۶) اولین کسی بود که توانست یک تحقیق جامع درباره هندسه نا اقلیدسی ارائه دهد.

هندسه هذلولوی، هندسه اقلیدسی و هندسه بیضوی سه هندسه مستقل و سازگار بودند که مبدع هندسه بیضوی ریمان بود. وی توانست با تعریف خمیدگی و انحنای فضا این تقسیم‌بندی را برای انواع هندسه بیان کند و اولین کسی بود که فضای n- بعدی را مطرح کرد. از سخنرانی ریمان ۶۲ سال (به اندازه عمر یک انسان) باید می‌گذشت تا جهان فیزیک، یک فیزیک‌دان علاقه‌مند به هندسه بیاورد. اینشتین که اهمیت کارهای ریمان را درک کرده بود در سال ۱۹۱۶ پس از حدود ۱۰ سال (سال‌های بین ۱۹۰۵ تا ۱۹۱۶) نظریه نسبیت عام خود را بر پایه مفاهیم هندسی بنا نهاد. البته در این ۶۲ سال هندسه نیز پیشرفت‌های زیادی کرده بود و مفاهیم پیچیده‌ای مانند هندسه منیفلد به آن افزوده شده بود اما تنها اینشتین بود که توانست زیر فشار ناسازگاری فیزیک و هندسه دوام بیاورد و دست آخر با تعریف پیوستار چهاربعدی فضا–زمان دنیای فیزیک را در هندسه دوباره تعریف کند. یکی از موضوعات جالب توجه در فیزیک نظری و هندسه، بنا به کاربردها و ساختار مرتبط آنها، منیفلدهای همگن است. منیفلد (M,g) همگن است اگر گروه ایزومتری‌های آن به صورت متعدی روی M عمل کند، یعنی به ازای هر دو نقطه‌ی $q \in M$، p یک ایزومتری ϕ وجود داشته باشد که $\phi(p) = q$.

منیفلدهای ریمانی همگن چهاربعدی در [۱] رده‌بندی شده‌اند که بنابراین رده‌بندی، یک منیفلد ریمانی همگن چهاربعدی، یا متقارن است و یا ایزومتر با یک گروه لی مجهز به یک متر ریمانی چپ‌پایا می‌باشد. در [۲] نیز گروه‌های لی ریمانی همبند ساده با بعد چهار مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در دو دهه گذشته، اکثر تحقیقات روی حالت شبه‌ریمانی صورت گرفته است. به عنوان مثال مشابه نتایج کار [۳]، برای حالت سه‌بعدی لورنتز در [۴] اثبات شده است، یعنی یک منیفلد لورنتز همگن کامل و همبند، یا متقارن است یا ایزومتر با یک گروه لی لورنتز سه‌بعدی (M,g) مجهز به متر چپ‌پایای g می‌باشد.

گروه‌های لی لورنتز سه‌بعدی نیز در [۵] و [۶] رده‌بندی شده‌اند.در حالت چهاربعدی یک رده‌بندی کامل از منیفلدهای همگن با ایزومتری غیربدیهی در [۷] ارائه شده است. تا چند سال گذشته گروه‌های لی ریمانی تنها بستر مطالعه برای مترهای چپ‌پایا بود، اما اخیرا در [۸] و [۹] به ترتیب شرایط انحنایی گروه‌های لی خنثای چهاربعدی با توجه ویژه به حالت‌های اینشتین و ریچی سولیتون بررسی شده است.

در این مقاله یک رده‌بندی از گروه‌های لی شبه‌ریمانی چهار بعدی با علامت (۲,۲) که در معادله اینشتین صدق می‌کنند ارائه شده است. سپس برخی ویژگی‌های هندسی را روی این کلاس‌ها مطالعه می‌کنیم.

ساختار کلی مقاله به این صورت خواهد بود که در بخش ۲ برخی مفاهیم پایه‌ای راجع به گروه‌های لی چهاربعدی خنثی بیان خواهد شد. بخش ۳ به نمایش رده‌بندی گروه‌های لی خنثی دارای ساختار اینشتین اختصاص می‌یابد که به ترتیب در این بخش‌ها تحدید متر چپ‌پایا روی یک زیر گروه سه‌بعدی، لورنتز و تباهیده است. در بخش آخر، با استفاده از این رده‌بندی‌ها خاصیت ریچی تخت بودن را برای گروه‌های لی چهار بعدی خنثای اینشتین بررسی می‌کنیم.

در تمام محاسبات این مقاله از نرم افزار Maple 16 استفاده شده است.

۲- گروه‌های لی چهاربعدی خنثی

رده‌بندی منیفلدهای ریمانی همگن چهاربعدی در [۱] به طور کامل صورت پذیرفته است. در این منبع ثابت شده که یک منیفلد ریمانی همگن چهاربعدی، یا متقارن است و یا ایزومتر با یک گروه لی مجهز به یک متر ریمانی

چپ‌پایا. طبق [۱۰] رده‌بندی گروه‌های لی ریمانی همبند ساده چهاربعدی به صورت زیر می‌باشد.

گزاره۲. ۱: [۱۰] یک گروه لی ریمانی چهاربعدی همبند ساده به یکی از صورت‌های زیر است:

الف) یکی از حاصلضرب‌های مستقیم $SU(2)\times\mathbb{R}$ یا $\widetilde{SL}(2\,,\mathbb{R})\times\mathbb{R}$

ب) یکی از گروه‌های لی حل‌پذیر زیر:

ب–۱) حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم غیربدیهی $E(2)\rtimes\mathbb{R}$ و $E(1,1)\rtimes\mathbb{R}$

ب–۲) حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم غیرپوچتوان $H\rtimes\mathbb{R}$ که H نشانگر گروه هایزنبرگ است.

ب–۳) حاصلضرب‌های نیمه‌مستقیم $\mathbb{R}^3\rtimes\mathbb{R}$.

گروه‌های لی شبه‌ریمانی با بعد چهار بررسی نشده بودند تا اینکه در [۱۱] با اهمیت ویژه‌ای به مثال‌های اینشتین و ریچی‌تخت مورد مطالعه قرار گرفتند. این رده‌بندی بر اساس تطابق گروه‌های لی چهاربعدی ریمانی و شبه‌ریمانی انجام گرفته است. که خلاصه آن در قالب گزاره زیر بیان خواهد شد.

گزاره ۲. ۲: هر گروه لی همبند ساده n - بعدی G، مترهای چپ‌پایا با علامت مشخص $(p,n-p)$ ی‌پذیرد. به ویژه اگر G یک گروه لی همبند ساده چهاربعدی با متر چپ‌پایا از علامت خنثی باشد، آنگاه G یکی از گروه‌های لی گزاره ۲ . ۱ است.

بنا به گزاره ۲ . ۱ هر گروه لی چهاربعدی همبند ساده یک حاصلضرب نیمه‌مستقیم $\mathbb{R}$ با یک گروه لی سه‌بعدی است. به صورت متناظر، جبر لی G به شکل $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\rtimes\mathfrak{g}_3$ خواهد بود که $\mathfrak{g}$ حاصلضرب نیمه‌مستقیم $\mathfrak{g}_3$ و $\mathfrak{r}$ است.

فرض کنید (G,g) یک گروه لی همبند ساده از بعد چهار باشد. مطالعه گروه‌های لی خنثی متفاوت از حالت ریمانی است، در واقع تحدید یک متر ریمانی g روی $\mathfrak{g}_3$ همواره ناتباهیده است لذا $(g|_{\mathfrak{g}_3},\mathfrak{g}_3)$ نیز خود یک جبر لی ریمانی است اما برای گروه‌های لی خنثی، تحدید g روی $\mathfrak{g}_3$ یا از علامت (۱،۲) است یا تباهیده خواهد بود [۱۱]. برای مطالعه حالت‌های ممکن گروه‌های لی چهاربعدی خنثی به لم زیر مراجعه می‌کنیم.

لم ۲. ۳: [۱۱] فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی چهاربعدی و g یک ضرب داخلی روی $\mathfrak{g}$، با علامت (۲،۲) باشد.

آنگاه یک پایه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ برای $\mathfrak{g}$ وجود دارد به طوری‌که:

- $\mathfrak{g}_3=span\{e_1,e_2,e_3\}$ جبر لی سه‌بعدی است و e_4 به عنوان یک مشتق روی $\mathfrak{g}_3$ عمل می‌کند (یعنی $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\rtimes\mathfrak{g}_3$، که $\mathfrak{r}=span\{e_4\}$)
- نسبت به پایه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$، ضرب داخلی خنثای g یکی از حالات زیر را داراست:

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$(b)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

نتیجه۲. ۴– بنا بر لم ۲. ۳ به منظور مطالعه جبرهای لی چهاربعدی $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}\rtimes\mathfrak{g}_3$ با علامت خنثی که در آن‌ها $\mathfrak{g}_3=span\{e_1,e_2,e_3\}$ و $\mathfrak{r}=span(e_4)$

کافی است دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

الف) $g|_{\mathfrak{g}_3}$ لورنتز است و بردار زمان‌گونه e_4 به عنوان مشتق روی $\mathfrak{g}_3$ عمل می‌کند.

ب) $g|_{\mathfrak{g}_3}$ تباهیده است و بردار نورگونه e_4 به عنوان مشتق روی $\mathfrak{g}_3$ عمل می‌کند.

۳- بررسی ساختار اینشتین روی گروه‌های لی خنثی

۳. ۱- تحدید متر روی $\mathfrak{g}_3$ لورنتز است

این بخش را با حالت (الف) نتیجه حاصل از لم ۲. ۳ آغاز می‌نماییم. در این حالت تحدید متر چپ‌پایای g روی $\mathfrak{g}_3$ لورنتز است، لذا متر g توسط ضرب داخلی معرفی شده در حالت (a) لم ۲. ۳ توصیف می‌گردد. در [۱۲] یک رده‌بندی کامل از گروه‌های لی خنثای چهاربعدی که تحدید متر چپ‌پایا روی یک زیرگروه سه‌بعدی آنها لورنتز می‌شود، ارائه شده است. این رده‌بندی در ۷ دسته

$\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_7$ بر پایه گروه‌های لی تک‌مدولی و غیرتک‌مدولی (قضیه ۴. ۱ منبع [۴]) و با در نظر گرفتن بردار زمان‌گونه e_4 به عنوان عمل مشتق روی $\mathfrak{g}_3$ صورت پذیرفته است.

در این بخش با در نظر گرفتن ساختار اینشتین $\varrho_{ij} = \lambda g_{ij}$ (که در آن ϱ_{ij}ها مولفه‌های تانسور ریچی هستند) و اعمال نمودن آن روی گروه‌های لی خنثای چهاربعدی که تحدید متر چپ‌پایا به زیرگروه سه‌بعدی آنها لورنتز می‌شود، رده‌بندی کاملی از حالت اینشتین این گروه‌ها ارائه خواهیم نمود.

یک منیفلد شبه‌ریمانی (M,g) اینشتین است اگر تانسور ریچی و تانسور متر آن در رابطه $\varrho_{ij} = \lambda g_{ij}$ صدق کنند که λ یک عدد حقیقی ثابت است. به عبارت دیگر، مولفه‌های تانسور ریچی ضرایب ثابتی از مولفه‌های تانسور متر باشند. برای روشن شدن موضوع، محاسبات مربوط به حالت $\mathrm{a1}$ را شرح می‌دهیم. با در نظر گرفتن $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ به عنوان یک پایه شبه‌متعامد یکه که در آن e_3 و e_4 بردارهای زمان‌گونه هستند مولفه‌های ارتباط لوی–سیویتا به شکل زیر خواهند بود:

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\alpha & A \\ -\alpha & 0 & 0 & \frac{B}{2} \\ -\alpha & 0 & 0 & \frac{B}{2} \\ A & \frac{B}{2} & -\frac{B}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{B}{2} \\ 0 & 0 & \alpha & C \\ 0 & \alpha & 0 & \frac{C-D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{D-C}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{B}{2} \\ 0 & 0 & -\alpha & \frac{D-C}{2} \\ 0 & -\alpha & 0 & D \\ -\frac{B}{2} & \frac{D-C}{2} & -D & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{B}{2} & \frac{B}{2} & 0 \\ \frac{B}{2} & 0 & -\frac{C+D}{2} & 0 \\ \frac{B}{2} & -\frac{C+D}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

و مولفه‌های ناصفر تانسور ریچی عبارتند از

$$\varrho_{11} = AC + AD + A^2,$$
$$\varrho_{12} = -\varrho_{13} = AB,$$
$$\varrho_{22} = AC - 2\alpha^2 + CD + \frac{B^2 + C^2 + D^2}{2},$$
$$\varrho_{23} = 2\alpha^2 - \frac{AC - AD + B^2}{2},$$
$$\varrho_{24} = -\varrho_{34} = -\alpha A + \frac{\alpha(C+D)}{2},$$
$$\varrho_{33} = -2\alpha^2 - AD - CD - \frac{C^2 + D^2 - B^2}{2}$$
$$\varrho_{44} = -A^2 - CD - \frac{C^2 + D^2}{2}$$

بنابراین با قرار دادن مولفه‌های تانسور ریچی و تانسور متر در معادله اینشتین، تساوی برقرار خواهد بود اگر و فقط اگر

$$A = 0, B = 2\varepsilon\alpha, C = -D, \lambda = 0 \cdot$$

پس از انجام محاسبات بر روی جبرهای لی قضیه (۳. ۱) منبع [۱۲] (نظیر آنچه برای حالت $a1$ انجام شد) بی‌درنگ قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۳. ۱. ۱– فرض کنید (G, g) گروه‌های لی لیست شده در قضیه (۳. ۱) منبع [۱۲] باشند. مثال‌های اینشتین گروه‌های لی چهاربعدی با علامت خنثی که تحدید g روی $\mathfrak{g}_3$ لورنتز می‌گردد در جدول (۱) آورده شده است.

۳. ۲– تحدید متر روی $\mathfrak{g}_3$ تباهیده است

سراسر این بخش، تحدید متر g روی $\mathfrak{g}_3$ تباهیده است. بنابراین متر g با ضرب داخلی حالت (b) لم ۲. ۳

توصیف می‌گردد. گروه‌های لی چهاربعدی خنثی با چنین متری در [۱۲] قضیه ۴. ۱ به صورت کامل رده‌بندی شده‌اند. اکنون مثال‌های اینشتین همه این گروه‌ها در جدول (۲) رده‌بندی شده‌اند.

قضیه ۳. ۲. ۱- فرض کنید (G, g) از جمله گروه‌های لی قضیه (۴. ۱) منبع [۱۲] باشد. حالت‌های اینشتین تمامی این گروه‌ها در جدول (۲) لیست شده است.

اثبات) روند اثبات مانند قضیه ۳. ۱. ۱ است. حالت $a2-10$ را در نظر بگیرید. پس از به دست آوردن مولفه‌های ارتباط لوی–سیویتا، تانسور ریچی را محاسبه می‌کنیم که مولفه‌های ناصفر آن عبارتند از

$$\varrho_{14}=-\frac{(A+E)B}{4}-\frac{(A-E)B}{4},$$
$$\varrho_{22}=-\varrho_{34}=-\frac{B^2}{2}.\varrho_{24}=-\frac{CB}{2},$$
$$\varrho_{44}=-\frac{2+A^3-AE^2}{2},$$

لذا جواب دستگاهی که از جایگذاری مولفه‌های تانسورهای متر و ریچی در فرمول اینشتین حاصل می‌شود به صورت زیر است

$$A=\varepsilon E, B=0, \lambda=0\cdot$$

۴- هندسه گروه‌های لی چهاربعدی اینشتین خنثی

به وضوح هر منیفلد اینشتین، در شرط ریچی‌موازی و ریچی سولیتون صدق می‌کند. اکنون برای همه حالت‌های لیست شده در جداول (۱) و (۲) شرط ریچی‌تخت بودن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. منیفلد ریچی‌تخت به منیفلدی گفته می‌شود که تانسور ریچی آن صفر شود. بررسی را از جبرهای لی قضیه ۳. ۱. ۱ آغاز می‌نماییم. بنابراین برای هر کدام، مولفه‌های تانسور ریچی را نسبت به پایه شبه‌متعامد یکه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ با e_3 و e_4 زمان‌گونه به دست می‌آوریم. برای نمونه جبر لی حالت $\mathrm{d}2$ قضیه ۳. ۱. ۱ را در نظر می‌گیریم. برای ارتباط لوی–سیویتا خواهیم داشت

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&0&0&E\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\E&0&0&0\end{pmatrix},$$
$$\Lambda_2=\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\-1&0&0&E\\-1&0&0&0\\0&E&0&0\end{pmatrix},$$
$$\Lambda_3=\begin{pmatrix}0&-1&-1&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&E\\0&0&-E&0\end{pmatrix},$$
$$\Lambda_4=\begin{pmatrix}0&-C&-C&0\\C&0&\frac{E}{2}&0\\-C&\frac{E}{2}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

و مولفه‌های ناصفر تانسور ریچی عبارت خواهند بود از

$$\varrho_{11}=\varrho_{22}=-\varrho_{33}=-\varrho_{44}=3E^2\cdot$$

به روشنی این حالت ریچی‌تخت است اگر و تنها اگر $E=0$.

ملاحظه ۴. ۱- در بین جبرهای لی قضیه ۳. ۱. ۱ حالت‌های $a1$ و $a2$، $c1$، $d1$، $f4$ و $g2$ همواره ریچی‌تخت هستند و برای چهار حالت خاص، شرط ریچی‌تخت بودن به شرح زیر می‌باشد:

حالت $\mathrm{d}2$ به شرط $E=0$، حالت $d4$ به شرط $\alpha=0$، حالت $f1$ به شرط $\delta=\gamma$ و در نهایت حالت $g1$ به شرط $\gamma=0$ ریچی‌تخت می‌باشند.

به عنوان نمونه‌ای دیگر، حالت $a3-6$ از قضیه ۳. ۲. ۲ را با پایه شبه متعامد یکه $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ با مولفه‌های ناصفر $g(e_1,e_2)=-g(e_2,e_2)=1$ و نیز $g(e_1,e_2)=-g(e_2,e_2)=1$ در نظر می‌گیریم. مولفه‌های ارتباط لوی–سیویتا و مولفه‌های ناصفر تانسور ریچی برای این حالت به ترتیب، به صورت زیر می‌باشند:

$$\Lambda_1=\begin{pmatrix}0&A&0&0\\A&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -F & 0 \\ 0 & A & 0 & F \end{pmatrix},$$

$$\varrho = \begin{pmatrix} 3A^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3A^2 \\ 0 & 0 & 3A^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین، این حالت ریچی‌تخت است اگر و فقط اگر $A = 0$ اما در صورت قضیه ۴. ۱ ([۱۲]) برای این رده $A \neq 0$ انگاشته شده است. بنابراین این حالت نمی‌تواند ریچی‌تخت باشد.

ملاحظه ۴. ۲- جبرهای لی قضیه ۳. ۲. ۱ همواره ریچی‌تخت هستند به جز حالت‌های $a3-6$ تا $a3-11$ در جدول (۲)، که تحت هیچ شرایطی ریچی‌تخت نخواهند گشت.

تذکر- در جدول‌های (۱) و (۲) همواره داریم $\varepsilon^2 = 1$.

جدول (۱): شرط اینشتین قضیه ۳-۱-۱

شرط	حالت
$A = B + 2\alpha = C + D = \lambda = 0$	$a1$
$A + B = C + 2\varepsilon\alpha = \beta = \lambda = 0$	$a2$
$B = C = \beta - \alpha = \lambda = \gamma = 0$	$c1$
$B = C = D = \alpha + \varepsilon A = \lambda - 2A^2 = \gamma - \varepsilon A = 0$	$c2$
$A = B = C = \beta - \varepsilon D = \lambda - 2D^2 = \gamma + \varepsilon D = 0$	$c3$
$B = C = D = \alpha - \varepsilon A = \beta + \varepsilon A = \lambda - 2A^2 = 0$	$c4$
$A + \varepsilon\gamma = 2B + \varepsilon\gamma = C + E = D = F = \lambda - \frac{3}{2}\gamma^2 = 0$	$c5$
$A + \varepsilon\beta = B + \frac{\varepsilon}{2}\beta = C = D - E = F = \lambda - \frac{3}{2}\beta^2 = 0$	$c6$
$2A + \varepsilon\alpha = 2B + \varepsilon\alpha = C = D - F = E = \lambda - \frac{3}{2}\alpha^2 = 0$	$c7$
$A = B = C + D = \beta - 1 = \lambda = 0$	$d1$
$A - E = B + C = D - C = F - E = \lambda - 3E^2 = 0$	$d2$
$A + \frac{\varepsilon}{2}\alpha - \varepsilon = B + \frac{\varepsilon}{2}\alpha + \varepsilon = C = D = \lambda - \frac{3}{2}\alpha^2 = 0$	$d4$
$C = D = \alpha + \varepsilon B = \delta - \varepsilon A = \lambda - A^2 - B^2 = 0$	$e2$
$A + D = B = C = E = F = \alpha + \varepsilon D = \lambda - 2D^2 = 0$	$e3$
$A = B + \varepsilon\alpha = C = D = \beta = \lambda - \alpha^2 = 0$	$e4$
$A = B = C + \varepsilon\delta = D + \varepsilon\gamma = \alpha - \delta = \beta + \gamma = \lambda + 2\delta^2 - 2\gamma^2 = 0$	$f1$
$A = B = C = D - \varepsilon\alpha = E + \varepsilon\alpha = F = \lambda + 2\alpha^2 = 0$	$f3$
$A = B = C + \varepsilon\alpha = D = B - \sqrt{2}\alpha = \lambda = 0$	$f4$
$A + \varepsilon\gamma = B + C + \varepsilon\gamma = D = \beta - \frac{1}{2}\gamma - \varepsilon C = \lambda - \frac{3}{2}\gamma^2 = 0$	$g1$
$A = B + C = D - \sqrt{2}\alpha = \lambda = 0$	$g2$

جدول (۲): شرط اینشتین جدول ۳-۲-۱

حالت	شرط
$\alpha 1$	$G = H = 2K(A+E) + D^2 + B^2 - 2A^2 - 2BD - 2E^2 = \lambda = 0$
$\alpha 2-1$	$\sqrt{2}B - C = \sqrt{2}CD - A^2 = EC + A^2 = F = G = \lambda = 0$
$\alpha 2-2$	$B - \sqrt{2}A = C = D = E = F = \lambda = 0$
$\alpha 2-3$	$A = D + 2\varepsilon C = F = G = \lambda = 0$
$\alpha 2-4$	$B - \sqrt{2}C = 2CD - \sqrt{2}A^2 = E = 2FC + A^2 = G = \lambda = 0$
$\alpha 2-5$	$A = D + 2\varepsilon C - 2\varepsilon B = F = G = \lambda = 0$
$\alpha 2-7$	$A - \sqrt{2}B = C = D = E = F = \lambda = 0$
$\alpha 2-9$	$4BF - A^2 + E^2 + C^2 - 2EC = \lambda = 0$
$\alpha 2-10$	$A + \varepsilon E = B = \lambda = 0$
$\alpha 2-12$	$A = 2ED + B^2 - 2D^2 = \lambda = 0$
$\alpha 3-1$	$A = B - C = D = F = G = H = \lambda = 0$
$\alpha 3-3$	$A = B = \sqrt{2}E - C + D = F = G = \lambda = 0$
$\alpha 3-4$	$A + 2C = B - \sqrt{10}C = D = E = F = G = \lambda = 0$
$\alpha 3-6$	$B + 2A = C = D = E = \lambda - 3A^2 = 0$
$\alpha 3-7$	$A + \varepsilon F = D + \varepsilon B = 2\varepsilon EF - 2BG + B^2 + 2FC = \lambda - \frac{3}{2}F^2 = 0$
$\alpha 3-8$	$C + 2A = F - B = GB^2 + D(AD - BE) = \lambda - 3A^2 = 0$
$\alpha 3-9$	$B - 2A = C = D = E = \lambda + 3A^2 = 0$
$\alpha 3-10$	$A + \varepsilon F = B + \varepsilon D = -2\varepsilon CF + D^2 - 2DG + 2EF = \lambda + \frac{3}{2}F^2 = 0$
$\alpha 3-11$	$B - 2A = C - 2A = E = 2G - F = \lambda + 3A^2 = 0$

نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت فراوان منیفلدهای اینشتین در ریاضی و فیزیک و عدم وجود یک طبقه بندی کلی از منیفد شبه ریمانی در بعد چهار، در این مقاله یک ردەبندی مترهای اینشتین چپ‌پایا با علامت (۲,۲)، روی گروه‌های لی چهاربعدی ارائه شده است. گروه‌های لی چهاربعدی مجهز به متر چپ‌پایا با علامت خنثی، پیش از این به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته و ردەبندی کاملی از آنها ارائه شده است. اکنون در این مقاله ساختار اینشتین این گروه‌ها را ارائه شده است. در ادامه برخی خواص هندسی این فضاها، مانند ریچی‌تخت بودن مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله محاسبات با طراحی یک پکیج نرم افزاری برای نرم افزار *Maple* انجام شده است.

فهرست منابع

[1] Bérard-Bérgery, L., “Homogeneous Riemannian spaces of dimension four”, Seminar A. Besse, Four-dimensional Riemannian geometry, 1985.

[2] Arias-Marco, T., and O. Kowalski, *Classification of 4-dimensional homogeneous D’Atri spaces*, Czechoslovak Math. J. **58** (2008), 203–239.

[3] Tricerri F., and L. Vanhecke, “Homogeneous structures on Riemannian manifolds,” London Math. Soc. Lect. Notes **83**, Cambridge Univ. Press, 1983.

[4] Calvaruso, G., *Homogeneous structures on three- dimensional Lorentzian manifolds*, J. Geom. Phys. **57** (2007), 1279–1291.

[5] G. Calvaruso and A. Zaeim, Conformally flat homogeneous pseudo-Riemannian four-manifolds, Tohoku Math. J. 66 (2014), 31–54.

[6] Cordero, L. A., and P. E. Parker, *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Mat. Appl. **17** (1997), 129–155.

[7] Komrakov Jnr., B., *Einstein-maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces*, Lobachevskii J. Math. **8** (2001), 33–165.

[8] G. Calvaruso and A. Zaeim, Four-dimensional Lorentzian Lie groups, *Differ. Geom.Appl.* **31**(4) (2013), 496–509.

[9] G. Calvaruso and A. Zaeim, Neutral metrics on four-dimensional Lie groups, *J. Lie Theory.* **25** (2015), 1023–1044.

[10] Arias-Marco, T., and O. Kowalski, *Classification of 4-dimensional homogeneous D’Atri spaces*, Czechoslovak Math. J. **58** (2008), 203–239.

[11] G. Calvaruso and A. Zaeim, Neutral metrics on four-dimensional Lie groups,*J. Lie Theory.* **25** (2015), 1023– 1044.

[12] A. Haji-Badali and R. Karami, Ricci solitons on four-dimensional neutral Lie groups, Journal of Lie Theory, **27** (2017), 943-967.