دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال چهارم، شماره شانزدهم، زمستان ۱۳۹۷
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نقطه ثابت مشترک در فضاهای $b-$ متریک کامل به روش کرک[1]

موسی آور[1]، خدیجه جاهدی[*2]، محمد جواد مهدی پور[3]

(۱ و ۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزد اسلامی، شیراز، ایران
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۳

چکیده

در این مقاله، مفهوم خودنگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار را برای فضای $b-$ متریک تعریف می‌کنیم و با الهام از روش کرک و همکاران، به معرفی شرایطی جدید و تعدیل‌یافته جهت وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد برای خانواده‌ای با تعداد زوج از خود نگاشت‌ها و دو خود نگاشت دیگر بر روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم. همچنین به تعمیم قضیه نقطه ثابت مشترک برای یک دنباله و یک خانواده با تعدادی زوج از خود نگاشت‌ها روی فضای $b-$ متریک کامل می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: فضای $b-$ متریک، نقطه ثابت مشترک، خودنگاشت‌های سازگار، خودنگاشت‌های به طور ضعیف سازگار.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mjahedi80@yahoo.com

1. Ciric

۱. تاریخچه و مقدمه

بورباکی[1][۱] و باختین[2] [۲] اولین کسانی بودند که ایده فضای $b-$ متریک را مطرح کردند. چرویک[3][۳] در سال ۱۹۹۸ با ضعیف‌تر کردن خاصیت نامساوی مثلثی در فضای متریک معمولی به معرفی یک فضای متریک تعمیم‌یافته پرداخت و آن را $b-$ متریک نامید.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه غیرتهی باشد و $b \geq 1$ یک عدد حقیقی باشد، تابع $d: X \times X \to [0,\infty)$ را یک $b-$ متریک گوییم اگر برای هر $x,y,z \in X$ داشته باشیم

۱) $x = y$ اگر و فقط اگر $d(x,y) = 0$.

۲) $d(x,y) = d(y,x)$.

۳) $d(x,y) \leq b[d(x,z) + d(z,y)]$.

زوج (X,d) را یک فضای $b-$ متریک روی یک مجموعه غیرتهی X گوییم.

در حالت خاص $b = 1$، فضای $b-$ متریک، همان فضای متریک معمولی است.

مثال ۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک معمولی و $p > 1$ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت (X,d^p) یک $b-$ متریک با ضریب $b = 2^{p-1}$ می‌باشد.

$$d^p(x,y) = (d(x,y))^p.$$

اگر در حالت خاص، $p = 2$ برای متر استاندارد روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، واضح است که برای هر $x,y \in \mathbb{R}$،

$$d^2(x,y) = (d(x,y))^2 = (x-y)^2$$

یک $b-$ متریک روی $\mathbb{R}$، با $b = 2$ است ولی یک متریک معمولی روی $\mathbb{R}$ نیست.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای b-متریک باشد. در این صورت دنباله $\{x_n\}$ در X:

۱. همگرا است اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x_n,x) \to 0$ وقتی $n \to \infty$ و در این حالت می‌نویسیم $lim_{n\to\infty} x_n = x$.

۲. کوشی است اگر $d(x_n,x_m) \to 0$ وقتی $n,m \to \infty$.

۳. فضای b-متریک (X,d) کامل است اگر هر دنباله کوشی در X، همگرا باشد.

۴. خودنگاشت $T: X \to X$ را پیوسته گوییم، هرگاه برای دنباله $\{x_n\}$ از X که، $lim_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$، داشته باشیم $lim_{n\to\infty} d(Tx_n,Tx) = 0$.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم (X,d) یک فضای b-متریک و f و g دو خود نگاشت بر X باشند آن‌گاه:

۱. زوج $\{f,g\}$ را سازگار گوییم اگر $lim_{n\to\infty} d(fgx_n, gfx_n) = 0$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به‌طوریکه برای یک $t \in X$، $lim_{n\to\infty} fx_n = lim_{n\to\infty} gx_n = t$.

۲. زوج $\{f,g\}$ را به طور ضعیف سازگار گوییم اگر در نقاط انطباق خود با یکدیگر جابه‌جا شوند. یعنی اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوریکه $fx = gx$ آنگاه داریم:

$$gfx = fgx.$$

در فضای $b-$ متریک (X,d)، هر دنباله همگرا دارای حد منحصر بفرد بوده و کوشی نیز می‌باشد اما هر b-متریک لزوماً پیوسته نیست. برای دیدن مثال به [۴] مراجعه شود.

بسیاری از محققین قضایای نقطه ثابت و نقطه‌ی ثابت مشترک را برای عملگرهای تک مقداری و چند مقداری روی فضای $b-$ متریک مورد بررسی قرار داده‌اند. اطلاعات بیشتر در [۱۴-۵] است. در این مقاله با الهام از روش کرک و همکاران [۱۴] به اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک برای یک خانواده به تعداد زوج دلخواه و دو خود نگاشت دیگر در فضای متریک، بدون نیاز به پیوستگی $b-$ متریک می‌پردازیم. در نهایت به تعمیم مطلب فوق برای یک دنباله دلخواه به همراه یک دسته زوج از خود نگاشت‌ها خواهیم پرداخت. با توجه به عدم پیوستگی $b-$ متریک، نیاز به لم‌های زیر در مورد

1. *Bourbaki*
2. *Bakhtin*
3. *Czerwik*

دنباله های b – همگرا داریم.

لم ۵.۱. ([۲]) فرض کنیم (X,d) یک فضای b – متریک با $b \geq ۱$ باشد. فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x و y، b– همگرا باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b^۲}\, d(x,y) &\leq \lim_{n\to\infty} inf\, d(x_n,y_n)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,y_n)\\ &\leq b^۲ d(x,y)\end{aligned}$$

در حالت خاص اگر $x=y$، آن‌گاه داریم $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\circ$. علاوه بر این برای هر $z\epsilon X$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{b}\, d(x,z) &\leq \lim_{n\to\infty} inf\, d(x_n,z)\\ &\leq \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,z)\\ &\leq b\, d(x,z).\end{aligned}$$

لم ۶.۱. فرض (X,d) یک فضای b – متریک باشد. اگر وجود داشته باشند دو دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به طوری که $lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\circ$، هرگاه $\{x_n\}$ یک دنباله در X باشد به طوری که $lim_{n\to\infty} x_n = t$ برای بعضی $t\epsilon X$، آن‌گاه $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

اثبات: با توجه به نامساوی مثلثی در فضای b – متریک داریم:

$$d(y_n,t) \leq b\,[d(y_n,x_n)+d(x_n,t)].$$

حال با در نظر گرفتن حد بالایی وقتی که $n\to\infty$ در نامساوی فوق داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} sup\, d(y_n,t) &\leq b\left[\lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,y_n) + \lim_{n\to\infty} sup\, d(x_n,t)\right]\\ &= \circ .\end{aligned}$$

بنابراین $lim_{n\to\infty} y_n = t$.

۲. نتایج اصلی

همانگونه که مطرح شد در اکثر قضایای نقطه ثابت مشترک، پیوستگی متر داده شده از ارکان حل مساله بود، در این قسمت بدون نیاز به پیوستگی b – متریک به اثبات وجود نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد برای خود نگاشت‌های سازگار و به طور ضعیف سازگار که در شرایط انقباض تعمیم‌یافته با قدری تعدیل در روش کرک و همکاران در فضای b – متریک با $b \geq 1$ صدق می‌کنند، می‌پردازیم.

در ابتدا شرایط قضیه نقطه‌ی ثابت مشترک بر روی فضای b – متریک (X,d) با ضریب $b > ۱$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. بدین منظور فرض می‌کنیم Φ گردایه‌ای از نگاشت‌های $\varphi:[\circ,\infty)\to[\circ,\infty)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

۱. φ روی $[\circ,\infty)$ پیوسته است.

۲. به ازای هر $t>\circ$، $\varphi(t)<t$ و $\varphi(\circ)=\circ$.

همانگونه که دیده می‌شود، بدون نیاز به فرض غیرنزولی بودن φ در روش کرک و همکاران، مساله را روی فضای b – متریک کامل اثبات خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $P_{۲n_\circ}$ و ... و $P_۲$ و $P_۱$ و $Q_۱$ و $Q_\circ$ خودنگاشت‌هایی روی فضای b–متریک کامل (X,d) با ضریب $b>۱$ باشند به طوری که شرایط زیر برقرار باشند.

۱.

$$\begin{aligned}Q_۱(X) &\subseteq P_۲P_۴\ldots P_{۲n_\circ}(X) \text{ و } Q_\circ(X)\\ &\subseteq P_۱P_۳\ldots P_{۲n_\circ -۱}(X);\end{aligned}$$

۲.

$$\begin{aligned}&P_۲(P_۴\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_۴\ldots P_{۲n_\circ})P_۲;\\ &P_۲P_۴(P_۶\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_۶\ldots P_{۲n_\circ})P_۲P_۴;\\ &\vdots\\ &P_۲P_۴\ldots P_{۲n_\circ -۲}(P_{۲n_\circ})\\ &\qquad = (P_{۲n_\circ})P_۲P_۴\ldots P_{۲n_\circ -۲};\\ &Q_\circ(P_۴\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_۴\ldots P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &Q_\circ(P_۶\ldots P_{۲n_\circ}) = (P_۶\ldots P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &\vdots\\ &Q_\circ(P_{۲n_\circ}) = (P_{۲n_\circ})Q_\circ;\\ &P_۱(P_۳\ldots P_{۲n_\circ -۱}) = (P_۳\ldots P_{۲n_\circ -۱})P_۱;\end{aligned}$$

$$P_1P_3(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})P_1P_3;$$
$$\vdots$$
$$P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})P_1P_3 \dots P_{2n_0-3};$$
$$Q_1(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})Q_1;$$
$$Q_1(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})Q_1;$$
$$\vdots$$
$$Q_1(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})Q_1;$$

۳. $P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ یا Q_0 پیوسته باشند.

۴. زوج $(Q_0, P_2P_4 \dots P_{2n_0})$ سازگار و زوج $(Q_1, P_1 \dots P_{2n_0-1})$ به طور ضعیف سازگار باشد.

۵. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای به ازای هر $u, v \in X$،

$$d(Q_0 u, Q_1 v) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, Q_0 u)), \varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, Q_1 v)), \varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v)), \varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, Q_0 u) + d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, Q_1 v)])\}.$$

در این صورت $Q_0, Q_1, P_1, P_2, \dots, P_{2n_0}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

اثبات: فرض کنیم $x_0 \in X$. بنابر شرط (۱) وجود دارند $x_1, x_2 \in X$ به طوری که

$$Q_0(x_0) = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}\left(x_1\right) = y_0$$

و

$$Q_1(x_1) = P_2P_4 \dots P_{2n_0}(x_2) = y_1 ..$$

برای هر $n \in N$، دنباله $\{y_n\}$ را به صورت زیر می‌سازیم.

$$Q_0(x_{2n}) = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}(x_{2n+1}) = y_{2n}$$

و

$$Q_1(x_{2n+1}) = P_2P_4 \dots P_{2n_0}(x_{2n+2}) = y_{2n+1}.$$

حال نشان می‌دهیم که $\{y_n\}$ دنباله کوشی است.

در شرط (۵) قرار می‌دهیم،

$$u = x_{2n}, v = x_{2n+1},$$

از این پس برای راحتی از نماد زیر استفاده می‌کنیم

$P'_1 = P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ و $P'_2 = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1}$

بنابراین

$$d(Q_0 x_{2n}, Q_1 x_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P'_1 x_{2n}, Q_0 x_{2n})), \varphi(d(P'_2 x_{2n+1}, Q_1 x_{2n+1})), \varphi(d(P'_1 x_{2n}, P'_2 x_{2n+1})), \varphi(\frac{1}{2}[d(P'_2 x_{2n+1}, Q_0 x_{2n}) + d(P'_1 x_{2n}, Q_1 x_{2n+1})])\}.$$

بنابراین

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(\frac{1}{2}[d(y_{2n}, y_{2n}) + d(y_{2n-1}, y_{2n+1})])\}$$

$$= \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(\frac{1}{2}[d y_{2n-1}, y_{2n+1}))\}$$

$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} \max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(\frac{b}{2}[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})])\}$$

$$\leq \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(y_{2n-1}, y_{2n})), \varphi(d(y_{2n}, y_{2n+1})), \varphi(bmax[d(y_{2n-1}, y_{2n}),$$

$$d(y_{2n}, y_{2n+1})]]\} \quad (1)$$
$$< \frac{1}{b^{2n_0+1}} max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\}$$

اگر برای بعضی از nها،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) > d(y_{2n-1}, y_{2n})$$

آن‌گاه از نابرابری (۱) نتیجه می‌شود
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d(y_{2n}, y_{2n+1}) \; ,$$

بنابراین نتیجه می‌شود،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) < d(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

و این تناقض است. لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq d(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

از این رو طبق نامساوی (۱) داریم،
$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n-1}, y_{2n}) \quad (2)$$

و به طور مشابه برای هر $n \in \mathbb{N}$،
$$d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \quad (3)$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم
$$d(y_n, y_{n-1}) < \frac{1}{b^{2n_0+1}} d(y_{n-1}, y_{n-2}) \; .$$

قرار می‌دهیم $\lambda = \frac{1}{b^{2n_0+1}}$ و $n \geq 2$، بنابراین برای هر $n \geq 2$ رابطه زیر به دست می‌آید.
$$d(y_n, y_{n-1}) < \lambda\, d(y_{n-1}, y_{n-2}) < \lambda^2 d(y_{n-2}, y_{n-3}) < \lambda^{n-1} d(y_1, y_0).$$

به عبارت دیگر برای هر $n \in \mathbb{N}$،
$$d(y_n, y_{n-1}) < \lambda^{n-1} d(y_1, y_0). \quad (4)$$

پس برای هر $n > m,\ m, n \in \mathbb{N}$،
$$d(y_n, y_m) \leq bd\left(y_m, y_{m+1}\right) + b^2 d\left(y_{m+1}, y_{m+2}\right) + \cdots + b^{n-m-1} d\left(y_{n-1}, y_n\right) + \cdots$$

حال با استفاده از (۴) و از آن‌جا که $b\lambda < 1$،
$$d(y_n, y_m) \leq (b\lambda^m + b^2\lambda^{m+1} + \cdots + b^{n-m-1}\lambda^{n-1} + \cdots) d(y_1, y_0) \leq b\lambda^m[1 + b\lambda + (b\lambda)^2 + \cdots] d(y_1, y_0) = \frac{b\lambda^m}{1 - b\lambda} d(y_1, y_0).$$

بنابراین،
$$\lim_{m\, و\, n\to\infty} d(y_n, y_m) = 0 \quad .$$

در نتیجه $\{y_n\}$ یک دنباله b– کوشی در فضای b– متریک کامل است. پس $z \epsilon X$ وجود دارد به طوری که،
$$\lim_{n\to\infty} y_n = z.$$

در حقیقت
$$\lim_{n\to\infty} Q_0 x_{2n} = \lim_{n\to\infty} Q_1 x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_2 x_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} P'_1 x_{2n} = z \quad (5)$$

حال نشان می‌دهیم z یک نقطه ثابت مشترک نگاشت‌های Q_1 و Q_0 و P_1 و P_2 و ... و P_{2n_0} است. بدین جهت، حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: فرض کنیم $P'_1 = P_2 P_4 \ldots P_{2n_0}$ پیوسته است. پس،
$$\lim_{n\to\infty} P'_1 P'_1 x_{2n} = P'_1 z$$

و

$$\lim_{n\to\infty} P'_1\, Q_0\, x_{2n} = P'_1 z\,.$$

از این‌که $\{Q_0\,,\,P'_1\}$ سازگارند، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty} d(P'_1 Q_0 x_{2n}\ \ , Q_0 P'_1\, x_{2n}) = 0\,.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱ داریم

$$\lim_{n\to\infty} Q_0 P'_1\, x_{2n} = P'_1 z\,.$$

الف: فرض کنیم $d(P'_1 z, z) \neq 0$. اگر در شرط (۵) قضیه قرار دهیم $u = P'_1 x_{2n}$ و $v = x_{2n+1}$،

$$\begin{aligned}
&d(Q_0 P'_1 x_{2n}, Q_1 x_{2n+1})\\
&\le \frac{1}{b^{2n_0+2}}\ max\{\varphi(d(P'_1 P'_1 x_{2n}, Q_0 P'_1\, x_{2n})),\\
&\varphi(d(P'_2 x_{2n+1}, Q_1 x_{2n+1})), \varphi(d(P'_1 P'_1 x_{2n}, P'_2 x_{2n+1})),\\
&\varphi(\frac{1}{2}[d(P'_2 x_{2n+1}, Q_0 P'_1\, x_{2n})\\
&+ d(P'_1 P'_1 x_{2n}, Q_1 x_{2n+1})])\}\,.
\end{aligned}$$

با استفاده از پیوستگی و خواص φ و نیز لم ۵.۱ در نامساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2} d(P'_1 z, z)\\
&\le \lim_{n\to\infty} sup\, d(Q_0 P'_1\, x_{2n}, Q_1 x_{2n+1})\\
&\le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\ \varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_1 P'_1 x_{2n}, Q_0 P'_1 x_{2n})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_2 x_{2n+1}, Q_1 x_{2n+1})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_1 P'_1 x_{2n}, P'_2 x_{2n+1})),\\
&\varphi(\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_2 x_{2n+1}, Q_0 P'_1 x_{2n})\\
&+ \lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_1 P'_1 x_{2n}, Q_1 x_{2n+1})])\}\\
&\le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(b^2 d(P'_1 z, P'_1 z)), \varphi(b^2 d(z,z)),\\
&\varphi(b^2 d(P'_1 z, z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z, P'_1 z)\\
&\qquad + d(P'_1 z, z)])\}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2}\ d(P'_1 z, z)\\
&\le \frac{1}{b^{2n_0+2}} \varphi(b^2 d(P'_1 z, z))\\
&< \frac{1}{b^{2n_0}} d(P'_1 z, z).
\end{aligned}$$

از این رو

$$d(P'_1 z, z) \le \frac{1}{b^{2n_0-2}}\ d(P'_1 z, z).$$

در نتیجه $d(P'_1 z, z) < d(P'_1 z, z)$ و این تناقض است. پس

$$d(P'_1 z, z) = 0.$$

بنابراین $P'_1 z = z$.

ب: فرض کنیم $d(Q_0 z, z) \neq 0$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = z$ و $v = x_{2n+1}$. با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2} d(Q_0 z, z)\\
&\le \lim_{n\to\infty} sup\ \ d(Q_0 z, Q_1 x_{2n+1})\\
&\le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\ \varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_1 z, Q_0 z)),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_2 x_{2n+1}, Q_1 x_{2n+1})),\\
&\varphi(\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_1 z, P'_2 x_{2n+1})),\\
&\varphi(\frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} sup\, d(P'_2 x_{2n+1}, Q_0 z)\\
&+ lim_{n\to\infty}\, sup\, d(P'_1 z, Q_1 x_{2n+1})])\}.
\end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت (۲) در تعریف φ داریم،

$$\frac{1}{b^2}d(Q_\circ z,z)$$
$$\leq \frac{1}{b^{2n_\circ+2}}max\{\varphi(b^2d(z,Q_\circ z)),$$
$$\varphi(b^2d(z,z)),\varphi(b^2d(z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,Q_\circ z)+d(z,z)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_\circ+2}}(b^2d(z,Q_\circ z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_\circ}}d(z,Q_\circ z).$$

در نتیجه با توجه به آن‌که $b>1$،

$$d(Q_\circ z,z)<\frac{1}{b^{2n_\circ-2}}d(z,Q_\circ z)$$

از این‌رو $d(Q_\circ z,z)<d(z,Q_\circ z)$ و این تناقض است. پس

$$d(Q_\circ z,z)=\circ.$$

به عبارت دیگر $Q_\circ z=z$.

ج: فرض کنیم $d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)\neq\circ$. در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=P_4\dots P_{2n_\circ}\,z$ و $v=x_{2n+1}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم:

$$\frac{1}{b^2}d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)$$
$$\leq\frac{1}{b^{2n_\circ+2}}max\{\varphi(b^2d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,P_4\dots P_{2n_\circ}\,z)),$$
$$\varphi(b^2d(z,z)),\varphi(b^2d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,P_4\dots P_{2n_\circ}\,z)$$
$$+d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_\circ+2}}(b^2\,d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_\circ}}d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z),$$

در نتیجه

$$d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)<d(P_4\dots P_{2n_\circ}\,z,z)$$

و این تناقض است. بنابراین $P_4\dots P_{2n_\circ}\,z=z$. در این صورت

$$P_2z=P_2P_4\dots P_{2n_\circ}\,z=z$$

و

$$P_2P_4\dots P_{2n_\circ}\,z=P_2z.$$

با ادامه این مراحل داریم

$$Q_\circ z=P_2z=P_4z=\cdots=P_{2n_\circ}\,z=z.$$

د: چون $Q_\circ(X)\subseteq P_2'(X)$، عنصر $v\in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$z=Q_\circ z=P_2'v\,.$$

با فرض $d(z,Q_1v)\neq\circ$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u=x_{2n}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2}d(z,Q_1v)$$
$$\leq\frac{1}{b^{2n_\circ+2}}max\{\varphi(b^2d(z,z)),$$
$$\varphi(b^2d(z,Q_1v))\,,\varphi(b^2d(z,z)),$$
$$\varphi(\frac{b^2}{2}[d(z,z)+d(z,Q_1v)])\}$$
$$<\frac{1}{b^{2n_\circ+2}}\,(b^2d(z,Q_1v))$$
$$=\frac{1}{b^{2n_\circ}}\,d(z,Q_1v).$$

که نتیجه می‌شود $Q_1v=z$. بنابراین

$$P_1P_3\dots P_{2n_\circ-1}v=Q_1v=z.$$

از آن‌جا که $(Q_۱, P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱})$ به طور ضعیف سازگار است، داریم
$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}Q_۱v = Q_۱P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}v.$$
بنابراین
$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = Q_۱z.$$

ر: با فرض $d(Q_۱z, z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = x_{۲n}$ و $v = z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{۱}{b^۲}d(z, Q_۱z) \le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\varphi(b^۲d(z,z)), \varphi(b^۲d(Q_۱z, Q_۱z)), \varphi(b^۲d(z, Q_۱z)), \varphi(\frac{b^۲}{۲}[d(Q_۱z, z) + d(z, Q_۱z)])\} < \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}(b^۲d(z, Q_۱z)) = \frac{۱}{b^{۲n_۰}}d(z, Q_۱z).$$

که نتیجه می‌شود $Q_۱z = z$ و همچنین
$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = Q_۱z = z.$$

ز: با فرض $d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = x_{۲n}$ و $v = P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{۱}{b^۲}d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z) \le \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}} max\{\varphi(b^۲d(z,z)), \varphi(b^۲d(P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)), \varphi(b^۲d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)), \varphi(\frac{b^۲}{۲}[d(P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z, z) + d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)])\} < \frac{۱}{b^{۲n_۰+۲}}(b^۲d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z)) = \frac{۱}{b^{۲n_۰}}d(z, P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z).$$

از این‌رو $P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = z$. بنابراین
$$P_۱P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = P_۱z,$$
و
$$P_۱z = P_۳ \dots P_{۲n_۰-۱}z = z .$$

پس $P_۱z = z$. با ادامه این روش خواهیم داشت
$$Q_۱z = P_۱z = P_۳z = \dots = P_{۲n_۰-۱}z = z.$$

از این‌رو با توجه به قسمت (ج) ثابت کرده‌ایم
$$Q_۰z = Q_۱z = P_۱z = P_۲z = \dots = P_{۲n_۰-۱}z = P_{۲n_۰}z = z.$$

به عبارت دیگر z یک نقطه ثابت مشترک خود نگاشت‌های $Q_۰, Q_۱, P_۱, P_۲, \dots, P_{۲n_۰}$ است.

حالت دوم: فرض کنیم $Q_۰$ پیوسته باشد. از طرفی طبق
$$lim_{n\to\infty} P'_۱x_{۲n} = lim_{n\to\infty} Q_۰x_{۲n} = z, \quad (۵)$$

نتیجه می‌شود که
$$\lim_{n\to\infty} Q_۰P'_۱x_{۲n} = Q_۰z$$
و
$$\lim_{n\to\infty} Q_۰Q_۰x_{۲n} = Q_۰z.$$
از آن‌جایی که $\{Q_۰, P'_۱\}$ سازگار است، داریم
$$\lim_{n\to\infty}(P'_۱Q_۰x_{۲n}, Q_۰P'_۱x_{۲n}) = ۰.$$

بنابراین با استفاده از لم ۶.۱،
$$\lim_{n\to\infty} P'_۱Q_۰x_{۲n} = Q_۰z.$$

س: با فرض $d(Q_۰z, z) \neq ۰$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = Q_۰x_{۲n}$ و $v = x_{۲n+۱}$ و با

استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2} d(Q_0 z, z) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(b^2 d(Q_0 z, Q_0 z)), \varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(b^2 d(Q_0 z, z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z, Q_0 z) + d(Q_0 z, z)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}} (b^2 d(Q_0 z, z)) = \frac{1}{b^{2n_0}} d(Q_0 z, z).$$

در نتیجه $d(Q_0 z, z) = 0$. پس $Q_0 z = z$. اینک مشابه مراحل (د)، (ر)، (ز) و با ادامه مرحله (ز) در حالت اول داریم:

$$Q_1 Z = P_1 z = P_3 z = \cdots = P_{2n_0-1} z = z.$$

ش: با توجه به شرط (۱) قضیه، چون $Q_1(X) \subseteq P_2 P_4 \dots P_{2n_0}(X)$، $z \in X$ وجود دارد به طوری که

$$Q_1 z \in Q_1(X) \subseteq P_2 P_4 \dots P_{2n_0}(X).$$

بنابراین $w \in X$ وجود دارد به طوری که

$$Q_1 z = P_2 P_4 \dots P_{2n_0} w = z.$$

با فرض $d(Q_0 w, z) \neq 0$ در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = w$ و $v = x_{2n+1}$ و با استفاده از لم ۵.۱ داریم

$$\frac{1}{b^2} d(.Q_0 w, z) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(b^2 d(z, Q_0 w)), \varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(b^2 d(z,z)), \varphi(\frac{b^2}{2}[d(z, Q_0 w) + d(z,z)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}} (b^2 d(Q_0 w, z)) = \frac{1}{b^{2n_0}} d(Q_0 w, z).$$

در نتیجه $d(Q_0 w, z) = 0$. پس $Q_0 w = z$. از این‌رو داریم

$$Q_0 w = z = P_2 P_4 \dots P_{2n_0} w.$$

از آن‌جا که $(Q_0, P_2 P_4 \dots P_{2n_0})$ سازگار است، به طور ضعیف سازگار نیز است. بنابراین

$$Q_0 z = P_2 P_4 \dots P_{2n_0} z = z.$$

همانند مرحله (ج) می‌توان ثابت کرد که

$$P_2 z = P_4 z = \cdots = P_{2n_0} z = Q_0 z = z.$$

پس z، یک نقطه‌ی ثابت مشترک نگاشت‌های $Q_0, Q_1, P_1, P_2, \dots, P_{2n_0}$ است.

اثبات یکتایی: فرض کنیم که z' یک نقطه ثابت مشترک دیگر از نگاشت‌های $Q_0, Q_1, P_1, P_2, \dots, P_{2n_0}$ باشد، در شرط (۵) قضیه قرار می‌دهیم $u = z$ و $v = z'$ در این صورت:

$$d(Q_0 z, Q_1 z') \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P'_1 z, Q_0 z)), \varphi(d(P'_2 z', Q_1 z')), \varphi(d(P'_1 z, P'_2 z')), \varphi(\frac{1}{2}[d(P'_2 z', Q_0 z) + d(P'_1 z, Q_1 z')])\}.$$

بنابراین

$$d(z, z') \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(z,z)), \varphi(d(z', z')), \varphi(d(z, z')), \varphi(\frac{1}{2}[d(z', z) + d(z, z')])\} = \frac{1}{b^{2n_0+2}} \varphi(d(z, z')) < \frac{1}{b^{2n_0+2}} d(z, z').$$

در نتیجه $d(z, z') < d(z, z')$ و این تناقض است.

بنابراین $d(z,z')=\circ$ در نتیجه $z=z'$. پس z یک نقطه ثابت منحصر به فرد از خودنگاشت‌های $Q_{\circ},Q_{۱},P_{۱},P_{۲},\dots,P_{۲n_{\circ}}$ است.

برای $n_{\circ}\in\mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathcal{B}_b$ خانواده توابع کراندار مانند β از $[\circ,\infty)$ به $[\circ,\frac{۱}{b^{۲n_{\circ}+۲}})$ باشد. با استفاده از $\mathcal{B}_b$ می‌توان به تعمیم دیگری از شرایط انقباض برای اثبات وجود نقطه‌ی ثابت مشترک منحصربفرد برای یک خانواده به تعداد زوج و دو خود نگاشت دیگر در فضای b–متریک کامل، بدون نیاز به پیوستگی b–متریک با $b>1$ می‌پردازیم.

واضح است که $\mathcal{B}_b\neq\emptyset$ کافی است تابع $\beta(t)=\frac{۱}{b^{۲n_{\circ}+۲}}e^{-t}$ برای $t>\circ$ و برای $t=\circ$، $\beta(t)\in[\circ,\frac{۱}{b^{۲n_{\circ}+۲}})$ در نظر گیریم.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_{\circ}\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$d(Q_{\circ}u,Q_{۱}v)\le\beta(d(Q_{\circ}u,Q_{۱}v))max\{d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{\circ}u),\ d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{۱}v),\ d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v),\ \frac{۱}{۲}[d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{\circ}u)+d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{۱}v)]\}.$$

در این صورت $Q_{\circ},Q_{۱},P_{۱},P_{۲},\dots,P_{۲n_{\circ}}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: با توجه به خاصیت $\beta(t)<\frac{۱}{b^{۲n_{\circ}+۲}}$ مراحل اثبات به نحو مناسب مشابه اثبات قضیه ۱.۲ می‌باشد.

در زیر نشان می‌دهیم فرض $b>1$ در فضای b–متریک، کمک می‌کند تا بدون وجود خانواده ϕ و تبدیل نامساوی به صورت نامساوی اکید به نتیجه‌ای مشابه قضیه ۱.۲ برسیم.

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $u,v\in X$ و هر $n_{\circ}\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$d(Q_{\circ}u,Q_{۱}v)<\frac{۱}{b^{۲n_{\circ}+۲}}max\{d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{\circ}u),\ d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{۱}v),\ d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v),\ \frac{۱}{۲}[d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{\circ}u)+d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{۱}v)]\}.$$

در این صورت $Q_{\circ},Q_{۱},P_{۱},P_{۲},\dots,P_{۲n_{\circ}}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم شرایط (۱) تا (۴) قضیه ۱.۲ برقرار باشد و برای هر $\circ<t<۱$ و هر $u,v\in X$ و هر $n_{\circ}\in\mathbb{N}$ و داشته باشیم

$$d(Q_{\circ}u,Q_{۱}v)<\frac{t}{b^{۲n_{\circ}+۲}}max\{d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{\circ}u),\ d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{۱}v),\ d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v),\ \frac{۱}{۲}[d(P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}v,Q_{\circ}u)+d(P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}u,Q_{۱}v)]\}.$$

در این صورت $Q_{\circ},Q_{۱},P_{۱},P_{۲},\dots,P_{۲n_{\circ}}$ یک نقطه‌ی ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

قضیه ۵.۲. فرض کنیم (X,d) یک فضای b–متریک کامل با $b>1$ بوده و J یک مجموعه اندیس‌گذاری دلخواه باشد. اگر $\{T_{\alpha}\}_{\alpha\in J}$ و $\{P_i\}_{i=۱}^{۲n_{\circ}}$ دو خانواده از خودنگاشت‌ها روی X باشند، که در شرایط زیر صدق کنند:

۱. برای هر $\alpha\in J$، $T_{\alpha}(X)\subseteq P_{۲}P_{۴}\dots P_{۲n_{\circ}}(X)$.

۲. $\beta\in J$ وجود داشته باشد به طوری که $T_{\beta}(X)\subseteq P_{۱}P_{۳}\dots P_{۲n_{\circ}-۱}(X)$.

۳. روابط زیر برقرار باشند:

$P_2(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})P_2;$
$P_2P_4(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})P_2P_4;$
$\vdots$
$P_2P_4 \dots P_{2n_0-2}\left(P_{2n_0}\right)$
$= (P_{2n_0})P_2P_4 \dots P_{2n_0-2};$
$T_\beta(P_4 \dots P_{2n_0}) = (P_4 \dots P_{2n_0})T_\beta;$
$T_\beta(P_6 \dots P_{2n_0}) = (P_6 \dots P_{2n_0})T_\beta;$
$\vdots$
$T_\beta P_{2n_0} = P_{2n_0} T_\beta;$
$P_1(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})P_1;$
$P_1P_3(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})P_1P_3;$
$\vdots$
$P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}\left(P_{2n_0-1}\right)$
$= (P_{2n_0-1})P_1P_3 \dots P_{2n_0-3}$
$T_\alpha(P_3 \dots P_{2n_0-1}) = (P_3 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$
$T_\alpha(P_5 \dots P_{2n_0-1}) = (P_5 \dots P_{2n_0-1})T_\alpha;$
$\vdots$
$T_\alpha(P_{2n_0-1}) = (P_{2n_0-1})T_\alpha.$

۴. $P_2P_4 \dots P_{2n_0}$ یا T_β پیوسته باشند.

۵. زوج $(T_\beta, P_2 \dots P_{2n_0})$ سازگار و زوج‌های $(T_\alpha, P_1 \dots P_{2n_0-1})$ برای هر $\alpha \in j$، به طور ضعیف سازگار باشد.

۶. $\varphi \in \phi$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که به ازای $u, v \in X$ و هر $n_0 \in \mathbb{N}$

$$d\left(T_\beta u, T_\alpha v\right) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\beta u)), \varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\alpha v)), \varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v)), \varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} v, T_\beta u) + d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} u, T_\alpha v)])\}.$$

در این صورت P_iها برای هر $i = 1, \dots, 2n_0$ و T_αها برای هر $\alpha \in J$، یک نقطه ثابت مشترک منحصر به فرد در X دارند.

اثبات: فرض کنید T_{α_0} یک عنصر ثابت در $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ باشد. در قضیه ۱.۲ قرار می‌دهیم برای یک $\beta \in J$ با شرط (۲) قضیه $Q_0 = T_\beta$ و $Q_1 = T_{\alpha_0}$.

آن‌گاه نتیجه می‌گیریم که یک $z \in X$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$T_\beta z = T_{\alpha_0} z = P_2P_4 \dots P_{2n_0} z = P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z = z.$$

فرض کنیم $\alpha \in J$ دلخواه باشد. در این صورت بنا به شرط (۶) قضیه داریم

$$d\left(T_\beta z, T_\alpha z\right) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\beta z)), \varphi(d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\alpha z)), \varphi(d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z)), \varphi(\frac{1}{2}[d(P_1P_3 \dots P_{2n_0-1} z, T_\beta z) + d(P_2P_4 \dots P_{2n_0} z, T_\alpha z)])\}.$$

بنابراین

$$d(z, T_\alpha z) \le \frac{1}{b^{2n_0+2}} max\{\varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(d(z, T_\alpha z)), \varphi\left(d(z,z)\right), \varphi(\frac{1}{2}[d(z,z) + d(z, T_\alpha z)])\} < \frac{1}{b^{2n_0+2}} d(z, T_\alpha z).$$

بنابراین

$$d(z, T_\alpha z) < d(z, T_\alpha z)$$

و این تناقض است. پس $d(z, T_\alpha z) = 0$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in J$، $T_\alpha z = z$. با توجه به شرط (۶) قضیه، P_i ها و T_α ها یک نقطه ثابت مشترک منحصر بفرد در X دارند.

فهرست منابع

[1] Bourbaki, N. Topologic Generale; Herman: Paris, France, (1974).

[2] Bakhtin, I. A., The contraction mapping principle in almost metric spaces, Funct. Anal. 30, (1989), 26–37.

[3] Czerwik, S., Nonlinear set-valued contraction mappings in b−metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46(2), (1998), 263–276.

[4] Hussain, N. and Shah, M. H. KKM mappings in cone b−metric spaces, *Comput. Math. Appl.*, 62, (2011), 1677–1684.

[5] Aghajani, A., Abbas, M. and Roshan, J. R., Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces, *Mathematica Slovaca*, 64(4),(2014), 941–960.

[6] Akkouchi, M., Common fixed point theorems for two selfmappings of a b-metric space under an implicit relation, *Hacettepe University Bulletin of Natural Sciences and Engineering Series B: Mathematics and Statistics,* 40(6), (2011), 805-810.

[7] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., and Mitrović, S., A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications,* (2012): 88: 2012.

[8] Aydi, H., Bota, M., Karapmar, E., Moradi, S., A common fixed point for weak ∅-contractions on b-metric spaces, *Fixed Point Theory,* 13(2), (2012), 337-346.

[9] Boriceanu, M., Strict fixed point theorems for multivalued operators in b−metric spaces, *International Journal of Modern Mathematics*, 4(3), (2009), 285–301.

[10] Boriceanu, M., Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b−metrics, *Studia Univ. "Babes–Bolyai", Mathematica*, Volume LIV, 3, (2009).

[11] Boriceanu, M., Bota, M. and Petrusel, A., Multivalued fractals in b−metric spaces, *Cent. Eur. J. Math*, 8 (2), (2010), 367-377.

[12] Czerwik, S, Dlutek, K. Singh, S. L., Round-off stability of iteration procedures for set-valued operators in b−metric Spaces, *J Nature Phys Sci*., 11, (2007), 87–94.

[13] Hussain, N. Dori´c, D. Kadelburg, Z. and Radenovi´c, S. Suzuki-type fixed point results in metric type spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, (2012).

[14] Ciric, L., Razani, A. Radenovic, S. Ume, J. S., Common fixed point theorems for families of weakly compatible maps, *Comput. Math. Appl*., 55, (2008), 2533-2543.