دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مدل توسعه یافته SBM با داده‌هایی با ارزش غیرخطی در تحلیل پوششی داده‌ها با رویکرد اصول موضوعه

محسن واعظ قاسمی[1*]، زهره مقدس[2]

(۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رشت، رشت، ایران
(۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۴/۱۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۲۵

چکیده

از جمله اهداف مهم بانک‌ها به عنوان بنگاه‌های اقتصادی مهم هر کشوری افـزایش کـارایی اقتصادی است. رویکرد کلاسیک مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی عملکرد ارزش گزاری خطی را برای تمام شاخص‌ها در نظر می‌گیرد. اما ارزش گزاری خطی در بسیاری از مثال‌های کاربردی دنیای اطراف ما نشان دهنده ماهیت غیرخطی شاخص‌ها نیست. لذا در این مقاله با رویکرد اصول موضوعه مدل مبنی بر متغیرهای کمکی معرفی شده است که برخی از ورودی و خروجی‌ها در آن ارزش غیرخطی دارند. بعد بررسی با رویکرد به اصول موضوعه مدل ارزیابی کارایی معرفی شده است. قضایای مربوط به کارایی و الگویابی و ارتباط با مدل‌های کلاسیک نیز بررسی و اثبات شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: کارایی غیرشعاعی، اصول موضوعه، تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌ها با ارزش غیرخطی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mohsen.vaez@gmail.com

۱. مقدمه

از جمله بنگاه‌های اقتصادی مهم در کشور صنعت بانکداری است که در اقتصاد هر کشوری نقش بسزایی دارد. تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها که روشی بر مبنای برنامه‌ریزی ریاضی می‌باشد ابزار بسیار قدرتمندی به منظور ارزیابی کارایی اقتصادی است که در ارزیابی عملکرد بانک‌ها و موسسات مالی بسیار استفاده شده است. از جمله محاسن این روش در نظر گرفتن شاخص‌های متعدد ورودی و خروجی می‌باشد. تحلیل پوششی داده‌ها یک روش نا پارامتری برمبنای برنامه ریزی ریاضی برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که اولین بار توسط فارل در سال ۱۹۵۷ معرفی شد. با توسعه روش فارل در سال ۱۹۷۶ چارنز و همکاران مدل CCR را پیشنهاد دادند که ارزیابی کارایی را با فرض بازده به مقیاس ثابت انجام می‌داد. با توسعه این روش و در نظر گرفتن بازده به مقیاس متغیر در سال ۱۹۸۴، بنکر و همکاران مدل BCC را معرفی کردند. تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها با در نظر گرفتن چندین واحد تصمیم گیرنده به جای مقایسه یک به یک واحدها، با تشکیل مرز کارایی به کمک واحدهای تصمیم گیرنده کارا هر یک از واحدها را با این مرز می‌سنجد. در این ارزیابی یک واحد تصمیم گیرنده کار معرفی می‌شود هرگاه واحد مجازی‌ای وجود نداشته باشد که با همان مقدار خروجی واحد مورد ارزیابی را با مقدار داده کمتری تولید کنند به عبارتی هرگاه توسط واحدی روی مرز کارایی مغلوب نشود. اگر واحد کارا نباشد آن واحد ناکار معرفی می‌شود. مدل‌های ارزیابی می‌توانند این ارزیابی را برای ورودی‌ها یا خروجی‌ها بکار ببرند که این روش‌ها را به ترتیب ورودی و خروجی محور می‌نامند.

مدل‌های CCR و BCC برای ارزیابی و معرفی واحدهای الگو پاراتو کارا باید در دو فاز حل شوند. از جمله مدل‌های معروف در تحلیل پوششی داده‌ها مدل مبنی بر متغیرهای کمکی SBM است که توسط تون ۲۰۰۰ با بازده به مقیاس‌های متفاوت معرفی شد و ارزیابی کارایی و الگویابی را در یک فاز انجام می‌دهد. این مدل هر دو ماهیت ورودی و خروجی را در ارزیابی در نظر می‌گیرد. در ادامه تون ۲۰۰۱ مدل ابر کارایی SBM را برای رتبه‌بندی واحد های تصمیم‌گیرنده معرفی کرد تا بتوان تا جای ممکن واحدهای کارا را نیز رتبه‌بندی کند. همچنین تون مدل شبکه‌ای تحلیل پوششی داده‌های ۲۰۰۹ را برای مدل غیر شعاعی SBM توسعه داد. همچنین تون مدل پویای SBM را نیز در سال ۲۰۱۰ معرفی کرد. همپچنین ترکیب‌ای از مدل شبکه‌ای و پویای SBM را نیز در ۲۰۱۴ ارائه شده است.

در این مقاله برای ارزیابی شعب یک بانک این موضوع مورد بررسی قرار گرفته است که در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها مجموع خروجی (ورودی) تابعی خطی از خروجی‌ها (ورودی‌ها) تعریف می‌شود. در صورتی که در بسیاری از مثال‌ها ورودی و خروجی‌هایی وجود دارند که ارزش غیرخطی دارند به این مفهوم که ارزش آن‌ها بر مبنای مقدار آن‌ها در تغییر است. ارزیابی واحدها تصمیم گیرنده در حضور ورودی و خروجی‌هایی که ارزش غیرخطی دارند ولی ارزش گذاری خطی برای آن‌ها انجام می‌شود نتایج درستی به دست نمی‌دهد. به این منظور در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها توسعه ای انجام گرفت و در حضور چنین شاخص‌هایی به ارزیابی عملکرد و الگویابی پرداخته شد، حسین‌زاده ۲۰۱۳. در این مقاله با رویکرد اصول موضوعه به ارائه مدلی مبنی بر متغیرهای کمکی پرداخته خواهد شد و سپس ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده در حضور ورودی و خروجی‌هایی که ارزش حاشیه‌ای غیر خطی دارند با مدل تعمیم یافته SBM که در این مقاله معرفی می‌شود.

در ادامه به معرفی مقدمات تحلیل پوششی داده پرداخته خواهد شد. در بخش بعد مدل مبنی بر متغیرهای کمکی در تحلیل پوششی داده‌ها در حضور ورودی و خروجی‌هایی با ارزش غیرخطی با رویکرد اصول موضوعه معرفی می‌شود. سپس مثال کاربردی از بانکداری و در آخر نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲. مفاهیم مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها

واحد تصمیم‌گیرنده، عبارت است از واحدی که با دریافت بردار ورودی مانند $(x_1,...,x_m)$، بردار خروجی $(y_1,...,y_s)$ را تولید می‌کند. منظور از واحدهای تصمیم‌گیرنده متجانس این است که واحدها عمل مشابه

دارند و با دریافت ورودی‌های با جنس مشابه، خروجی‌های با جنس مشابه تولید می‌کنند. مانند شعبات یک بانک، کارخانجات یک شرکت خاص یا ادارات یک سازمان دولتی. کارایی درلغت به معنای خوب کار کردن، تحت تأثیر شاخص‌های درون سازمانی مثل سود هر واحد، فروش هر واحد و از این قبیل است.
در تکنیک DEA مجموعه فعالیت‌های شدنی، مجموعه امکان تولید نامیده شده و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = \{(X, Y) \in R^{m+s} \;\; X \geq 0 \text{ بتواند به وسیله } Y \geq 0 \text{ تولید شود: } \}. \quad (1)$$

با فرض بازده به مقیاس ثابت مجموعه فعالیت‌های شدنی T را با نماد T_{CCR} نشان می‌دهند. مدل‌های DEA هر کدام به یک مجموعه امکان تولید یکتا وابسته هستند که مجموعه امکان تولید نیز به‌طور یکتا، توسط یک مجموعه از فرض‌ها و اصول معین ساخته می‌شود. مدل CCR اولین مدل DEA است که برای اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در سال ۱۹۷۸ توسط چارنزو همکاران ارایه شد.

$$\begin{array}{ll} Min & \theta \\ s.t. & \\ & (\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR} \end{array} \quad (2)$$

با توجه به تعریف کارایی نسبی و اصل شهودی تجرید و با توجه به اینکه $(\theta X_o, Y_o) \in T_{CCR}$، مدل (۲)، به مدل (۳) تبدیل می‌شود. مدل (۳)، که به مدل دو فازی CCR در فرم پوششی با ماهیت ورودی معروف است، همواره شدنی بوده و جواب بهینه متناهی دارد و کقدار بهین تابع هدف در شرط $0 < \theta^* \leq 1$ صدق می‌کند. پس از انجام ارزیابی در دو فاز واحد الگوی پاراتو کارا از رابطه $(\theta X_o - S^-, Y_o + S^+) \in T_{CCR}$ محاسبه می‌گردد.

$$\begin{array}{ll} Min & \theta - \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, \quad (3) \\ & i=1,\ldots,m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \\ & r=1,\ldots,s, \\ & \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,\ldots,n, \\ & s_r^+ \geq 0, s_i^- \geq 0 \qquad r=1,\ldots,s, i=1,\ldots,m. \end{array}$$

شرط لازم کارا بودن واحد تحت ارزیابی در مدل فوق این است که $\theta^* = 1$.$\theta^* = 1$، به این معنی است که امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های DMU_o، در مجموعه امکان تولید T_{CCR} وجود ندارد. اگر $\theta^* < 1$، آن‌گاه DMU_o، ناکارا در ماهیت ورودی است و $(1-\theta^*)$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی است. DMU_o، کارای قوی CCR گویند اگر و فقط اگر توسط هیچ DMUی عضو T_{CCR} مغلوب نگردد یعنی $\theta^* = 1, S^{+*} = 0, S^{-*} = 0$.

تون ۲۰۰۰ با در نظر گرفتن هم زمان تمام ناکارایی‌هایی ممکن در ورودی و خروجی‌ها مدل SBM را معرفی کرد که در یک فاز به ارزیابی کارایی می‌پردازد.

$$\begin{array}{ll} Min & \rho = \dfrac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}}} \\ s.t. & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \\ & i=1,\ldots,m, \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad (4) \\ & r=1,\ldots,s, \\ & \lambda_j \geq 0, \qquad j=1,\ldots,n, \\ & s_r^+ \geq 0, s_i^- \geq 0 \qquad r=1,\ldots,s, i=1,\ldots,m. \end{array}$$

با در دست داشتن جواب بهین مدل فوق واحد پاراتو کارا از رابطه $(X_o - S^{-*}, Y_o + S^{+*})$ به دست می‌آید.

۳. رویکرد اصول موضوعه در فرموله کردن مدل غیرشعاعی DEA در حضور داده‌هایی با ارزش غیرخطی

در این بخش به معرفی مدل‌ای جهت ارزیابی کارایی به کمک متغیرهای کمکی ورودی و خروجی پرداخته خواهد شد. تن ۲۰۰۰ برای بدست آوردن اندازه کارایی به نحوی که تمامی ناکارایی واحدها در نظر گرفته شود مدل SBM را معرفی کرده است. در این مدل متغیرهای کمکی ورودی و خروجی، همزمان، برای بدست آوردن اندازه کارایی در نظر گرفته شده است. این مدل، که در رده مدل‌های غیر شعاعی قرار می‌گیرد، در قیاس با مدل‌های شعاعی دارای مزایای بسیاری می‌باشد، تن ۲۰۰۰.

آن‌چه در این بخش حائز اهمیت است این است که در بسیاری از مثال‌های دنیای پیرامون ما این امکان وجود دارد که همزمان ورودی و خروجی‌هایی با ارزش غیرخطی وجود داشته باشد. در ارزیابی چنین سیستم‌هایی ارزش گزاری خطی داده‌ها شامل بروز خطا در محاسبات می‌شود زیرا تمام زوایای ماهیتی این نوع داده‌ها را در ارزیابی در نظر نمی‌گیرد.

فرض کنید در میان ورودی و خروجی‌ها، ورودی و خروجی‌هایی وجود دارند که ارزش غیرخطی دارند. همچنین $k'_r, r \in R(R=\{1,\dots,s\})$ را تعداد زیر بازه‌هایی مانند $(L_{k_{r-1}}, L_{k_r}]$ به ازای افراز محدوده تغییرات خروجی r ام که ارزش غیرخطی دارد قرار دهید. همچنین فرض کنید $k_i, i \in I, (I=\{1,\dots,m\})$ تعداد زیر بازه‌هایی مانند $(L_{k_{i-1}}, L_{k_i}]$ باشد که به ازای آن‌ها افراز محدوده تغییرات ورودی i ام، ارزش غیرخطی دارد.

بنابر آن چه گفته شد هر یک از زیر بازه‌های متناظر ورودی و خروجی‌هایی که ارزش غیرخطی دارد به صورت زیر تعریف می‌شود.

اگر $y_{rj}^{k'_r} \in (L_{k_{f-1}}, L_{k_f}]$ و $x_{ij}^{k_i} \in (L_{k_{d-1}}, L_{k_d}]$ آن‌گاه $x_{ij}^{k_i}$ و $y_{rj}^{k'_r}$ را به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{rj}^{k'_r} = \begin{cases} L_{k'_r} & if \quad k'_r = 1 \\ L_{k'_r} - L_{k'_r - 1} & if \quad k'_r = 2,\dots,k'_{f-1} \\ y_{rj} - L_{k'_{r-1}} & if \quad k'_r = k'_f \\ 0 & if \quad k'_r > k'_f \end{cases}$$

(۵)

$$x_{ij}^{k_i} = \begin{cases} L_{k_i} & if \quad k_i = 1 \\ L_{k_i} - L_{k_{i-1}} & if \quad k_i = 2,\dots,k_{d-1} \\ x_{ij} - L_{k_{i-1}} & if \quad k_i = k_d \\ 0 & if \quad k_i > k_d \end{cases}$$

در این صورت مجموعه امکان تولید با ورودی و خروجی‌های قطعه‌ای خطی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{pl} = \{(x^{k_i} : i \in I, y^{k'_r} : r \in R)^t \mid \text{را تولید کند } y^{k'_r}, x^{k_i}\} \quad (۶)$$

که در آن:

$$k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}$$

و

$$\sum_{k_i=1}^{l_{k_i}} x_i^{k_i} = x_i, i \in I,$$
$$\sum_{k'_r=1}^{l_{k'_r}} y_r^{k'_r} = y_r; r \in R \quad (۷)$$

توجه داشته باشید که رابطه بالا طبق (۵) برقرار است. طبق آن چه تا بحال تعریف شده است مجموعه امکان تولید قطعه‌ای خطی تجمعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$T_{pl}^{A} = \{(x, y)^t \mid \text{را تولید کند } y, x\} \quad (۸)$$

آن‌چه حائز اهمیت است این است که بین T_{pl} و T_{pl}^A یک تناظر یک به یک برقرار است. برای هر عضو از T_{pl} یک عضو منحصر به فرد از T_{pl}^A وجود دارد که

طبق (۵) به دست می‌آید. همچنین برای هر عضو $T_{pl}{}^{A}$ یک عضو یکتا از T_{pl} موجود می‌باشد که طبق (۷) به دست می‌آید.

به عنوان مثال واحدهای $DMU_1 = (25,73)$ و $DMU_2 = (18,56)$ را در نظر بگیرید که هر کدام از ورودی و خروجی‌های آن‌ها به ترتیب دارای زیر بازه‌هایی به صورت $(40,\infty]$، $[15,40]$، $[0,15]$ و $[60,\infty)$، $[0,60]$ می‌باشند. بنابراین طبق (۵) خواهید داشت $DMU_1 = (15,10,0,60,13)$ و $DMU_2 = (15,3,0,56,0)$ که هر کدام متعلق به T_{pl} است. همچنین به ازای $DMU_1 = (15,10,0,60,13)$ و $DMU_2 = (15,3,0,56,0)$ از T_{pl}، با توجه به رابطه (۷)، خواهید داشت $DMU_1 = (25,73)$ و $DMU_2 = (18,56)$ که متعلق به $T_{pl}{}^{A}$ می‌باشند.

طبق تعریف ارائه شده برای $T_{pl}{}^{A}$ و آن چه در رابطه با اصول موضوعه DEA در ادبیات موضوع آمده است، لازم به ذکر است که $T_{pl}{}^{A}$ در اصول موضوعه DEA صدق می‌کند.

لازم به ذکر است که لزومی به این که تمامی ورودی‌ها خروجی‌ها با ارزش غیرخطی باشند نیست بلکه می‌توان هم زمان داده‌هایی با ارزش غیرخطی و خطی داشت. به این ترتیب تنها کافی است که هر یک از مجموعه‌های ورودی و خروجی را به ترتیب به دو زیر مجموعه تقسیم شود که I_1 و R_1 دارای ارزش خطی و I_2 و R_2 دارای ارزش غیرخطی هستند. در این صورت تمامی روابطی که در DEA کلاسیک برقرار بودند به ازای I_1 و R_1 نیز برقرار می‌باشند. حال به بررسی اصول موضوعه در T_{pl} پرداخته می‌شود و مجموعه امکان تولید تحت شرط بازده به مقیاس ثابت، $T_{pl}{}^{c}$، ساخته می‌شود.

ناتهی بودن (شمول): با توجه به روابط (۵) و (۷) رابطه زیر برقرار است:

$$(x_{io}{}^{k_i} : i \in I, y_{ro}{}^{k'_r} : r \in R)^t \in T^{c}{}_{pl}, \quad k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \qquad (۹)$$

اگر و فقط اگر

$$(x_{io}, y_{ro})^t \in T^{A}{}_{pl}, i \in I, r \in R$$

بی کرانی اشعه: با توجه به اصول برنامه‌ریزی قطعه‌ای خطی باید توجه داشت که زیر بازه‌های معرفی شده بایستی در محدوده تعریف شده و به ترتیب مقدار اختیار کنند. لازم به ذکر است که زیر بازه‌های بالایی به شرطی می‌توانند مقدار بگیرند که زیر بازه‌های پایینی پر شده باشند و در هنگام کسر شدن، ابتدا زیر بازه‌های بالایی مقدار از دست می‌دهند و سپس زیر بازه‌های پایین‌تر به ترتیب و در محدوده تعریف شده مقدار از دست می‌دهند به این منظور:

فرض کنید DMU_o مفروض است در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$(x_{io}{}^{k_i} : i \in I, y_{ro}{}^{k'_r} : r \in R)^t \in T^{c}{}_{pl}, \quad k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \Rightarrow (x_{io}, y_{ro})^t \in T^{A}{}_{pl}, i \in I, r \in R \qquad (۱۰)$$

از آن جایی که در $T_{pl}{}^{A}$ اصل بی‌کرانی اشعه (بازده به مقیاس ثابت) برقرار است لذا:

$$\forall \lambda (\lambda > 0), (\lambda x_{io}, \lambda y_{ro})^t \in T^{A}{}_{pl}, \quad i \in I, r \in R \qquad (۱۱)$$

حال قرار دهید:

$$(\lambda x_{io}, \lambda y_{ro})^t = (\bar{x}_{io}, \bar{y}_{ro})^t, \quad i \in I, r \in R \qquad (۱۲)$$

در این صورت بنا به روابط (۵) خواهید داشت:

$$(\bar{x}_{io}{}^{k_i} : i \in I, \bar{y}_{ro}{}^{k'_r} : r \in R)^t \in T^{c}{}_{pl}, \quad k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \qquad (۱۳)$$

تحدب: فرض کنید DMU_p و DMU_o مفروض می‌باشند.

$$(x_{io}^{k_i}: i\in I, y_{ro}^{k'_r}: r\in R)^t \in T^c{}_{pl},\quad (x_{ip}^{k_i}: i\in I, y_{rp}^{k'_r}: r\in R)^t \in T^c{}_{pl},\quad k_i=1,\dots,l_{k_i}, k'_r=1,\dots,l_{k'_r} \tag{۱۴}$$

با توجه به روابط (۷) رابطه زیر برقرار است:

$$(x_{io}, y_{ro})^t \in T_{pl}{}^A, (x_{ip}, y_{rp})^t \in T_{pl}{}^A,\quad i\in I, r\in R$$

که در آن:

$$x_{io}=\sum_{k_i=1}^{l_{k_i}} x^{k_i}{}_{io}, y_{ro}=\sum_{k'_r=1}^{l_{k'_r}} y^{k'_r}{}_{ro},\quad i\in I, r\in R,\quad x_{ip}=\sum_{k_i=1}^{l_{k_i}} x^{k_i}{}_{ip}, y_{rp}=\sum_{k'_r=1}^{l_{k'_r}} y^{k'_r}{}_{rp},\quad i\in I, r\in R \tag{۱۵}$$

بنابراین از آن جایی که در $T_{pl}{}^A$ اصل تحدب برقرار است لذا:

$$\forall\lambda(\lambda\in(0,1)), (\lambda x_{io}+(1-\lambda)x_{ip}, \lambda y_{ro} +(1-\lambda)y_{rp})^t \in T^A{}_{pl},\quad i\in I, r\in R \tag{۱۶}$$

حال قرار دهید:

$$(\lambda x_{io}+(1-\lambda)x_{ip}, \lambda y_{ro}+ (1-\lambda)y_{rp})^t = (\hat{x}_i, \hat{y}_r),\quad i\in I, r\in R \tag{۱۷}$$

بنابراین با توجه به روابط (۷) رابطه زیر برقرار است:

$$(\hat{x}_i^{k_i}: i\in I, \hat{y}_r^{k'_r}: r\in R)^t \in T^c{}_{pl},\quad k_i=1,\dots,l_{k_i}, k'_r=1,\dots,l_{k'_r} \tag{۱۸}$$

امکان پذیری: فرض کنید $DMU_o \in T_{pl}{}^c$ حال $DMU_p \in T_{pl}{}^c$ را با ورودی بیشتر و خروجی کمتر در نظر بگیرید.

$$DMU_o=(x_{io}^{k_i}: i\in I, y_{ro}^{k'_r}: r\in R)^t \in T^c{}_{pl},\quad k_i=1,\dots,l_{k_i}, k'_r=1,\dots,l_{k'_r},\quad DMU_p=(x_{ip}^{k_i}: i\in I, y_{rp}^{k'_r}: r\in R)^t \in T^c{}_{pl},\quad k_i=1,\dots,l_{k_i}, k'_r=1,\dots,l_{k'_r} \tag{۱۹}$$

تعریف ۱: با مفروضات عنوان شده در اصل امکان پذیری روابط زیر تعریف می‌شود.

$$x_{ip}^{k_i} \geq^* x_{io}^{k_i}:\quad i\in I, k_i=1,\dots,l_{k_i},\quad y_{rp}^{k'_r} \leq^* y_{ro}^{k'_r}:\quad r\in R, k'_r=1,\dots,l_{k'_r} \tag{۱۹}$$

با توجه به روابط ذکر شده، $x_{ip}^{k_i} \geq^* x_{io}^{k_i}: i\in I, k_i=1,\dots,l_{k_i}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & x_{io}^{ki} = x_{ip}^{k_i} - s_i^{-ki}, && i\in I, k_i=l_{k_i},\dots,1 \\ & s_i^{-ki} \leq x_{io}^{ki}(1-w_{k_i}), && i\in I, k_i=l_{k_i},\dots,1 \\ & w_{k_i-1} \leq (x_{io}^{ki} - s_i^{-ki}).M, && i\in I, k_i=l_{k_i},\dots,2 \\ & (x_{io}^{ki} - s_i^{-ki}) \leq w_{k_i-1}.M, && i\in I, k_i=l_{k_i},\dots,2 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

متغیر دودویی W و M کمک می‌کنند که زیر بازه‌ها به ترتیب و در محدوده تعریف شده از مقدارشان کم شود. در ابتدا در روابط فوق قرار دهید $w_{l_{k_i}}=0$ و M را یک عدد مثبت M بزرگ" فرض کنید. متغیر دودیی w_{k_i}

متغیرهای کمکی ورودی را طوری هدایت می‌کند که به ترتیب و در محدوده تعریف شده مقدار از دست بدهند. توجه داشته باشید که برای کاهش ورودی از بالاترین زیر بازه انجام می‌شود و به ترتیب و در محدوده تعریف شده زیر بازه‌ها خالی می‌شوند.

با توجه به روابط ذکر شده $y_{rp}^{k'_r} \leq^* y_{ro}^{k'_r} : r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
& y_{ro}^{k'_r} = y_{rp}^{k'_r} + s_r^{+k'r}, \\
& r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \\
& s_r^{+k'_r} \leq \bar{y}_{rp}^{k'_r}(1 - v_{k'_r - 1}), \\
& r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \\
& v_{k'_r} \leq (\bar{y}_{rp}^{k'_r} - s_r^{+k'r}).M, \\
& r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r} \\
& (\bar{y}_{rp}^{k'_r} - s_r^{+k'r}) \leq v_{k'_r}.M, \\
& r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

در ابتدا قراردهید $v_0 = 0$ و M را یک عدد مثبت "بزرگ" فرض کنید. متغیر دودویی V متغیرهای کمکی خروجی را طوری هدایت می‌کند که به ترتیب و در محدوده تعریف شده مقدار اختیار کنند.

بده بستان‌های ورودی و خروجی: با توجه به این که ورودی‌ها و خروجی‌ها دارای سطوح مختلفی هستند لذا بده بستان‌ها میان سطوح مختلف می‌تواند وجود داشته باشد. به‌عبارت دیگر می‌توان از آن‌ها به گونه‌ای به عنوان بردارهای سود و هزینه نام برد. فرض کنید:

$$
\begin{aligned}
& (x_{ij}^{k_i} : i \in I, y_{rj}^{k'_r} : r \in R)^t \in T^c_{pl}, \\
& k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}
\end{aligned} \tag{۲۲}
$$

در این صورت به ازای تمامی بردارها به صورت $(P,Q)^t$ و $\pi \geq 0, \phi \geq 0$ رابطه زیر برقرار است:

$$
(x_i^{k_i} + \pi P_i^{k_i}, y_r^{k'_r} + \phi Q_r^{k'_r})^t \in T^c_{pl} \tag{۲۳}
$$

که در آن:

$$
\begin{aligned}
& x_i^{k_i} + \pi P_i^{k_i} \geq 0, \\
& i \in I, k_i = 1,\dots,l_{k_i} \\
& y_r^{k'_r} + \phi Q_r^{k'_r} \geq 0, \\
& r \in R, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}
\end{aligned} \tag{۲۴}
$$

کمینه درونیابی: با توجه به این که مجموعه امکان معرفی شده به کمک اصولی که عنوان شد ساخته شده است آن پوش بوجود آمده، کوچکترین پوش ممکنه است. با توجه به اصول گفته شده T_{pl}^c به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$
\begin{aligned}
T^c_{pl} = \{ & (x_i^{k_i} : i \in I, y_r^{k'_r} : r \in R)^t \\
| & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x^{k_i}_{ij} + \sum_{l=1}^{f1} \pi_l P^{k_i}_{il} \leq^* x^{k_i}_{i}, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y^{k'_r}_{rj} + \sum_{l=1}^{f1} \phi_l Q^{k'_r}_{rl} \geq^* y^{k'_r}_{r}, \\
& k_i = 1,\dots,l_{k_i}, k'_r = 1,\dots,l_{k'_r}, \lambda_j \geq 0, \forall j \}
\end{aligned} \tag{۲۵}
$$

همان طور که عنوان شد هدف در این بخش معرفی مدلی غیرشعاعی با ارزش گزاری غیرخطی داده‌ها است بر مبنای مدل معرفی شده توسط حسین‌زاده و همکاران ۲۰۱۰. بنابر آن‌چه در ادبیات موضوع آمده است مدل‌های غیرشعاعی تمامی ناکارایی را یک جا در نظر گرفته و دیگر نیازی به حل مدل دو فازی نمی‌باشد.

بدون کم شدن از کلیت استدلال فرض کنید که I_2 و R_2 زیر مجموعه‌هایی ورودی و خروجی، به ترتیب، می‌باشند که ارزش غیرخطی و I_1 و R_1 به ترتیب زیر مجموعه‌هایی ورودی و خروجی می‌باشند که ارزش خطی دارند.

لازم به ذکر است که $I = I_1 \cup I_2$ و $R = R_1 \cup R_2$ که در آن‌ها I و R مجموعه‌های کل ورودی و خروجی‌ها هستند. فرض کنید که f و g تعداد ورودی‌های مصرفی و خروجی‌های تولیدی واحدهای تحت ارزیابی باشند. مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$
Min \ \frac{1 - (\frac{1}{f})(\sum_{i \in I_1} \frac{s_i^-}{x_{io}} + \sum_{i \in I_2} \sum_{k_i=1}^{l_{k_i}} \frac{s_r^{-k_i}}{x^{k_i}_{io}})}{1 + (\frac{1}{g})(\sum_{r \in R_1} \frac{s_r^+}{y_{ro}} + \sum_{r \in R_2} \sum_{k'_r=1}^{l_{k'_r}} \frac{s_r^{+k'_r}}{y^{k'_r}_{ro}})} \tag{۲۶}
$$

$$s.t.\ (x_i^{k_i}+\tau P_i^{k_i}: i\in I_2, x_i: i\in I_1,\ y_r^{k'_r}+\pi Q_r^{k'_r}: r\in R_2, y_r: r\in R_1)^t \in T^c{}_{pl}$$

حال با توجه به $T_{pl}{}^c$ ساخته شده مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \rho=\frac{1-(\frac{1}{f})(\sum_{i\in I_1}\frac{s_i^-}{x_{io}}+\sum_{i\in I_2}\sum_{k_i=1}^{l_{k_i}}\frac{s_i^{-k_i}}{x^{k_i}{}_{io}})}{1+(\frac{1}{g})(\sum_{r\in R_1}\frac{s_r^+}{y_{ro}}+\sum_{r\in R_2}\sum_{k'_r=1}^{l_{k'_r}}\frac{s_r^{+k'_r}}{y^{k'_r}{}_{ro}}}\\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}\le x_{io}-s_i^-\\
&\quad i\in I_1,\\
&\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}^{k_i}+\sum_{l=1}^{f1}\tau_l P_{il}^{k_i}\le x_{io}^{k_i}-s_i^{-k_i}\\
&\quad i\in I_2,\quad k_i=1,\dots,l_{k_i},\\
&\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}\ge y_{ro}+s_r^+\\
&\quad r\in R_1,\\
&\quad \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{ij}^{k'_r}+\sum_{l=1}^{f2}\pi_t Q_{rt}^{k'_r}\ge y_{ro}^{k'_r}+s_r^{+k'_r}\\
&\quad r\in R_2,\quad k'_r=1,\dots,l_{k'_r},\\
&\quad s_i^{-k_i}\le x_{io}^{k_i}(1-w_{k_i})\\
&\quad i\in I_2,\quad k_i=l_{k_i},\dots,1, \qquad (a)\\
&\quad w_{k_i-1}\le (x_{io}^{k_i}-s_i^{-k_i}).M\\
&\quad i\in I_2,\quad k_i=l_{k_i},\dots,2, \qquad (b)\\
&\quad (x_{io}^{k_i}-s_i^{-k_i})\le w_{k_i-1}.M\\
&\quad i\in I_2,\quad k_i=l_{k_i},\dots,2, \qquad (c)\\
&\quad s_r^{+k'_r}\le \bar{y}_{rp}^{k'_r}(1-v_{k'_r-1})\\
&\quad r\in R_2,\quad k'_r=1,\dots,l_{k'_r}, \qquad (d)\\
&\quad v_{k'_r}\le (\bar{y}_{rp}^{k'_r}-s_r^{+k'_r}).M\\
&\quad r\in R_2,\quad k'_r=1,\dots,l_{k'_r}, \qquad (e)\\
&\quad (\bar{y}_{rp}^{k'_r}-s_r^{+k'_r})\le v_{k'_r}.M\\
&\quad r\in R_2,\quad k'_r=1,\dots,l_{k'_r}, \qquad (f)\\
&\quad (x_{io}^{k_i}-s_i^{-k_i})\ge 0\\
&\quad i\in I_2,\quad k_i=1,\dots,l_{k_i}, \qquad (g)\\
&\quad s_i^-\ge 0, s_i^{-k_i}\ge 0\\
&\quad i\in I_1, i\in I_2, k_i=1,\dots,l_{k_i},\\
&\quad s_r^+\ge 0, s_r^{+k_r}\ge 0\\
&\quad r\in R_1, r\in R_2, k'_r=1,\dots,l_{k'_r},\\
&\quad \lambda\ge 0, \pi\ge 0, \tau\ge 0
\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

در مدل فوق $S^{-k_i}{}_i$ و $S^{+k_r}{}_r$ متغیرهای کمکی‌های متناظر آن دسته از ورودی‌ها و خروجی‌هایی هستند که ارزش غیرخطی دارند. همچنین $S^-{}_i$ و $S^+{}_r$ متغیرهای متناظر آن دسته از ورودی‌ها و خروجی‌هایی هستند که ارزش خطی دارند.

در ابتدا قرار دهید $v_0=0$ و M را یک عددمثبت بزرگ در نظر بگیرید. توجه داشته باشید متغیر دودویی v_{k_i-1} $s^{+k'_r}{}_r (r\in R_2)$ را طوری هدایت می‌کند که در محدوده تعریف شده و به ترتیب مقدار اختیار کنند. به این منظور دسته قیود $(d),(e),(f)$ به مدل اضافه شده است.

به طور مشابه در ابتدا قرار دهید $w_{l_{k_i}}=0$. این متغیر دودویی $s^{-k_i}{}_i, i\in I_2$ را طوری هدایت می‌کند که به ترتیب و در محدوده مقدار از دست بدهند. به این منظور دسته قیود $(a),(b),(c)$ به مدل اضافه شده است.

با توجه به این که سطوح مختلف ورودی بده بستان برقرار است لذا طبق آن چه پودینوسکی ۲۰۰۴ عنوان کرده است ممکن است بعد از تصویر کردن واحدها، آن‌ها روی مرز کارایی واقع نشود لذا به عنوان راه حل قید $x_{io}{}^{k_i}-s^{-k_i}{}_i\ge 0, i\in I_2$ به مدل اضافه شده است.

همچنین مشکل دیگری که پودینوسکی عنوان کرد این است که λ های مثبت معرف واحدهای پاراتو کارا نباشند. لازم به ذکر است که با توجه در صورت بروز چنین مشکلی از فاز سوم مدل پودینوسکی ۲۰۰۵ استفاده خواهد شد.

لازم به ذکر است که اگر ورودی با مقدار صفر موجود بود کافی است جمله مربوط به آن را از تابع هدف حذف می‌شود و اگر چنین حالتی در خروجی‌ها رخ داد کافی است به جای آن ε قرار داده شود.

قضیه ۱: به ازای هر جواب شدنی از مدل (۲۷)رابطه زیر برقرار است:

$$0<\rho\le 1$$

برهان: با توجه به این که $x_{io} \ge s^{-}{}_{i}, i\in I_1, x_{io}{}^{k_i} \ge s^{-k_i}{}_{i}, i\in I_2$ به رابطه فوق برقرار می‌باشد.

قضیه ۲: اگر DMU_o پاراتو کار باشد آن گاه $\rho^*=1$.

برهان: از این که در واحد تحت ارزیابی ورودی هدر رفته و خروجی کم تولید شده نداریم نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}&s_i{}^{-*}=0, s_i{}^{-k_i\,*}=0,\\ &s_r{}^{+*}=0, s_r{}^{+k_r\,*}=0\\ &\forall i\,(i\in I_1), \forall i\,(i\in I_2),\\ &k_i=1,\dots,l_{k_i}, \forall r(r\in R_1),\\ &\forall r(r\in R_2), k'_r=1,\dots,l_{k'_r}\end{aligned}$$

این بدان معنی است که:

$$\rho^*=1$$

حال روابط زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&x'_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j{}^*x_{ij}+\delta_i{}^*\\ &\quad i\in I_1,\\ &x'^{k_i}{}_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j{}^*x_{ij}{}^{k_i}+\sum_{l=1}^{f}\pi_l{}^*P_{il}{}^{k_i}+\delta_i{}^{*k}\\ &\quad i\in I_2, k_i=1,\dots,l_{k_i},\\ &y'_r=\sum_{j=1}^{n}\lambda^*{}_j y_{rj}-\gamma^*{}_r\\ &\quad r\in R_2,\\ &y'^{k'_r}_r=\sum_{j=1}^{n}\lambda^*{}_j y_{rj}{}^{\rightarrow}+\sum_{t=1}^{g}\phi^*{}_t Q_{rj}{}^{k'_r}-\gamma^{*k'_r}{}_r\\ &\quad r\in R_2, k'_r=1,\dots,l_{k'_r},\end{aligned} \qquad (۲۸)$$

به کمک روابط فوق می‌توان واحدهای ناکارا را روی مرز کارایی تصویر کرد.
اگر به خلف فرض کنید که با این جواب بهین در دست واحد روی مرز کارای قوی تصویر نمی‌شود پس واحدی وجود دارد که دارای ورودی کمتر و خروجی بیشتر است که در نتیجه دارای تابع هدف کمتری است و این با بهین بودن جواب در دست تناقض دارد پس:

قضیه ۳: واحد (X',Y') پاراتو کاراست.

قضیه ۴: اگر $\rho^*=1$ آنگاه DMU_o پاراتو کارا باشد.

برهان: اگر $\rho^*=1$ آنگاه نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned}&s_i{}^{-*}=0, s_i{}^{-k_i\,*}=0,\\ &s_r{}^{+*}=0, s_r{}^{+k_r\,*}=0\\ &\forall i\,(i\in I_1), \forall i\,(i\in I_2),\\ &k_i=1,\dots,l_{k_i}, \forall r(r\in R_1),\\ &\forall r(r\in R_2), k'_r=1,\dots,l_{k'_r}\end{aligned}$$

این بدان معنی است که ورودی هدر رفته و خروجی تولید نشده وجود ندارد لذا واحد پاراتو کاراست.
با توجه به آن چه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که در هر جواب بهین قیود به صورت تساوی برقرار می‌باشند زیرا اگر این طور نباشد، یعنی حداقل یکی به صورت نامساوی اکید برقرار باشد، در این صورت می‌توان به یک جواب شدنی دیگر رسید با تابع هدفی بهتر که این با جواب بهین به دست آمده در تناقض است.
با توجه به مدل *PL-CCR* شعاعی معرفی شده توسط حسین زاده و همکاران ۲۰۱۰ حال به بررسی رابطه میان مدل های شعاعی و غیرشعاعی *PL-CCR* پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در مدل شعاعی معرفی شده در ماهیت ورودی، تنها این امکان وجود دارد که

خروجی‌هایی با ارزش غیرخطی وجود داشته باشد زیرا با تغییرات شعاعی نمی‌توان بازه‌ها را طوری هدایت کرد که به ترتیب و در محدوده مقدار اختیار کنند. ولی از محاسن مدل غیرشعاعی معرفی شده این است که می‌توان هم ورودی و هم خروجی با ارزش غیرخطی وجود داشته باشد.

قضیه ۵: در هر جواب بهین مدل‌های (۲۷) و حسین‌زاده و همکاران ۲۰۱۰ با فرض وجود خروجی‌ها با ارزش غیرخطی رابطه زیر برقرار است که:

$$\rho^* \le \theta^*$$

برهان: اگر R_1 و R_2 به ترتیب زیر مجموعه‌های خروجی با ارزش خطی و غیرخطی در نظر بگیرید و فرض کنید یک جواب بهینه از مدل شعاعی حسین‌زاده و همکاران ۲۰۱۰، در دست است آنگاه:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{*} x_{ij} = \theta^* x_{io} - s_i^{-}, \\
&i \in I \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^*_j y_{rj} = y_{ro} + s^{+}_{r}, \\
&r \in R_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda^*_j y_{rj}^{k'_r} + \sum_{t=1}^{f2} \pi^*_t Q_{rt}^{k_r} = \\
&y_{ro}^{k_r} + s^{+k'_r}{}_{r}, \\
&r \in R_2, k_r = 1, \ldots, l_{k_r}
\end{aligned} \qquad (۲۹)$$

که از روی آن می‌توان یک جواب شدنی برای مدل غیر شعاعی (۲۷)، به صورت زیر ساخت.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{*} x_{ij} + x_{io} = \theta^* x_{io} + x_{io} - s_i^{-}, \\
&i \in I \to \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{*} x_{ij} = x_{io} - ((1-\theta^*) x_{io} + s_i^{-}), \\
&i \in I \to \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{*} x_{ij} = x_{io} - \delta_i \, , \, i \in I
\end{aligned}$$

که در آن:

$$\delta_i = (1-\theta^*) x_{io} + s_i^{-} \qquad i \in I$$

با در نظر گرفتن این جواب شدنی در مدل غیرشعاعی (۲۷)، رابطه زیر برقرار است:

$$\rho = \frac{\theta^* - \sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^{-}}{x_{io}}}{1 + (\frac{1}{g})(\sum_{r \in R_1}^{m} \frac{s_r^{+}}{y_{ro}} + \sum_{r \in R_2} \sum_{i=1}^{m} \frac{s_r^{+k}}{y^{k}_{ro}})} \qquad (۳۰)$$

که از آن نتیجه می‌شود که:

$$\rho^* \le \theta^*$$

۴. نتیجه‌گیری

برای بهبود کارایی مدیران صنایع مختلف با توجه به شرایط اقتصادی برای بهبـود عملکرد خود در تلاش می‌باشند. در توسعه رویکرد کلاسیک مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم گیرنده بر مبنای اصول موضوعه مدل‌سازی با متغیرهای کمکی انجام شده است که ورودی و خروجی‌های آن‌ها ارزش غیرخطی دارتد. این مساله در بسیاری از مثال‌های دنیای اطراف ما به کرات مطرح است. در این صورت با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها مدل ارزیابی کارایی توسعه یافته SBM معرفی می‌شود که در آن به جای قیمت گزاری خطی قیمت گزاری غیرخطی ورودی‌ها و خروجی‌ها را در ارزیابی مد نظر قرار می‌گیرد. در مقابسه مدل غیرشعاعی معرفی شده و شعاعی موجود در ادبیات موضوع برخی از خصوصیات مدل جدید معرفی و اثبات می‌شود. آنچه از حاصل از ارزیابی کارایی با ارزش گزاری غیرخطی بسیار مهم است امکان تغییر در نوع دسته‌بندی واحدهای کارا و ناکارا است که با توجه به آن استراتژی‌های متفاوتی توسط مدیران بایستی لحاظ شود.

فهرست منابع

[1] Farrell, M.J. (1957) The Measurement of Productive Efficiency. Journal of Royal Statistical Society, 120, 253-290.

[2] Charnes, A., W.W., Cooper, E., Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units. European Journal of Operational Research, 2, 429-444, 1978.

[3] Banker, R. D., A., Charnes, W.W., Cooper, Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, 30, 1078–1092, 1984.

[4] Tone, Kaoru and Tsutsui, Miki. (2009) " Network DEA: A slacks-based measure approach " European Journal of Operational Research 197. 243–252.

[5] Tone, Kaoru and Tsutsui, Miki. (2010). " Dynamic DEA: Aslacks-based measure approach". Omega.145-156.

[6] Tone, Kaoru and Tsutsui, Miki.(2014)." Dynamic DEA with network structure: A slacksbased measure approach ".Omega 42. 124–131.

[7] Hosseinzadeh Lotfi, M. Rostamy Malkhlifeh, Z. Moghaddas. European Journal of Operational Research · September 2010 DOI: 10.1016/j.ejor.2010.01.002.

[8] Zadeh, Lotfi, (1965). Fuzzy sets. Information Control 8, 338–353.

[9] Sugeno, M. “Industrial Applications of Fuzzy Control,” Elsevier Science, Amsterdam, 1985.

[10] Podinovsky V.V. Production trade-offs and weight restrictions in dataenvelopment analysis. Journal of Operational Reaserch Society, 55, 1311-1322, 2004.

[11] Podinovsky V.V. Computation of efficient targets in DEA models withproduction trade-offs and weight restrictions. European Journal of OperationalReaserch, 181, 586-591, 2005.