دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

الگویابی در تحلیل پوششی داده‌ها با رویکرد کارایی ارزش

نسیم نصرآبادی[۱*]

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۱/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها به طور ذاتی بدون ارجحیت هستند، به این مفهوم که در این مدل‌ها اهمیت کلیه ورودی‌ها و خروجی‌ها و نیز اهمیت همه واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی یکسان در نظر گرفته می‌شود. این ویژگی علی‌رغم مزیت‌های آن دارای نقاط ضعف نیز می‌باشد. از این رو موضوع دخیل نمودن ارجحیت‌های مدیر در فرآیند ارزیابی و تحلیل عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده به عنوان یک مساله مهم تاکنون توسط بسیاری از پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است. یکی از راهکارهای وارد نمودن ارجحیت‌های مدیر در فرآیند ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده روش کارایی ارزش است که ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در مقایسه با واحد تصمیم‌گیرنده دارای بیشترین ارجحیت انجام می‌دهد. از طرف دیگر بحث الگویابی یکی از موضوعات حائز اهمیت در تحلیل پوششی داده‌ها است، چرا که بدین طریق می‌توان برای هر واحد ناکارا یک واحد الگو را که روی مرز کارایی قرار داشته و جهت بهبود عملکرد را برای آن واحد ناکارا تعیین می‌کند، مشخص نمود. در این مقاله موضوع الگویابی در تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر مفهوم کارایی ارزش بررسی می‌شود، بدین صورت که در فرآیند الگویابی نقش واحد با بیشترین ارجحیت لحاظ شده و برای هر واحد ناکارای ارزش یک واحد الگو که روی مرز شدنی کارای ارزش قرار دارد، تعیین می‌شود. همچنین نقاط قوت و ضعف این روش مورد بحث قرار می‌گیرد. در نهایت مدل الگویابی پیشنهاد شده بر روی داده‌های یک مثال واقعی اجرا شده و نتایج حاصل تحلیل می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: تابع فاصله جهت‌دار، مرز کارای ارزش، واحد الگو، نزدیک‌ترین الگو، ارجحیت.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: nasimnasrabadi@birjand.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش ناپارامتری برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده است که با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی اندازه کارایی (نسبی) واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دیدگاه خوشبینانه برآورد می‌کند. تاریخچه تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها در اصل به ایده مطرح شده توسط فارل برمی‌گردد[۱]. چند سال بعد از ارائه مقاله فارل، چارنز و همکاران اولین مدل تحلیل پوششی داده‌ها را فرمول‌بندی نمودند که مدل CCR نام گرفت و ارزیابی کارایی را با فرض بازده به مقیاس ثابت انجام می‌داد[۲]. سپس بنکر و همکاران با ایجاد اندکی تغییرات در مدل CCR، مدل دیگری تحت عنوان مدل BBC برای ارزیابی کارایی با فرض بازده به مقیاس متغیر ارائه دادند[۳]. پس از آن، تحلیل پوششی داده‌ها به صورت خیلی گسترده مورد استفاده قرار گرفت و در هر دو حوزه نظری و عملی به طرز چشم‌گیری گسترش یافت، به طوری که امروزه به عنوان یک راهکار مورد قبول در علم مدیریت و تصمیم‌گیری شناخته شده و در کاربردهای زیادی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود این که هدف اصلی تحلیل پوششی داده‌ها ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده بود، اما امروزه این روش به عنوان یک راهکار قدرتمند در سایز حوزه‌ها مانند رتبه بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده، خوشه بندی آن‌ها، الگویابی و تعیین مسیر پیشرفت، تخصیص منابع، تحلیل بهره‌وری و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرد. الگویابی فرآیندی است که طی آن برای هر واحد تصمیم‌گیرنده ناکارا یک واحد تصمیم‌گیرنده (مشاهده شده یا مجازی) که روی مرز کارا قرار داشته و از نظر چگونگی عملکرد بیشترین شباهت را با واحد تحت ارزیابی دارد، به عنوان واحد الگو تعیین می‌شود. مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها مانند مدل های شعاعی، جمعی و مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی، همزمان با ارزیابی کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده این هدف را نیز برآورده می‌سازند. تنها موضوع مهمی که در این مورد حائز اهمیت می‌باشد، این است که این مدل‌ها به واسطه ماهیت اصلی خود که برآورد میزان فاصله تا مرز کارایی است، در فرآیند الگویابی موضوع نزدیک بودن واحد الگو تا واحد تحت ارزیابی را مد نظر قرار نمی‌دهند. از این رو، واحد الگویی که از طریق مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها به‌دست می‌آید، ممکن است فاصله قابل توجهی تا واحد تحت ارزیابی داشته باشد. بنابراین برای واحد ناکارای تحت ارزیابی رسیدن به این واحد الگو اغلب اگر ناممکن نباشد، دشوار است. برای رفع این مشکل موضوع تعیین واحد الگو بر اساس معیار نزدیک‌ترین فاصله مطرح شده و مورد بحث و بررسی قرار گرفت[۴]. پس از آن، این دیدگاه در بسیاری از روش‌های الگویابی و نیز در مورد سایر مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مانند مدل‌های بدون ماهیت نیز مورد استفاد قرار گرفته است [۵و۶و۷و۸].

یکی از ویژگی‌های اصلی مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها بدون ارجحیت بودن آن‌هاست، به این مفهوم که مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها فرآیند ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را به طور آزادآنه انجام می‌دهند و هیچ‌گونه محدودیت و ارجحیتی از جانب مدیر را در این فرآیند لحاظ نمی‌کنند. به عبارت دیگر مقدار کارایی بدست آمده از این تکنیک یک مقدار خوشبینانه می‌باشد. با این وجود، راهکارهایی نیز به منظور اعمال ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها وجود دارد. براساس شیوه ارائه ارجحیت‌ها توسط مدیر یا تصمیم‌گیرنده، این راهکارها به طور عمده در دو دسته جای می‌گیرند: روش‌هایی که ارجحیت‌های روی ورودی‌ها و / یا خروجی‌ها را در مدل لحاظ می‌کنند (مانند روش‌های کنترل وزن) و راهکارهایی که ارجحیت‌های روی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در مدل ارزیابی در نظر می‌گیرند (مانند تحلیل کارایی ارزش). روش‌های کنترل وزن به طور کلی با دیدگاه‌های مختلف مانند محدودیت‌های مطلق و نیز روش‌های نسبت مخروطی مطرح شده و به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته‌اند[۹و۱۰]. از طرف دیگر روش تحلیل کارایی ارزش به عنوان روشی که ارجحیت‌های روی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در مدل ارزیابی لحاظ می‌کند، برای اولین بار توسط هالمه و همکاران مطرح شد[۱۱]. ایده اصلی این روش به این صورت بود که در شرایطی که مدیر یا تصمیم‌گیرنده بر اساس تجربه مدیریتی و یا

الگوهای ذهنی که برگرفته از اطلاعات کیفی وی است، یکی از واحدهای تصمیم‌گیرنده را به عنوان واحد با بیشترین ارجحیت تعیین می‌کند، منطقی و مطلوب آن است که این امر در فرآیند ارزیابی سایر واحدها نیز لحاظ شود. به عبارت دیگر اندازه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده نه تنها از طریق مقایسه آن‌ها با مرز مجموعه امکان تولید، بلکه با در نظر داشتن واحد با بیشترین ارجحیت انجام شود. این موضوع نیز مورد علاقه بسیاری از پژوهشگران بوده است و جنبه‌های مختلف آن نیز بررسی شده است [۱۲و۱۳].

با در نظر گرفتن توضیحات فوق، واضح است که چنانچه مدلی در اختیار داشته باشیم که ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده را به خوبی در فرآیند ارزیابی واحدها لحاظ می‌کند، مطمئنا اندازه کارایی به‌دست آمده واقعی‌تر و قابل اعتمادتر خواهد بود، گرچه که از ویژگی خوشبینانه بودن اندازه کارایی تا حدی کاسته می‌شود. موضوع مهمی که وجود دارد این است که در این حالت منطقی به نظر می‌رسد که این ارجحیت‌ها در فرآیند الگویابی نیز مورد توجه قرار بگیرند. به عبارت دیگر، مطلوب آن است که ارجحیت‌های بیان شده که در تخمین امتیاز کارایی لحاظ شدند، در فرآیند تعیین الگوها نیز نقش داشته باشند. رویز و همکاران مساله یافتن نزدیک‌ترین الگوها را در حالتی که ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده به صورت محدودیت‌های وزنی بیان می‌شود، مورد بررسی قرار داده و مدلی را به این منظور ارائه نمودند [۷]. نکته قابل توجه در مورد مدل ارائه شده توسط رویز و همکاران این بود که در این مدل، شرط غالب بودن واحد الگو بر واحد تحت ارزیابی لزوما برقرار نمی‌باشد. به عبارت دیگر چنانچه واحد تحت ارزیابی بخواهد به سمت واحد الگویی که توسط این مدل به‌دست آمده حرکت کند، این حرکت ممکن است مستلزم یک بده بستان بین ورودی‌ها و / یا خروجی‌های آن باشد. در این مقاله می‌خواهیم موضوع الگویابی را با دیدگاه تحلیل کارایی ارزش مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم بر اساس مدل کارایی ارزش ارائه شده در [۱۱] راهکاری برای الگویابی به‌دست آوریم با این ویژگی که واحد الگوی تعیین شده در مقایسه با واحد ناکارای تحت بررسی دارای امتیاز کارایی ارزش بهتری باشد. از این رو، به دنبال طراحی مدلی هستیم که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده ناکارای ارزش نزدیک‌ترین واحد الگوی شدنی را که کارای ارزش نیز باشد، به عنوان واحد الگوی متناظر تعیین کند.

این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است. ابتدا در بخش ۲ برخی از مفاهیم مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها آورده می‌شود. همچنین یک مدل الگویابی کلی با دیدگاه نزدیک‌ترین فاصله فرمول‌بندی می‌شود. سپس در بخش ۳ مفهوم کارایی ارزش در تحلیل پوششی داده‌ها یادآوری شده و مدل ارائه شده توسط هالمه و همکاران[۱۱] آورده می‌شود. در ادامه این بخش یک مدل کارایی ارزش جدید فرمول بندی می‌شود. بخش ۴ که قسمت اصلی مقاله است، موضوع الگویابی در تحلیل کارایی ارزش را مورد بررسی قرار داده و یک مدل الگویابی با رویکرد بهبود کارایی ارزش معرفی می‌کند. مدل ارائه شده توسط یک مثال ساده تشریحی بررسی می‌شود. بخش ۵ شامل یک مثال کاربردی برای الگویابی می‌باشد. در نهایت در بخش ۶ به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات می‌پردازیم.

۲- تحلیل پوششی داده‌ها

فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیرنده داریم که هر کدام با مصرف m نوع ورودی s نوع خروجی را تولید می‌کنند. برای واحد تصمیم‌گیرنده j ام، DMU_j، بردار ورودی را با نماد $X_j=(x_{ij})_{m\times1}$ و بردار خروجی را با نماد $Y_j=(y_{rj})_{s\times1}$ نشان می‌دهیم. در این مقاله، فرض بر این است که بردارهای ورودی و خروجی برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده همگی نامنفی و با حداقل یک مولفه مثبت می‌باشند. مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها، که شامل همه فعالیت‌های (مجازی) شدنی است، بر اساس اصول موضوعه مفروض به صورت زیر تشکیل می‌شود [۱۴]:

$$P=\{(X,Y)\mid X\geq\sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_j, Y\leq\sum_{j=1}^{n}\lambda_jY_j, \lambda\in\Lambda\}$$

که در آن مجموعه Λ بر اساس مفروضاتی که درمورد وضعیت بازده به مقیاس سیستم وجود دارد، تعیین

می‌شود. با یک نمادگذاری کلی می‌توان فرض کرد که:

$$\Lambda = \{\lambda \in R^n | A\lambda \le b, \lambda \ge 0\}, \qquad (۱)$$

به‌طوری‌که برای حالت‌های خاص بازده به مقیاس ثابت (CRS)، متغیر (VRS)، افزایشی (IRS) و کاهشی (DRS) ستون‌های ماتریس A و بردار ستونی b بر طبق جدول (۱) داده می شوند. مشاهده می‌شود که در همه چهار حالت بازده به مقیاس فوق داریم $a_j = b$.
بازده به مقیاس فعالیت $(\overline{X}, \overline{Y}) \in P$ را در مجموعه P کارا گوییم هرگاه هیچ فعالیت دیگری مانند $(X,Y) \in P$ موجود نباشد به‌طوری‌که $(Y,-X) \ge (\overline{Y}, -\overline{X})$ و نامساوی به ازای حداقل یک مولفه به صورت اکید برقرار باشد.
با نمادگذاری‌های فوق، مدل اساسی تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تابع فاصله جهت‌دار برای ارزیابی DMU_o را می‌توان در شکل کلی زیر فرمول‌بندی نمود [۱۵]:

$$\begin{aligned} &\max \beta \\ &s.t. \ \ (X_o - \beta g^x, Y_o + \beta g^y) \in P, \end{aligned} \qquad (۲)$$

که در آن $g = (g^y, g^x)$ بردار جهت و مشخص کننده ماهیت مدل است، با این شرط که $g^x \in R^m_{\ge 0}$ و $g^y \in R^s_{\ge 0}$. در واقع مساله (۲) بر اساس مفهوم تابع فاصله جهتی که برای اولین بار توسط لوئنبرگر معرفی شد [۱۶و۱۷]، فرمول‌بندی شده است. ویژگی‌های اساسی مدل تابع فاصله جهتی در [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. بالاخص می‌توان نشان داد که اگر DMU_o در مجموعه P کارا باشد، آن‌گاه به ازای هر بردار جهت نامنفی $g = (g^y, g^x)$، مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق برابر صفر است [۱۸]. در مدل اصلی تابع فاصله جهت‌دار، بردار جهت به طور دلخواه در نظر گرفته می شود و تنها محدودیتی که روی آن قرار داده می‌شود، شرط نامنفی بودن است. اما پرواضح است که چنانچه قرار باشد از مقدار بهینه مدل (۲) برای تعریف اندازه کارایی استفاده شود، توجه به این نکته ضروری است که امتیاز کارایی به‌دست آمده، به بردار جهت مورد استفاده بستگی دارد. لذا به‌هنگام استفاده از مساله (۲) چگونگی تعیین بردار جهت موضوعی حائز اهمیت بوده و تاکنون توسط بسیاری از پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است [۱۹و۲۰و۲۱و۲۲]. برای یک مرور کامل بر روش‌های تعیین بردار جهت برای توابع فاصله جهتی می‌توان به [۲۳] مراجعه نمود.
به‌طور کلی همان‌طور که در [۲۳] اشاره شده است، برای تعیین بردار جهت دو دیدگاه وجود دارد. با یک دیدگاه می‌توان بردار هدف را به طور مستقل از مساله، از قبل و با توجه به شرایط بیرونی تعیین نمود. برای مثال برای مدل‌های شعاعی با ماهیت ورودی، خروجی و ترکیبی این بردار بر طبق جدول (۲) مشخص می‌شود.

جدول (۱): مشخص‌سازی مجموعه Λ در حالت‌های مختلف

	a_j	b
CRS	0	0
VRS	$(1,-1)^T$	$(1,-1)^T$
IRS	-1	-1
DRS	1	1

جدول (۲): بردار جهت در مدل‌های شعاعی

بردار جهت	g^x	g^y
ماهیت ورودی	X_o	0
ماهیت خروجی	0	Y_o
ماهیت ترکیبی	X_o	Y_o

همچنین می‌توان برای تعیین بردار جهت از مدل‌های مبتنی بر متغیرهای کمکی استفاده نمود [۲۴و۲۵]. با دیدگاه دیگر به صورتی که فار و همکاران [۲۶] پیشنهاد دادند، می‌توان بردار جهت را به عنوان یک متغیر تصمیم در مساله (۲) در نظر گرفت و بردار جهت را به طور درونی و همزمان با حل مساله به‌دست آورد. واضح است که در این حالت مساله (۲) یک مساله برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی خواهد بود. اما می‌توان با اعمال محدودیت‌هایی این مساله را به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تبدیل نموده و بردار جهت بهینه را تعیین نمود. به‌طور کلی، راهکارهایی که بردار جهت را به طور درونی از طریق حل مساله (۲) به‌دست می‌آورند در دو دسته جای می‌گیرند؛ راهکارهای مبتنی بر بهینه‌سازی نظری و راهکارهای مبتنی بر مفاهیم اقتصادی مانند کمینه سازی هزینه یا بیشینه سازی سود. در اینجا بر اساس ایده مطرح شده توسط فار و همکاران [۲۶]، بردار جهت بهینه را از طریق یک روش نظری بهینه‌سازی و به کمک ساختار اصلی مساله (۲) به‌دست می‌آوریم. برای این منظور فرض می‌کنیم که بردار جهت $g=(g^x,g^y)$ در شرط نرمال‌ساز $1_m g^x + 1_s g^y = 1$ صدق می‌کند. این شرط علاوه بر این که وجود جواب بهینه برای مساله (۲) را تضمین می‌کند، یک راهکار استاندارد از نظر اقتصادی می‌باشد که مشکل تفاوت در یکاهای اندازه‌گیری ورودی‌ها و خروجی‌ها را نیز برطرف می‌سازد [۲۶].

با اعمال شرط نرمال‌ساز فوق در مساله (۲) و با توجه به ساختار مجموعه امکان تولید P، این مساله به صورت مساله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \beta\\
&s.t.\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + \beta g^x \le X_o\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - \beta g^y \ge Y_o\\
&A\lambda \le b, \lambda \ge 0,\\
&1_m g^x + 1_s g^y = 1,\\
&(g^x, g^y) \ge (0,0).
\end{aligned} \tag{۳}$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $h^x = \beta g^x$ و $h^y = \beta g^y$، به راحتی معلوم می‌شود که مساله فوق با مساله برنامه‌ریزی خطی زیر معادل است:

$$\begin{aligned}
&\max \beta = 1_m h^x + 1_s h^y\\
&s.t.\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j + h^x \le X_o\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j - h^y \ge Y_o\\
&A\lambda \le b, \lambda \ge 0,\\
&(h^x, h^y) \ge (0,0).
\end{aligned} \tag{۴}$$

می‌توان نشان داد که DMU_o کاراست اگر و تنها اگر مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق برابر صفر باشد.

حال به منظور یافتن بردار جهت بهینه دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. $\beta^* = 0$. در این حالت فعالیت (X_o, Y_o) در مجموعه P کارا است و لذا بردار جهت را می‌توان هر بردار نامنفی دلخواه در نظر گرفت.

حالت دوم. $\beta^* > 0$. در این حالت با توجه به تغییر متغیر اعمال شده، بردار جهت بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(g^x, g^y) = \frac{1}{\beta^*}(h^x, h^y).$$

ملاحظه می‌شود که مساله برنامه‌ریزی خطی (۴) با مدل جمعی معادل است. این امر ناشی از اعمال شرط نرمال‌ساز خطی $1_m g^x + 1_s g^y = 1$ روی بردار جهت می‌باشد. همچنین دوگان مساله (۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min -u^T Y_o + v^T X_o + \eta^T b\\
&s.t. -u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T a_j \ge 0, j = 1,\dots n\\
&u \ge 1_s, v \ge 1_m, \eta \ge 0.
\end{aligned} \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن زوج مسائل اولیه – دوگان (۴) و (۵)، قضیه زیر یک فرمول‌بندی از مرز کارای مجموعه امکان تولید که شامل همه واحدهای مجازی کارا است، ارائه می‌کند. این فرمول بندی در واقع تعمیمی از فرمول ارائه

شده توسط رویز و همکاران [۷] است و در فرآیند الگویابی بسیار مفید واقع می‌شود.

قضیه ۱- اگر $E \subseteq \{1,...,n\}$ مجموعه اندیس‌های همه واحدهای مشاهده شده کارا باشد، آن‌گاه مرز کارای مجموعه امکان تولید به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}
P^E = \{(X,Y) \mid & \\
& X = \sum_{j\in E}\lambda_j X_j, Y = \sum_{j\in E}\lambda_j Y_j, \\
& -u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T a_j - d_j = 0, j \in E, \\
& (u,v) \geq 1_{m+s}, \eta \geq 0, \\
& \sum_{j\in E} a_j\lambda_j + \mu = b, \mu \geq 0, \\
& \mu_i \leq Ml_i, \eta_i \leq M(1-l_i), \\
& l_i \in \{0,1\}, i = 1,...,k, \\
& d_j \leq Mt_j, \lambda_j \leq M(1-t_j), \\
& d_j, \lambda_j \geq 0, t_j \in \{0,1\}, j \in E\},
\end{aligned} \tag{۶}$$

که در آن $M >> 0$ یک عدد مثبت به‌قدر کافی بزرگ می‌باشد.

برهان. پیوست ۱ را ببینید.

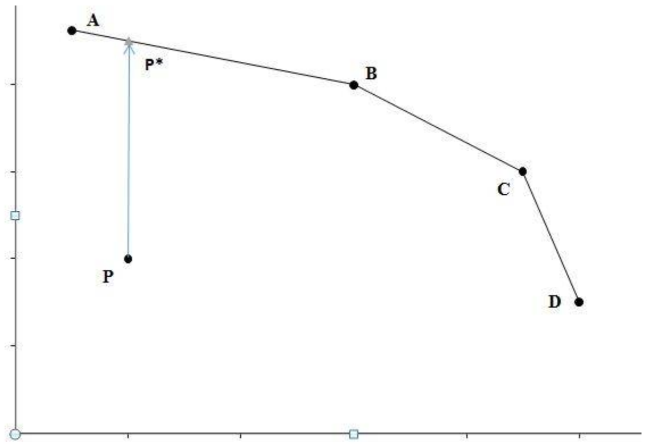
با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در قضیه فوق، چنانچه واحد تحت ارزیابی ناکارا باشد، می‌توان واحد الگوی متناظر را به عنوان یک واحد (مجازی) کارا که کمترین فاصله را با آن دارد، به‌دست آورد. زیرا در بحث الگویابی موضوع مهم دیگری که مطرح می‌شود این است که واحد الگوی تعیین شده کمترین فاصله را با واحد تحت ارزیابی داشته باشد. چرا که واحد ناکارای تحت ارزیابی بتواند با کمترین تلاش عملکرد خود را بهبود بخشیده و به سطح ایده‌آل برساند. همچنین، مطلوب این است که واحد الگو بیشترین شباهت را از نظر عملکرد با واحد تحت ارزیابی داشته باشد. برای این منظور با استفاده از ایده مطرح شده توسط آپارشیو و همکاران [۴] برای یافتن نزدیک‌ترین الگوی متناظر و با هدف کمینه سازی فاصله، واحد ناکارای تحت ارزیابی را بر روی مجموعه واحدهای کارا، یعنی مجموعه P^E تصویر می‌کنیم. مساله برنامه‌ریزی خطی صحیح مختلط زیر با در نظر گرفتن فاصله نرم یک، نزدیک‌ترین الگو برای DMU_o را روی مرز کارای P^E به‌دست می‌آورد:

$$\begin{aligned}
& \min 1^T h^x + 1^T h^y \\
& s.t. X_o - h^x = \sum_{j\in E}\lambda_j X_j, \\
& Y_o + h^y = \sum_{j\in E}\lambda_j Y_j, \\
& -u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T a_j - d_j = 0, j \in E, \\
& (u,v) \geq 1_{m+s}, \eta \geq 0, \\
& , \sum_{j\in E} a_j\lambda_j + \mu = b, \mu \geq 0, \\
& \mu_i \leq Ml_i, \eta_i \leq M(1-l_i), \\
& l_i \in \{0,1\}, i = 1,...,k, \\
& d_j \leq Mt_j, \lambda_j \leq M(1-t_j), \\
& d_j, \lambda_j \geq 0, t_j \in \{0,1\}, j \in E, \\
& (h^x, h^y) \geq (0,0).
\end{aligned} \tag{۷}$$

لازم به ذکر است که مساله فوق در واقع شکل کلی‌تری از مدل ارائه شده در [۴] است که قبلا تنها با فرض بازده‌به‌مقیاس ثابت فرمول بندی شده بود. با در نظر گرفتن مساله (۴) به راحتی می‌توان نشان داد که DMU_o کاراست اگر و تنها اگر مقدار بهینه مساله فوق برابر صفر باشد. به‌علاوه در این حالت الگوی یافت شده توسط مدل (۴) بر خود واحد منطبق است. از طرف دیگر اگر DMU_o کارا نباشد، واحد الگوی متناظر با DMU_o به‌صورت $(X_o - h^{x*}, Y_o + h^{y*})$ تعیین می‌شود که در آن نماد "×" نشان دهنده جواب بهینه مساله (۷) می‌باشد. واضح است که این واحد الگو یک فعالیت شدنی و کارا است که کمترین فاصله را – با در نظر گرفتن فاصله نرم یک– با فعالیت تحت ارزیابی (X_o, Y_o) دارد.

برای توضیح بیشتر شکل (۱) را در نظر بگیرید. در این شکل مجموعه ۵ واحد تصمیم گیرنده $\{\mathbf{A,B,C,D,P}\}$ با یک ورودی و دو خروجی که تحت بازده به مقیاس ثابت فعالیت می‌کنند، در فضای خروجی‌ها نشان داده شده‌اند. در این شکل مجموعه P^E به صورت اجتماع پاره‌خط‌های $\mathbf{AB}$، $\mathbf{BC}$ و $\mathbf{CD}$ است. همچنین چنانچه مدل (۷) را برای واحد $\mathbf{P}$ اجرا کنیم واحد $\mathbf{P^*}$ به عنوان نزدیک‌ترین الگو به‌دست می‌آید.

شکل (۱). مرز کارای مجموعه امکان تولید و نزدیک‌ترین الگو



۳- تحلیل کارایی ارزش

۳-۱- مقدمات

همان‌گونه که پیش از این ذکر شد، در تحلیل کارایی ارزش فرض بر این است که تصمیم‌گیرنده ارجحیت‌های خود را از طریق تعیین واحد تصمیم‌گیرنده با بیشترین ارجحیت در اختیار تحلیل‌گر قرار می‌دهد. با توجه به فرض تحدب و بنا به ساختار مجموعه امکان تولید، این واحد می‌تواند یک واحد مشاهده شده یا یک واحد مجازی باشد. برای انتخاب چنین جوابی می‌توان از راهکارهای مختلفی که در حوزه تصمیم‌گیری چندمعیاره به منظور یافتن جواب‌های کارا و نیز رتبه‌بندی آن‌ها وجود دارد، مانند روش‌های تعاملی، روش‌های مبتنی بر برنامه‌ریزی آرمانی و یا حتی روش‌های تکاملی استفاده نمود [۲۷و۲۸و۲۹]. به هر صورت، در این مقاله با موضوع چگونگی تعیین واحد با بیشترین ارجحیت سروکار نداریم. اما در نظر داریم که با فرض این‌که تصمیم‌گیرنده فردی منطقی و واقع بین است، واحد با بیشترین ارجحیت در هر حال باید یک واحد کارا که روی مرز کارای مجموعه P قرار دارد، انتخاب شود.

با فرض این که $(X^{MPS},Y^{MPS})\in P^{E}$، که $(X^{MPS},Y^{MPS})=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{MPS}(X_j,Y_j)$ و $\lambda^{MPS}\in\Lambda$، واحد با بیشترین ارجحیت تصمیم‌گیرنده است و به علاوه تابع ارزش تصمیم‌گیرنده نسبت به $(Y,-X)$ صعودی اکید و مقعر کاذب است و بیشترین مقدار خود را در $(Y^{MPS},-X^{MPS})$ می‌گیرد، مدل اساسی تحلیل کارایی ارزش برای اولین بار توسط هالمه و همکاران [۱۱] به صورت زیر فرمول بندی شده است:

$$
\begin{aligned}
&\max z=\alpha+\varepsilon(1_m S^{-}+1_s S^{+})\\
&s.t.\sum_{j=1}^{n}\lambda_j X_j+\alpha g^{x}+S^{-}=X_o,\\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j-\alpha g^{y}-S^{+}=Y_o,\\
&A\lambda+\mu=b,\\
&(S^{-},S^{+})\geq 0,\\
&\lambda_j\geq 0,\lambda_j^{MPS}=0,\\
&\lambda_j\, free,\lambda_j^{MPS}>0,\\
&\mu_i\geq 0,\mu_i^{MPS}=0,\\
&\mu_i\, free,\mu_i^{MPS}>0
\end{aligned}
\qquad (۸)
$$

که در آن:

$$\mu^{MPS}=b-A\lambda^{MPS}\geq 0,$$

و $\varepsilon>0$ عددی ناارشمیدسی است. همچنین بردار $g=(g^{x},g^{y})$ مشخص کننده ماهیت مدل بوده و معمولاً بر طبق جدول (۲) تعیین می‌شود. لازم به ذکر است که چهار قید آخر در مساله (۸) ایجاب می‌کنند که متغیرهای λ_j و μ_i به ترتیب به ازای j و i هایی که

λ_j^{MPS} و μ_i^{MPS} صفر هستند، نامنفی و به ازای سایر j و iها آزاد می‌باشند. اگر α^* مقدار بهینه مساله (۸) باشد، DMU_o کارای ارزش نامیده می‌شود هرگاه $\alpha^*=0$ و در هر جواب بهینه آن تمامی متغیرهای کمکی برابر صفر باشند.

با توجه به توضیحات بالا و با در نظر گرفتن مساله (۸)، چنان‌چه فرض کنیم z^* مقدار بهینه تابع هدف این مساله باشد، $z^*>0$ بدین معنی است که DMU_o نسبت به هر تابع ارزش صعودی اکید و مقعر کاذب که بیشترین مقدار خود را در $(Y^{MPS},-X^{MPS})$ می‌گیرد، ناکارای ارزش است. از طرف دیگر $z^*=0$ ایجاب می‌کند که DMU_o نسبت به تابع ارزش قطعه‌ای خطی که توسط مساله (۸) تخمین زده شده، کارای ارزش است، هرچند ممکن است در این حالت DMU_o واقعاً کارای ارزش نباشد. به عبارت دقیق‌تر، مساله (۸) کارایی DMU_o را از طریق مقایسه آن با مرز تابع ارزشی که به‌طور خوش‌بینانه تخمین زده شده است، ارزیابی می‌کند. به‌طور معادل می‌توان گفت که مساله (۸) یک مدل خوش‌بینانه برای ارزیابی کارایی ارزش DMU_o می‌باشد. مدل (۸) توسط کورهونن و همکاران [۱۲] برای ارزیابی عملکرد دانشگاه‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین ویژگی‌های اصلی این مدل توسط کورهونن و یورو [۱۳] به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۲- یک مدل جدید برای تحلیل کارایی ارزش

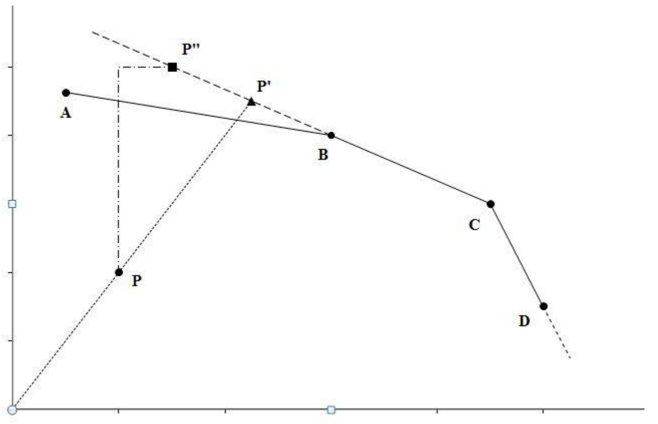
با توجه به مطالبی که تاکنون ارائه شد، در اینجا سعی می‌کنیم یک مدل برای ارزیابی کارایی ارزش در تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مفهوم تابع فاصله جهتی ارائه نماییم. یادآوری می‌کنیم که مدل اساسی تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تابع فاصله جمعی، به صورتی‌که در بخش قبل به‌دست آمد، ساختاری مشابه مدل جمعی دارد. به این صورت که در تابع هدف آن مجموع متغیرهای کمکی بیشینه می‌شود. از طرفی، با توجه به این که در بحث الگویابی هدف اصلی ما یافتن نزدیک‌ترین الگو(ها)ی کارا است و این کار طبق مدل از طریق محاسبه نرم یک انجام می‌شود، یافتن یک مدل مشابه برای ارزیابی کارایی ارزش، ما را در امر الگویابی با رویکرد کارایی ارزش یاری خواهد داد. با در نظر گرفتن مدل (۴) مدل کارایی ارزش جدید را به صورت زیر فرمول بندی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\max \sigma = 1_m S^- + 1_s S^+ \\
&s.t. \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j + S^- = X_o, \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j - S^+ = Y_o, \\
&A\lambda + \mu = b, \\
&(S^-, S^+) \geq 0, \\
&\lambda_j \geq 0, \lambda_j^{MPS} = 0, \\
&\lambda_j\, free, \lambda_j^{MPS} > 0, \\
&\mu_i \geq 0, \mu_i^{MPS} = 0, \\
&\mu_i\, free, \mu_i^{MPS} > 0,
\end{aligned} \tag{۹}$$

تفاوت مدل فوق با مدل (۸) در ماهیت آن است، به این صورت که مدل (۸) به صورت شعاعی فرمول بندی شده است، در حالی‌که مساله (۹) دارای ساختار غیرشعاعی است و به بیشینه نمودن مجموع متغیرهای کمکی می‌پردازد. به عبارت دیگر مدل (۸) فاصله شعاعی DMU_o تا مرز (خوشبینانه) کارای ارزش را بدست می‌آورد، در حالی که در مدل (۹) فاصله نرم یک DMU_o تا این مرز برآورد می‌شود.

برای فهم بهتر مطلب شکل (۲) را ملاحظه می‌کنیم. مشابه شکل (۱) به تعداد ۵ واحد تصمیم گیرنده با یک ورودی و دو خروجی که تحت بازده به مقیاس ثابت فعالیت می‌کنند، در فضای خروجی‌ها مد نظر هستند. با فرض این‌که واحد **C** به عنوان واحد با بیشترین ارجحیت انتخاب شود، مرز تخمین زده شده کارای ارزش شامل پاره خطهای **CB** و **CD** و نیم خطهایی است که با نقطه‌چین در شکل نشان داده شده‌اند. حال چنانچه واحد **P** برای ارزیابی در نظر گرفته شود، با استفاده از مدل (۸) کارایی ارزش این واحد از طریق مقایسه آن با نقطه **P’** تعیین می‌شود.

شکل (۲). نحوه عملکرد مدل‌های (۸) و (۹)



در واقع **P'** نقطه تصویر **P** بر روی مرز کارای ارزش است که با دیدگاه شعاعی حاصل شده است. از طرف دیگر با به‌کارگیری مدل (۹) برای ارزیابی واحد **P** این نقطه را به کمک یک تابع فاصله جمعی بر روی مرز کارای ارزش تصویر می‌کنیم، که این عمل به نقطه **P"** می‌انجامد. در حقیقت هر دو مدل (۸) و (۹) از واحد تحت ارزیابی به سمت مرز کارای ارزش حرکت می‌کنند، با این تفاوت که مدل (۸) به طور شعاعی این حرکت را انجام می‌دهد، در حالی که مدل (۹) نرم یک را در نظر می‌گیرد. با فرض این که σ^* مقدار بهینه مساله (۹) باشد، به راحتی می‌توان نشان داد که DMU_o کارای ارزش است هرگاه $\sigma^* = 0$. با توجه به شباهت قیود دو مساله(۸) و (۹) واضح است که این دو مدل از یک تقریب یکسان برای مرز کارای ارزش استفاده می‌کنند و لذا می‌توان گفت که مدل (۹) نیز کارایی ارزش واحد تحت ارزیابی را با دیدگاه خوشبینانه ارزیابی می‌کند.

دوگان مساله (۹) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min -u^T Y_o + v^T X_o + \eta^T b \\ &s.t. -u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T a_j \ge 0, j \in J^{MPS} \\ &-u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T a_j = 0, j \notin J^{MPS} \\ &(u,v) \ge 1_{m+s}, \\ &\eta_i \ge 0, i \in I^{MPS} \\ &\eta_i = 0. i \notin I^{MPS}, \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن:

$$J^{MPS} = \{j \mid \lambda_j^{MPS} = 0\},$$

$$I^{MPS} = \{i \mid \mu_i^{MPS} = 0\}.$$

با فرض این که λ^* جواب بهینه مساله (۹) باشد، مجموعه مرجع متناظر با DMU_o، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_o^v = \{j \mid \lambda_j^* \ne 0\}.$$

قضیه زیر اهمیت مجموعه مرجع را روشن می سازد. در واقع نشان می‌دهد که به کمک مجموعه مرجع که از جواب بهینه مساله (۹) به‌دست می‌آید، می‌توان برای واحد تحت ارزیابی یک واحد مرجع تعیین نمود.

قضیه ۲- الف) فعالیت (مجازی) $(\bar{X}_o, \bar{Y}_o) = \sum_{j \in R_o} \lambda_j^* (X_j, Y_j)$ کارای ارزش است.

ب) به ازای هر $q \in R_o^v$، DMU_q کارای ارزش است.

برهان. پیوست ۱ را ببینید.

با توجه به قضیه فوق ممکن است چنین استنباط شود که $(\bar{X}_o, \bar{Y}_o)$ را می‌توان به عنوان یک واحد مرجع برای DMU_o در نظر گرفت. اما نکته مهمی که در این مورد وجود دارد، این است که این واحد (مجازی) ممکن است شدنی نباشد. به عبارت دیگر ممکن است داشته باشیم $(\bar{X}_o, \bar{Y}_o) \notin P$. (به عنوان مثال، در شکل (۲) این

واحد مجازی همان نقطه **"P** است که به وضوح شدنی نیست.) دلیل این امر آن است که شرط نامنفی بودن متغیرهای λ_j^* و μ_i^* در مساله (۹) در حالت کلی ضروری نیست و لذا در بسیاری از حالت‌ها $(\overline{X}_o, \overline{Y}_o)$ ممکن است شدنی نباشد. بنابراین چنان‌چه مایل باشیم این واحد (مجازی) را به عنوان یک واحد الگو برای واحد تحت ارزیابی در نظر بگیریم، در عمل با مشکل مواجه خواهیم شد. چرا که در نظر گرفتن یک واحد الگو که در عمل یک واحد شدنی نیست، منطقی به نظر نمی‌رسد، هرچند که این واحد کارای ارزش باشد. همچنین مقایسه واحد تحت ارزیابی با این واحد مجازی بدست آمده معنی‌دار نخواهد بود، چرا که این واحد عملا غیر قابل دسترس بوده و خارج از مجموعه امکان تولید قرار دارد و لذا رسیدن به آن برای واحد تحت ارزیابی از نظر تئوری غیر ممکن است. از این‌رو، در بخش بعد یک مدل الگویابی که از نقطه ضعف فوق مبرا است، ارائه می‌کنیم.

۴- الگویابی در تحلیل کارایی ارزش

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، نقطه تصویری که مستقیماً از مساله (۹) به دست می‌آید، یک واحد (مجازی) کارای ارزش است اما ممکن است شدنی نباشد. همچنین در صورت شدنی بودن، این واحد مجازی با ایده بیشینه سازی فاصله در راستای بردار جهت مفروض به‌دست آمده و لذا با مفهوم نزدیک‌ترین الگوها سازگار نیست. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که برای هر واحد ناکارای ارزش واحد الگوی متناظر را روی بخشی از مرز کارای مجموعه امکان تولید که شامل همه واحدهای کارای ارزش می‌باشد، با لحاظ کردن ایده نزدیک‌ترین الگوها تعیین کنیم. برای این منظور، ابتدا لازم است این مرز مشترک، یعنی مجموعه همه واحدهای مجازی کارای ارزش و شدنی به طور دقیق مشخص شود.

قضیه ۳- فرض کنیم $VE \subseteq \{1,\ldots,n\}$ مجموعه اندیس‌های همه واحدهای مشاهده شده کارای ارزش و P^{VE} نشان دهنده مجموعه همه واحدهای مجازی شدنی کارای ارزش باشد. در این صورت:

$$
\begin{aligned}
&P^{VE} = \{(X,Y) \mid \\
&X = \sum_{j\in VE} \lambda_j X_j, Y = \sum_{j\in VE} \lambda_j Y_j, \\
&-u^T Y_j + v^T X_j + \eta a_j - d_j = 0, \\
&\sum_{j\in VE} \lambda_j a_j + \mu = b \text{ و } \mu \ge 0, \\
&d_j \le Mt_j, \lambda_j \le M(1-t_j), \\
&t_j \in \{0,1\},, \lambda_j \ge 0, j \in VE, \\
&(u,v) \ge 1_{m+s}, \eta \ge 0 \\
&\mu_i \le Ml_i, \eta_i \le M(1-l_i), \\
&l_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,k\},
\end{aligned}
\qquad (۱۱)
$$

که در آن $M >> 0$ یک عدد مثبت به‌قدر کافی بزرگ می‌باشد.

برهان. پیوست ۱ را ببینید.

حال با فرض این که DMU_o ناکارای ارزش است، به منظور یافتن نزدیک ترین الگو برای آن، با این شرط که واحد الگو کارای ارزش و شدنی باشد، از ایده تعیین نزدیک‌ترین الگوها بر اساس معیار کمترین فاصله که توسط آپاراشیو و همکاران [۴] مطرح شده است، استفاده کرده و مدل زیر را طراحی می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{m} |h_i^x| + \sum_{r=1}^{s} |h_r^y| \\
&s.t. \sum_{j\in VE} \lambda_j X_j + h^x = X_o \\
&\sum_{j\in VE} \lambda_j Y_j - h^y = Y_o \\
&\sum_{j\in VE} \lambda_j a_j + \mu = b, \mu \ge 0, \\
&-u^T Y_j + v^T X_j + \eta a_j - d_j = 0, j \in VE \\
&d_j \le Mt_j, \lambda_j \le M(1-t_j) \\
&t_j \in \{0,1\},, d_j, \lambda_j \ge 0, j \in VE, \\
&(u,v) \ge 1_{m+s}, \eta \ge 0, \\
&\mu_i \le Ml_i, \eta_i \le M(1-l_i), i = 1,\ldots,k, \\
&h^x, h^y free,
\end{aligned}
\qquad (۱۲)
$$

که در آن مشابه قضیه قبل اسکالر M یک عدد مثبت به قدر کافی بزرگ فرض می‌شود.

موضوعی که توجه به آن حائز اهمیت است این نکته است که در مدل (۱۲) برخلاف مدل (۷) بردار (h^x, h^y) شرط نامنفی بودن را ندارد و به عنوان یک متغیر آزاد در نظر گرفته می‌شود. دلیل این امر آن است که برخلاف مجموعه P^E، مجموعه P^{VE} در حالت کلی لزوما یک پوشش کامل برای مجموعه امکان تولید نمی‌باشد و لذا چنانچه ملزم باشیم از واحد تحت ارزیابی در جهت غالب بر آن به سمت مجموعه P^{VE} حرکت کنیم، ممکن است مدل نشدنی باشد. از این‌رو شرط نامنفی بودن بردار جهت را حذف کرده و در تابع هدف علامت قدرمطلق را که نشان‌دهنده نرم یک بردار جهت می‌باشد، اضافه می‌کنیم. با این راهکار می‌توان مطمئن بود که مساله (۱۲) همواره شدنی است. برای توضیح دقیق‌تر، با یادآوری این‌که (X^{MPS}, Y^{MPS}) به‌وضوح کارای ارزش است و با توجه به فرمول‌بندی که در (۱۱) برای مرز کارای ارزش ارائه شد، چنانچه فرض کنیم $(\lambda, \mu, d, t, u, v, \eta, l)$ متناظر با $(X^{MPS}, Y^{MPS}) \in P^{VE}$ باشد و قرار دهیم

$$h^x = X_o - \sum_{j\in VE} \lambda_j X_j, h^y = \sum_{j\in VE} \lambda_j Y_j - Y_o$$

آن‌گاه یک جواب شدنی برای (۱۲) خواهیم داشت.

لازم به ذکر است که مساله (۱۲) می‌تواند برای تشخیص کارای ارزش بودن یا نبودن واحد تحت بررسی نیز استفاده شود، چرا که به راحتی می‌توان نشان داد که DMU_o با دیدگاه خوش‌بینانه کارای ارزش است اگر و تنها اگر مقدار بهینه تابع هدف مساله (۱۲) برابر صفر باشد. (این برهان به سادگی و با توجه به شباهت ساختاری مساله (۱۲) با زوج مسائل اولیه–دوگان (۹) و (۱۰) قابل انجام است.) به‌علاوه در این حالت الگوی یافت شده برای واحد کارای ارزش تحت ارزیابی، صرفنظر از این‌که این واحد یک واحد راسی هست یا نه، بر خود واحد منطبق است.

اما چنان‌چه DMU_o کارای ارزش نباشد، فعالیت به دست آمده به صورت

$$(\hat{X}_o, \hat{Y}_o) = \sum_{j\in VE} \lambda_j^* (X_j, Y_j)$$
$$= (X_o - h^{x*}, Y_o + h^{y*})$$

که در آن نماد '*' نشان‌دهنده جواب بهینه برای مساله (۱۲) است، به عنوان واحد الگوی متناظر با DMU_o معرفی می‌شود. تاکید می‌کنیم که ویژگی نامغلوب بودن برای این واحد الگو ممکن است برقرار نباشد. زیرا در بهینگی ممکن است بردار جهت دارای مولفه(های) منفی باشد. این مطلب بیان‌گر آن است که در این شرایط اگر واحد ناکارای ارزش بخواهد به سمت واحد الگوی فوق حرکت کند، این حرکت مستلزم یک بده بستان بین ورودی‌ها و/یا خروجی‌های آن خواهد بود. این ویژگی در بعضی از مدل‌های الگویابی نیز وجود دارد [۷]. لازم به ذکر است که مساله (۱۲) به دلیل وجود عبارت قدرمطلق در تابع هدف آن، اساسا یک مساله غیر خطی است. اما به راحتی با تغییر متغیر $|x| = x^+ + x^-$ که $x = x^+ - x^-$ و $x^+, x^- \geq 0$، برای هر $x \in R$ قابل تبدیل به یک مساله برنامه ریزی خطی صحیح مختلط می‌باشد. قضیه زیر اعتبار این راهکار الگویابی را نشان می دهد.

قضیه ۴– فعالیت (مجازی) $(\hat{X}_o, \hat{Y}_o)$ شدنی و کارای ارزش است.

برهان. با توجه به قضیه ۳ واضح است.

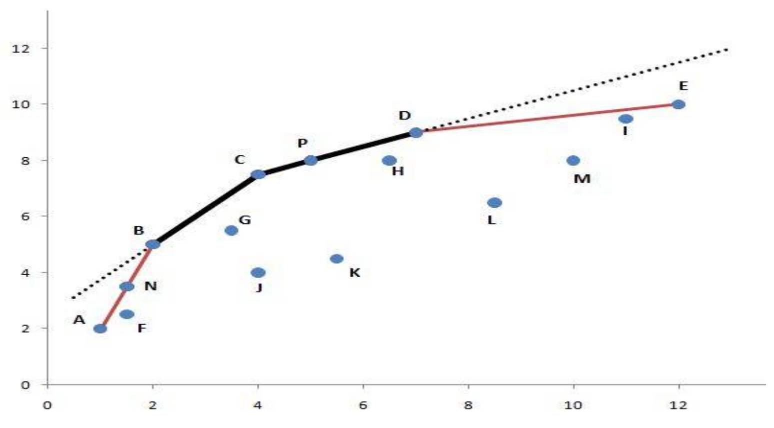
۴- مثال عددی

مجموعه‌ای از ۱۵ واحد تصمیم‌گیرنده را که هر کدام با مصرف یک ورودی، یک خروجی را تولید می‌کنند، در نظر بگیرید. داده‌های متناظر با این واحدها در جدول (۳) داده شده است.

جدول (۳). داده‌های مثال عددی

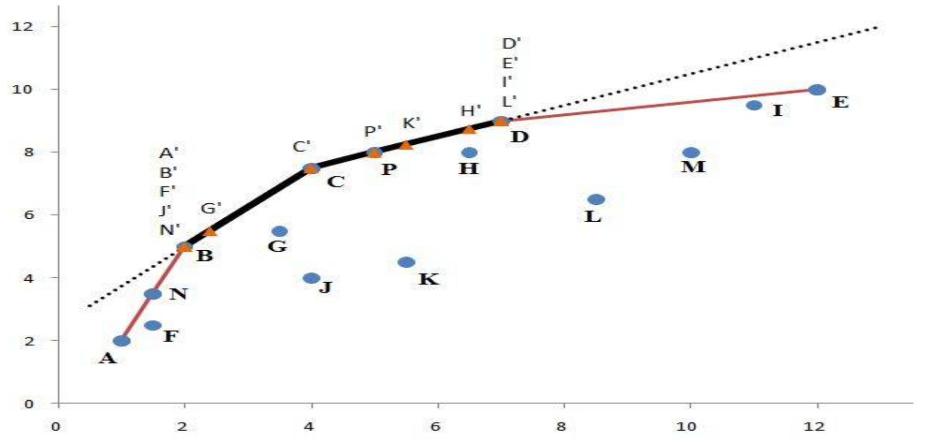
واحدها	ورودی	خروجی
A	۱	۲
B	۲	۵
C	۴	۷،۵
D	۷	۹
E	۱۲	۱۰
F	۱،۵	۲،۵
G	۳،۵	۵،۵
H	۶،۵	۸
I	۱۱	۹،۵
J	۴	۴
K	۵،۵	۴،۵
L	۸،۵	۶،۵
M	۱۰	۸
N	۱،۵	۳،۵
P	۵	۸

شکل (۳): مجموعه امکان تولید و مرز کارای ارزش برای داده‌های مثال عددی



حال با اجرای مدل (۱۲) سعی می‌کنیم برای هر واحد تصمیم‌گیرنده نزدیک‌ترین الگوی کارای ارزش به آن را به‌دست آوریم. نتایج حاصل از این مدل در دو ستون اول جدول (۴) نشان داده شده‌اند. به منظور مقایسه، نتایج حاصل از مدل الگویابی معمولی (۷) نیز محاسبه شده و در دو ستون آخر جدول (۴) آورده شده‌اند. همچنین شکل (۴) واحدهای تصمیم‌گیرنده را به همراه الگوی بدست آمده برای هر کدام نشان می‌دهد. الگوهای به‌دست آمده از مدل (۱۲) همگی با علامت مثلث مشخص شده اند. مشاهده می‌شود که همه این واحدها روی قسمت شدنی مرز کارای ارزش واقع شده‌اند.

شکل (۴): نتایج الگویابی حاصل از مدل پیشنهادی برای داده‌های مثال عددی



جدول (۴): نتایج حاصل از مدل‌های الگویابی برای مثال عددی

واحدها	نتایج مدل (۷)		نتایج مدل (۱۲)	
	ورودی	خروجی	ورودی	خروجی
A	۱	۲	۲	۵
B	۲	۵	۲	۵
C	۴	۷،۵	۴	۷،۵
D	۷	۹	۷	۹
E	۱۲	۱۰	۷	۹
F	۱،۱۶۷	۲،۵	۲	۵
G	۲،۴	۵،۵	۲،۴	۵،۵
H	۶،۵	۸،۷۵	۶،۵	۸،۷۵
I	۱۱	۹،۸	۷	۹
J	۱،۶۶۷	۴	۲	۵
K	۱،۸۳۳	۴،۵	۵،۵	۸،۲۵
L	۸،۵	۹،۳	۷	۹
M	۱۰	۹،۶	۷	۹
N	۱،۵	۳،۵	۲	۵
P	۵	۸	۵	۸

با بررسی داده‌های گزارش شده در جدول (۴) مشاهده می‌شود که برای واحدهای کارای **A**، **B**، **C**، **D**، **E**، **N** و **P** الگوی حاصل از مدل (۷) بر خود واحد منطبق می‌باشد، اما با اجرای مدل (۱۲) تنها واحدهای کارای ارزش **B**، **C**، **D** و **P** بر الگوی خود منطبق هستند و برای واحدهای کارای **A**، **E** و **N** که کارای ارزش

نیستند، الگوی متفاوت دیگری که کارای ارزش است، به‌دست آمده است. واضح است که در مورد این واحدها شرط غالب بودن واحد الگو برقرار نیست و اگر این واحدها بخواهند به سمت الگوی تعیین شده از مدل (۱۲) حرکت کنند، این حرکت مستلزم بده بستان بین ورودی و خروجی آن‌ها خواهد بود. در مورد سایر واحدهای ناکارا، مشاهده می‌شود که برای واحدهای $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}$ هر دو مدل (۷) و (۱۲) الگوهای یکسانی تعیین می‌کنند. در واقع، این‌ها همان واحدهایی هستند که در ناحیه مغلوب توسط مرز کارای ارزش قرار دارند و لذا الگوی به‌دست آمده از مدل (۷) برای این واحدها خودبه‌خود کارای ارزش هم هست. در حالی که برای سایر واحدهای ناکارا الگوهای بدست آمده از دو مدل با هم متفاوتند. برای این واحدهای ناکارا نیز شرط غالب بودن واحد الگو بر خود واحد برقرار نیست.

۵- مثال کاربردی

در این بخش مدل الگویابی مطرح شده را بر روی داده‌های یک مثال واقعی اجرا می‌کنیم. داده‌های مورد نظر که برای ارزیابی عملکرد آموزشی ۴۲ دانشگاه دولتی کشور اسپانیا مورد استفاده قرار می‌گیرند، مربوط به سال تحصیلی ۲۰۰۸-۲۰۰۹ می‌باشند که در سال ۲۰۱۰ طی یک کنفرانس ملی در این کشور گزارش شده بود. در این گزارش برای هر دانشگاه چهار ورودی به‌صورت: ۱) نسبت استاد به دانشجو، ۲) نسبت کارمند به دانشجو، ۳) نسبت هزینه به دانشجو و ۴) نسبت فضای آموزشی به دانشجو و سه خروجی ۱) نرخ فارغ‌التحصیلی، ۲) نرخ ماندگاری و ۳) نرخ پیشرفت در نظر گرفته شده است. رویز و همکاران نیز از این مجموعه از داده‌ها برای تحلیل مدل الگویابی مشترک خود استفاده کرده‌اند [۷]. (برای مشاهده توضیحات کامل‌تر در رابطه با ورودی‌ها و خروجی‌ها خواننده می‌تواند به [۷] مراجعه کند.)

با اجرای مدل (۴) با فرض بازده به مقیاس متغیر ۱۹ دانشگاه زیر به عنوان دانشگاه‌های کارا ارزیابی می‌شوند:

$E=\{1,2,5,6,9,10,14,15,16,18,23,29,32,33,36,37,39,40,41\}$.

حال فرض می‌کنیم که تصمیم‌گیرنده از بین همه دانشگاه‌های کارا دانشگاه U16 را به عنوان واحد با بیشترین ارجحیت انتخاب می‌کند. بنابراین می‌توان مدل (۹) را برای ارزیابی کارایی ارزش دانشگاه‌ها به‌کار گرفت. با اجرای این مدل تنها ۱۰ دانشگاه زیر به عنوان کارای ارزش ارزیابی می‌شوند:

$VE=\{1,2,5,6,9,15,16,18,29,37\}$.

در گام بعدی مدل الگویابی (۱۲) را برای سایر دانشگاه‌هایی که کارای ارزش نیستند، اجرا می‌کنیم. نتایج حاصل در جدول (۵) گزارش شده‌اند. به منظور مقایسه نتایج با روش الگویابی معمولی در تحلیل پوششی داده‌ها، نتایج حاصل از مدل الگویابی (۷) نیز در همین جدول گزارش شده‌اند. همان‌طور که پیش از این توضیح داده شد، در فرایند الگویابی با مدل (۱۲) شرط غالب بودن واحد الگو بر واحد تحت ارزیابی لزوما برقرار نیست و از این رو فرآیند الگویابی برای بعضی از واحدها احتمالاً مستلزم بده بستان بین ورودی‌ها و خروجی‌های آن خواهد بود. این حالت در الگوهای حاصل از مدل (۷) رخ نمی‌دهد. از این رو، به منظور درک بهتر بده بستان‌های احتمالی این وضعیت را نیز در جدول نشان داده‌ایم. علامت + نشان دهنده پیشرفت در شاخص مربوطه، علامت − نشان دهنده پسرفت و نبود هیچ‌یک از این دو علامت نشان دهنده بدون تغییر ماندن شاخص می‌باشد. با بررسی مقادیر داده شده در جدول (۵) نتایج زیر حاصل می‌شوند:

۱) برای تمامی واحدهای کارای ارزش الگوی حاصل از مدل (۱۲) بر خود واحد منطبق است. به‌علاوه برای این واحدها هر دو مدل (۷) و (۱۲) الگوهای یکسانی را مشخص می‌کنند.

۲) برای سایر واحدهای کارایی که کارای ارزش نیستند، مدل (۱۲) الگویی متفاوت از خود واحد تعیین می‌کند. مسلما بین هر واحد و الگوی متناظر با آن، بده بستان در (بعضی از) شاخص‌های آن وجود دارد.

۳) برای واحد U7 الگوی حاصل از هر دو مدل (۷) و (۱۲) بر هم منطبق هستند و این الگو نسبت به خود واحد U7 در تمامی شاخص‌ها بهبود نشان می‌دهد.

۴) برای واحد U8 الگوی حاصل از مدل (۱۲) در تمامی شاخص‌ها به جز ورودی دوم و خروجی دوم،

۴) بر خود واحد منطبق است و در این دو شاخص بده بستان مشاهده می‌شود.

۵) برای واحدهای U13، U33 و U35 الگوی حاصل از مدل (۱۲) در تمامی شاخص‌ها به جز در ورودی دوم بهبود را نشان می‌دهد. در مقابل برای U42 در تمامی شاخص‌ها به جز در خروجی دوم بهبود مشاهده می‌شود.

برای واحد U31 علی‌رغم این‌که دو مدل (۷) و (۱۲) الگوهای متفاوتی مشخص می‌کنند، اما این دو الگو تا حد زیادی نزدیک به هم بوده و هر دو در تمامی شاخص‌ها بهبود را نشان می‌دهند.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

موضوع الگویابی یکی از مباحث حائز اهمیت در علم مدیریت و تصمیم‌گیری می‌باشد. در این راستا تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر یک روش شناخته شده برای ارزیابی عملکرد، می‌تواند به عنوان یک ابزار مفید و کارآمد برای الگویابی نیز مورد استفاده قرار گیرد. همچنین مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها که به منظور ارزیابی عملکرد و الگویابی مورد استفاده قرار می‌گیرند، از انعطاف پذیری خوبی برخوردارند، به این مفهوم که این مدل‌ها می‌توانند به گونه‌ای تغییر یابند که ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده را نیز در در هر دو فرآیند ارزیابی عملکرد و الگویابی لحاظ نمایند. روش تحلیل کارایی ارزش یک راهکار برای لحاظ نمودن ارجحیت‌های تصمیم‌گیرنده است. در این مقاله یک روش برای یافتن نزدیک‌ترین الگوها به واحدهای تحت ارزیابی ارائه شد. این روش دارای این قابلیت است که برای هر واحد تحت ارزیابی نزدیک‌ترین واحد الگوی شدنی که کارای ارزش هم باشد، به عنوان واحد الگو تعیین نماید. لازم به ذکر است که برای هر واحد کارای ارزش، صرفنظر از این که آیا این واحد راسی هست یا نه، الگوی یافت شده توسط مدل بر خود واحد منطبق است. این مطلب در نتایج حاصل از مثال عددی و مثال کاربردی به وضوح مشخص است. همچنین در این روش الگویابی برای یافتن واحدهای الگو باید مدل الگویابی را یک بار برای هر واحد ناکارای ارزش حل نمود. به عنوان موضوع کارهای پژوهشی بعدی می‌توان به دنبال راهکاری بود که فرآیند الگویابی را همزمان برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده انجام دهد. همچنین می‌توان با پیروی از ایده مطرح شده در [۳۰و۳۱] موضوع الگویابی گام‌به‌گام را با رویکرد مطرح شده در این مقاله بررسی نمود. از طرف دیگر، همان‌طور که در مثال کاربردی نیز مشاهده می‌شود، در بعضی از واحدها شاخص‌های مربوط به الگوهای مشخص شده توسط مدل‌های ارائه شده نسبت به شاخص‌های متناظر در خود واحد تحت ارزیابی تفاوت قابل توجهی دارند. این امر ممکن است از نظر عملی قابل توجیه نباشد. در این حالت یه راهکار منطقی این است که با اعمال محدودیت(های) اضافی مدل را به گونه‌ای تغییر دهیم به‌طوری که میزان تغییر در هر شاخص در الگوی به‌دست آمده از حد مشخصی تجاوز ننماید. به عنوان موضوع کارهای بعدی می‌توان این هدف را در نظر گرفت و مدل‌های بهتری برای یافتن الگوهای مناسب طراحی نمود.

فهرست منابع

[1] M. J. Farrell. The measurement of productive efficiency. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General) 120(3): 253-290 (1957).

[2] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes. Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research 2 (6): 429-444 (1978).

[3] R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis, Management Science 30 (9): 1078-1092 (1984).

[4] J. Aparicio, J. L. Ruiz, I. Sirvent. Closest targets and minimum distance to the Pareto-efficient frontier in DEA. Journal of Productivity Analysis 28(3): 209-218 (2007).

[5] C. Baek, J. D. Lee. The relevance of DEA benchmarking information and the least-distance measure. Mathematical and Computer Modelling 49(1-2): 265-275 (2009).

[6] K. Ando, K., A. Kai, Y. Maeda, K. Sekitani. Least distance based inefficiency measures on the Pareto-efficient frontier in DEA. Journal of the Operations Research Society of Japan 55(1): 73-91 (2012).

[7] J. L. Ruiz, J. V. Segura, I. Sirvent. Benchmarking and target setting with expert preferences: An application to the evaluation of educational performance of Spanish universities. European Journal of Operational Research 242(2): 594-605 (2015).

[8] M. C. A. S., Portela, P. C. Borges, E. Thanassoulis. Finding closest targets in non-oriented DEA models: the case of convex and non-convex technologies. Journal of Productivity Analysis 19 (2-3): 251-269 (2003).

[9] R. Allen, A. Athanassopoulos, R. G. Dyson, E. Thanassoulis. Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions. Annals of operations research 73: 13-34 (1997).

[10] V. V. Podinovski, A. D. Athanassopoulos, Assessing the relative efficiency of decision making units using DEA models with weight restrictions. Journal of the Operational Research Society 49(5): 500-508 (1998).

[11] M. Halme, T. Joro, P. Korhonen, S. Salo, J. Wallenius. A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis. Management Science 45(1): 103-115 (1999).

[12] P. Korhonen, R. Tainio, J. Wallenius. Value efficiency analysis of academic research. European Journal of Operational Research 130(1): 121-132 (2001).

[13] T. Joro, P. Korhonen. Extension of data envelopment analysis with preference information. Springer 2015.

[14] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone. Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. Springer 2007.

[15] Y. H. Chung, R. Färe, S. Grosskopf. Productivity and undesirable outputs: a directional distance function approach. Journal of Environmental Management 51(3): 229-240 (1997).

[16] D. G. Luenberger. Benefit functions and duality. Journal of mathematical economics 21(5): 461-481 (1992).

[17] D. G. Luenberger. Microeconomic theory. McGraw Hill, Boston 1995.

[18] R. Färe, S. Grosskopf. Theory and application of directional distance functions. Journal of productivity analysis 13(2): 93-103 (2000).

[19] W. Briec. A graph-type extension of Farrell technical efficiency measures. Journal of Productivity Analysis 8: 95–111 (1997).

[20] W. Briec. Holder distance function and the measurement of technical efficiency. Journal of Productivity Analysis 11: 111–132 (1997).

[21] R. Fare, S. Grosskopf. New directions: efficiency and productivity. Kluwer, Boston 2004.

[22] N. Adler, N. Volta. Accounting for externalities and disposability: A directional economic environmental distance function. European Journal of Operational Research 250(1): 314-327 (2016).

[23] K. Wang, Y. Xian, C. Y. Lee, Y. M. Wei, Z. Huang. On selecting directions for directional distance functions in a non-parametric framework: A review. Annals of Operations Research. 1-34 (2017).

[24] R. Färe, S. Grosskopf. Directional distance functions and slacks-based measures of efficiency. European Journal of Operational Research 200(1): 320-322 (2010).

[25] R. Färe, S. Grosskopf. Directional distance functions and slacks-based measures of efficiency: Some clarifications. European Journal of Operational Research 206(3): 702-705 (2010).

[26] R. Färe, S. Grosskopf, G. Whittaker. Directional output distance functions: endogenous directions based on exogenous normalization constraints. Journal of Productivity Analysis 40(3): 267-269 (2013).

[27] R. E. Steuer. Multiple criteria optimization: Theory, Computation and Applications Wiley 1986.

[28] A. Charnes, W. W. Cooper, J. J. Rousseau, A. Schinnar. N. E. Terleckyj, D. Levy. A goal-focusing approach to intergenerational transfers of income. International Journal of Systems Sciences 17: 420-440 (1980).

[29] E. Zio, R. Bazzo. A comparison of methods for selecting preferred solutions in multiobjective decision making, In Computational intelligence systems in industrial engineering. Atlantis Press. Paris 2012.

[30] J. Park, H. Bae, S. Lim. Stepwise benchmarking path selection in DEA. In Intelligent Decision Technologies. Springer, Berlin, Heidelberg 2012.

[31] S. Lozano, G. Villa. Determining a sequence of targets in DEA. Journal of the Operational Research Society 56(12): 1439-1447 (2005).

[6] Miggen Cui, Yingzhen Lin.Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space.Nova Science Publishers, Inc (2008)

پیوست

برهان قضیه ۱. فرض کنیم $(\overline{X},\overline{Y})\in P^E$. پس چنانچه $(\overline{X},\overline{Y})$ را با مدل (۵) و تنها با درنظر گرفتن واحدهای کارا ارزیابی کنیم، جواب بهینه‌ای مانند (u^*,v^*,η^*) وجود دارد به طوری که:

$$\begin{cases}-u^*Y_j+v^*X_j+\eta^*a_j\ge 0, j\in E\\ (u^*,v^*)\ge 1_{m+s},\eta^*\ge 0.\end{cases}$$

و $-u^*\overline{Y}+v^*\overline{X}+\eta^*b=0$. از طرف دیگر چون $(\overline{X},\overline{Y})\in P$، پس $\overline{\lambda}\in\Lambda$ ی وجود دارد که

$$\begin{cases}\overline{X}\ge \sum_{j\in E}\overline{\lambda}_jX_j,\\ \overline{Y}\le \sum_{j\in E}\overline{\lambda}_jY_j.\end{cases}$$

حال از فرض کارا بودن $(\overline{X},\overline{Y})$ لازم می‌آید که نامساوی‌های فوق هر دو به‌صورت تساوی برقرارند. پس $(\overline{\lambda},\overline{\beta}=0,S^-=0,S^+=0)$ یک جواب شدنی برای مدل پوششی (۴) در ارزیابی $(\overline{X},\overline{Y})$ با مقدار تابع هدف صفر است و لذا جواب بهینه می‌باشد. با توجه به شرایط مکمل زاید برای این جفت جواب‌های بهینه باید داشته باشیم

$$\begin{cases}\overline{\lambda}_jd_j^*=0, j\in E,\\ \overline{\mu}_i\eta_i^*=0, i=1,\dots,k,\end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases}d_j^*=-u^*Y_j+v^*X_j+\eta^*a_j\ge 0, j\in E\\ \overline{\mu}=b-\sum_{j\in E}a_j\overline{\lambda}_j\ge 0.\end{cases}$$

از مطلب فوق نتیجه می‌شود که متغیرهای دودویی t_j برای $j\in E$ و l_i برای $i=1,\dots,k$ وجود دارند که در شرایط مطلوب صدق می‌کنند. بنابراین معلوم می‌شود که $(\overline{X},\overline{Y})$ به مجموعه سمت راست در (۶) تعلق دارد.
از طرف دیگر، اگر فرض کنیم $(\overline{X},\overline{Y})$ به مجموعه سمت راست در (۶) تعلق داشته باشد، با توجه به ساختار این مجموعه معلوم می‌شود که جواب‌های شدنی برای مسائل (۴) و (۵) در ارزیابی $(\overline{X},\overline{Y})$ وجود دارند که در شرط مکمل زاید هم صدق می‌کنند و لذا این جفت جواب برای مسائل متناظرشان بهینه‌اند. از طرف دیگر، به راحتی می‌توان دید که مقدار بهینه تابع هدف به ازای این جواب‌های شدنی برابر صفر است و لذا نتیجه می‌شود که $(\overline{X},\overline{Y})\in P^E$.

برهان قضیه ۲. الف) فرض کنیم بردارهای $(\lambda^*,\mu^*,S^{-*},S^{+*})$ و (U^*,V^*,η^*) به ترتیب جواب‌های بهینه برای زوج مسائل اولیه ــ دوگان (۹) و (۱۰) در ارزیابی DMU_o باشند. شرایط مکمل زائد برای این جفت از جواب‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases}\lambda_j^*(-U^*Y_j+V^*X_j+\eta^*a_j)=0, j=1,\dots,n\\ \eta_i^*\mu_i^*=0, i=1,..k\end{cases}$$

حال، به راحتی می‌توان نشان داد که بردارهای $(\overline{\lambda},\overline{S^-},\overline{S^+})$ و $(\overline{U},\overline{V},\overline{\eta})$ که

$$(\overline{\lambda},\overline{S^-},\overline{S^+})=(\lambda^*,0,0),$$
$$(\overline{U},\overline{V},\overline{\eta})=(U^*,V^*,\eta^*)$$

برای زوج مسائل اولیه ــ دوگان (۹) و (۱۰) که فعالیت (مجازی) $(\overline{X}_o,\overline{Y}_o)$ را ارزیابی می‌کند، شدنی هستند. همچنین، با توجه به شرایط مکمل زائد فوق می‌توان ملاحظه نمود که به ازای این جواب‌های شدنی، مقدار تابع هدف زوج مسائل اولیه– دوگان برابر صفر است. پس نتیجه می‌شود که این جواب‌ها برای مسائل متناظرشان بهینه هستند. این مطلب حکم را ثابت می‌کند.
ب) چون $\lambda_q^*\neq 0$، پس با توجه به شرایط مکمل زاید برای زوج جواب‌های بهینه $(\lambda^*,\mu^*,S^{-*},S^{+*})$ و (U^*,V^*,η^*) مسائل اولیه ــ دوگان (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$-U^*Y_q+V^*X_q+\eta^*a_q=0.$$

از طرفی در هر کدام از چهار حالت بازده به مقیاس CRS، VRS، DRS و IRS داریم $a_q=b$. پس معلوم می‌شود که بردار (U^*,V^*,η^*) یک جواب شدنی برای مساله (۱۰) در ارزیابی DMU_q با مقدار

تابع هدف صفر است و لذا جواب بهینه می‌باشد. از این مطلب حکم به وضوح نتیجه می‌شود.

برهان قضیه ۳. فرض کنیم $(\overline{X},\overline{Y}) \in P^{VE}$. یعنی $(\overline{X},\overline{Y})$ شدنی و کارای ارزش است. از شدنی بودن این فعالیت معلوم می‌شود که $\overline{\lambda} \in \Lambda$ ی وجود دارد که

$$\begin{cases} \overline{X} \geq \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j X_j, \\ \overline{Y} \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda}_j Y_j \end{cases}$$

از طرفی چون $(\overline{X},\overline{Y})$ کارای ارزش است، پس این فعالیت کارا هم هست. بنابراین نامساوی‌های فوق هر دو به صورت تساوی برقرارند. از این مطلب نتیجه می‌شود که بردار $(\overline{\lambda},\overline{\beta}=0, S^{-}=0, S^{+}=0)$ یک جواب شدنی برای مساله (۹) در ارزیابی $(\overline{X},\overline{Y})$ با مقدار تابع هدف صفر می‌باشد و لذا جواب بهینه است. از طرفی با توجه به قضیه ۲، به ازای هر j که DMU_j کارای ارزش نیست، داریم $\overline{\lambda}_j = 0$. پس می‌توان نوشت

$$\begin{cases} \overline{X} = \sum_{j \in VE} \overline{\lambda}_j X_j, \\ \overline{Y} = \sum_{j \in VE} \overline{\lambda}_j Y_j. \end{cases}$$

حال چون زوج مسائل (۹) و (۱۰) دوگان یکدیگرند، پس جواب بهینه‌ای مانند $(\overline{U},\overline{V},\overline{\eta})$ برای مساله (۹) وجود دارد که

$$\begin{cases} -\overline{u}^T Y_j + \overline{v}^T X_j + \overline{\eta}^T a_j \geq 0, j \in J^{MPS}, \\ -\overline{u}^T Y_j + \overline{v}^T X_j + \overline{\eta}^T a_j = 0, j \notin J^{MPS}, \end{cases}$$

و $-u^T Y_j + v^T X_j + \eta^T b = 0$. با توجه به ویژگی مکمل زاید برای این جفت از جواب‌های بهینه می‌توان نتیجه گرفت که متغیرهای دودویی t_j و l_i برای $j \in VE$ و $i = 1,\ldots,k$ وجود دارند که در ویژگی مطلوب صدق می‌کنند. بنابراین نتیجه می‌شود که $(\overline{X},\overline{Y})$ به مجموعه سمت راست در (۱۱) تعلق دارد و حکم ثابت می‌شود.

از طرف دیگر چنانچه فرض کنیم که $(\overline{X},\overline{Y})$ به مجموعه سمت راست در (۱۱) تعلق دارد، آن‌گاه ابتدا با توجه به شرط نامنفی بودن متغیرهای در مجموعه سمت راست، معلوم می‌شود که این فعالیت یک فعالیت شدنی است. از طرف دیگر در ارزیابی این فعالیت با مدل (۹) یک جواب شدنی با مقدار تابع هدف برابر صفر خواهیم داشت که نتیجه می‌دهد این جواب بهینه است و لذا فعالیت $(\overline{X},\overline{Y})$ کارای ارزش هم می‌باشد.

جدول ۵. نتایج حاصل از مدل‌های (۷) و (۱۲) در الگویابی برای دانشگاه‌ها

واحد تصمیم گیرنده	ورودی۱	ورودی۲	ورودی۳	ورودی۴	خروجی۱	خروجی۲	خروجی۳
DMU1	**0.091**	**0.063**	**6965.57**	**2.08**	**28.05**	**87.11**	**59.53**
DMU2	**0.113**	**0.107**	**11774.05**	**2.25**	**38.58**	**71.59**	**73.17**
DMU3	**0.11**	**0.065**	**10104.2**	**5.19**	**38.98**	**75.19**	**63.71**
(7),(12)	0.107(+)	0.083(-)	10104.2	2.578(+)	38.98	76.657(+)	69.04(+)
DMU4	**0.092**	**0.058**	**8105.93**	**3.31**	**32.57**	**87.98**	**62.67**
(7)	0.096(-)	0.063(-)	8105.93	2.833(+)	32.57	86.917(-)	63.969(+)
(12)	0.097(-)	0.067(-)	8105.93	2.490(+)	32.57	86.123(-)	64.118(+)
DMU5	**0.102**	**0.047**	**8926.92**	**3.63**	**43.74**	**81.00**	**70.31**
DMU6	**0.109**	**0.067**	**10203.00**	**2.65**	**34.7**	**83.7**	**69.91**
DMU7	**0.111**	**0.06**	**7781.98**	**7.3**	**31.19**	**79.31**	**61.81**
(7),(12)	0.089(+)	0.058(+)	7781.98	2.453(+)	31.19	81.786(+)	63.453(+)
DMU8	**0.097**	**0.051**	**7798.51**	**3.87**	**31.05**	**82.00**	**66.64**
(7)	0.088(+)	0.057(-)	7798.51	2.645(+)	31.05	82	66.72(+)
(12)	0.097	0.055(-)	7798.51	2.361(+)	31.05	82.00	66.64
DMU9	**0.104**	**0.041**	**8095.7**	**2.1**	**31.98**	**73.26**	**75.65**
DMU10	**0.091**	**0.054**	**8135.32**	**6.08**	**45.42**	**92.81**	**68.66**
(12)	0.091	0.057(-)	8135.32	4.902(+)	44.16(-)	85.665(-)	69.20(+)
DMU11	**0.123**	**0.074**	**10463.68**	**5.68**	**36.65**	**82.47**	**65.29**
(7),(12)	0.109(+)	0.073(+)	10463.68	2.748(+)	36.65	82.367(-)	71.117(+)
DMU12	**0.137**	**0.086**	**11068.05**	**4.14**	**46.38**	**74.18**	**71.96**
(7),(12)	0.109(+)	0.094(-)	11068.05	3.383(+)	46.38	78.215(+)	75.471(+)
DMU13	**0.139**	**0.089**	**12664.43**	**5.07**	**37.00**	**80.00**	**72.23**
(7),(12)	0.113(+)	0.107(-)	11774.05(+)	2.25(+)	38.58(+)	71.59(-)	73.17(+)
DMU14	**0.094**	**0.048**	**6189.66**	**6.77**	**39.00**	**81.00**	**65.17**
(12)	0.083(+)	0.039(+)	6498.810(-)	4.860(+)	36.87(-)	86.25(+)	62.30(-)
DMU15	**0.082**	**0.054**	**7214.39**	**2.37**	**27.77**	**83.00**	**62.59**
DMU16	**0.1**	**0.057**	**8296.78**	**2.68**	**37.47**	**81.00**	**63.54**
DMU17	**0.099**	**0.058**	**7295.94**	**2.68**	**28.00**	**84.00**	**61.42**
(7)	0.09(+)	0.05(+)	7295.94	2.826(-)	28	83.107(-)	61.42
(12)	0.086(+)	0.059(-)	7295.94	2.265(+)	28.264(+)	84.00	61.922(+)
DMU18	**0.083**	**0.039**	**6498.81**	**4.86**	**36.87**	**86.25**	**62.3**
DMU19	**0.104**	**0.063**	**8984.53**	**2.71**	**32.17**	**86.61**	**59.51**
(7),(12)	0.102(+)	0.065(-)	8984.53	2.435(+)	32.197(+)	84.983(-)	66.003(+)
DMU20	**0.084**	**0.048**	**6572.31**	**5.99**	**31.68**	**86.21**	**57.54**
(7)	0.083(+)	0.041(+)	6572.31	4.64(+)	35.08(+)	85.621(-)	61.755(+)
(12)	0.084	0.043(+)	6572.31	4.422(+)	35.481(+)	86.385(+)	61.864(+)
DMU21	**0.091**	**0.058**	**8115.25**	**5.51**	**38.05**	**81.78**	**65.74**
(7)	0.094(-)	0.046(+)	8115.25	3.432(+)	38.05	81.78	65.74
(12)	0.096(-)	0.051(+)	8115.25	3.229(+)	38.05	81.78	65.74
DMU22	**0.089**	**0.05**	**7705.89**	**3.68**	**31.95**	**80.64**	**56.00**

(7)	0.085(+)	0.046(+)	7705.89	3.942(-)	35.172(+)	83.484(-)	59.258(+)
(12)	0.090(-)	0.056(-)	7705.89	2.50(+)	31.95	82.070(-)	63.071(+)
DMU23	**0.079**	**0.053**	**7178.51**	**2.83**	**20.32**	**80.43**	**57.26**
(12)	0.083(-)	0.055(-)	7178.51	2.328(+)	27.810(+)	83.593(+)	62.149(+)
DMU24	**0.086**	**0.042**	**7558.63**	**5.14**	**36.00**	**79.00**	**64.19**
(7)	0.091(-)	0.043(-)	7558.63	3.627(+)	36	81.884(+)	64.19
(12)	0.093(-)	0.049(-)	7558.63	3.374(+)	36.00	82.270(+)	64.19
DMU25	**0.086**	**0.054**	**6854.68**	**3.09**	**26.09**	**84.43**	**59.54**
(7)	0.086	0.051(+)	6854.68	3.052(+)	28.664(+)	84.43	60.692(+)
(12)	0.089(-)	0.057(-)	6854.68	2.740(+)	30.145(+)	86.906(+)	60.188(+)
DMU26	**0.102**	**0.053**	**8214.85**	**8.22**	**32.1**	**78.4**	**58.73**
(7),(12)	0.092(+)	0.063(-)	8214.85	2.437(+)	32.1	80.691(+)	64.483(+)
DMU27	**0.139**	**0.091**	**14071.92**	**6.37**	**16.24**	**73.67**	**69.6**
(7),(12)	0.113(+)	0.107(-)	11774.05(-)	2.25(+)	38.58(+)	71.59(-)	73.17(+)
DMU28	**0.124**	**0.096**	**9893.47**	**6.52**	**19.7**	**80.97**	**51.83**
(7)	0.113(+)	0.043(+)	9893.47	6.727(-)	43.015(+)	82.354(+)	57.575(+)
(12)	0.106(+)	0.078(+)	9893.47	2.398(+)	34.255(+)	80.97	68.398(+)
DMU29	**0.108**	**0.095**	**11536.09**	**4.99**	**59.3**	**84.45**	**83.54**
DMU30	**0.11**	**0.081**	**9606.85**	**4.88**	**8.54**	**86.00**	**59.4**
(7)	0.111	0.042(+)	9606.85	6.57(-)	42.496(+)	82.683(-)	57.974(-)
(12)	0.106(+)	0.066(+)	9606.85	2.545(+)	33.475(+)	84.328(-)	67.999(+)
DMU31	**0.126**	**0.08**	**10397.93**	**10.77**	**46.04**	**82.94**	**72.59**
(7)	0.107(+)	0.078(+)	10397.93	3.646(+)	46.04	82.94	74.423(+)
(12)	0.107(+)	0.077(+)	10397.93	3.681(+)	46.04	83.478(+)	74.58(+)
DMU32	**0.099**	**0.049**	**7693.97**	**2.91**	**17.28**	**82.15**	**70.62**
(12)	0.097(+)	0.056(-)	7693.97	2.149(+)	30.079(+)	82.15	66.004(-)
DMU33	**0.115**	**0.043**	**10062.1**	**6.82**	**43.32**	**82.16**	**57.34**
(12)	0.106(+)	0.073(-)	10062.1	3.401(+)	43.32	83.139(+)	72.349(+)
DMU34	**0.11**	**0.061**	**9609.94**	**4.6**	**27.08**	**84.26**	**60.97**
(7)	0.107(+)	0.063(-)	9609.94	2.711(+)	30.582(+)	83.334(-)	70.078(+)
(12)	0.106(+)	0.066(-)	9609.94	2.546(+)	33.482(+)	84.325(+)	68.009(+)
DMU35	**0.114**	**0.072**	**10203.87**	**4.52**	**43.00**	**71.36**	**63.14**
(7),(12)	0.106(+)	0.082(-)	10203.87	3.086(+)	43	78.73(+)	71.431(+)
DMU36	**0.091**	**0.055**	**9915.63**	**6.34**	**49.68**	**85.19**	**72.72**
(12)	0.101(-)	0.081(-)	9915.63	4.332(+)	49.68	85.256(+)	75.662(+)
DMU37	**0.112**	**0.068**	**9039.19**	**4.35**	**47.64**	**74.05**	**68.02**
DMU38	**0.092**	**0.059**	**9011.39**	**9.4**	**31.45**	**74.00**	**64.42**
(7),(12)	0.094(-)	0.075(-)	9011.39	2.323(+)	32.03(+)	78.503(+)	66.76(+)
DMU39	**0.084**	**0.049**	**7041.43**	**2.48**	**22.56**	**80.47**	**60.46**
(12)	0.088(-)	0.060(-)	7041.43	2.168(+)	27.965(+)	85.857(+)	60.463(+)
DMU40	**0.081**	**0.047**	**7246.77**	**7.62**	**43.4**	**82.68**	**64.16**
(12)	0.092(-)	0.048(-)	7246.77	4.711(+)	40.042(-)	82.680	63.994(-)

DMU41	**0.083**	**0.044**	**7169.41**	**3.36**	**31.65**	**83.07**	**55.99**
(12)	0.085(-)	0.050(-)	7169.41	3.101(+)	31.65	83.615(+)	62.644(+)
DMU42	**0.14**	**0.087**	**10415.46**	**5.22**	**35.45**	**83.37**	**68.46**
(7),(12)	0.109(+)	0.072(+)	10415.46	2.624(+)	35.45	82.179(-)	70.466(+)