

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه $n$ با استفاده از روش آدامز- بشفورث

نورالدین پرنندین\*

گروه ریاضی، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۱۶

### چکیده

در این مقاله، روشی عددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه  $n$  پیشنهاد شده است. تاکنون روش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول، توسط محققین ارائه شده است. اما روش‌های عددی کمتری نسبت به روش‌های مرتبه اول، برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه بالا پیشنهاد شده است. در این تحقیق، ابتداء معادله دیفرانسیل مرتبه  $n$  به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول تبدیل می‌شود، سپس از روش آدامز- بشفورث برای حل این دستگاه معادلات استفاده می‌شود. نهایتاً با ارائه مثال‌هایی، دقت روش سنجیده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل فازی، روش آدامز- بشفورث.

## ۱- مقدمه و پیشینه تحقیق

معادلات دیفرانسیل در علوم مختلف از جمله فیزیک، شیمی، بیولوژی و اقتصاد بسیار سودمند است. برای آموختن بیشتر در خصوص کاربرد این معادلات در علوم ذکر شده، می‌توانید کاربرد این معادلات را در فیزیک [۱۱، ۲۲، ۲۴، ۳۶]، در شیمی [۱۲، ۴۰، ۴۱]، در بیولوژی [۱۴، ۱۵] و در اقتصاد [۳۲]. بر اساس پیشرفت علوم و عدم قطعیت فازی در بعضی از معادلات دیفرانسیل، به نظر می‌آید که معادلات دیفرانسیل فازی و حل آنها برای محققین، جالب توجه باشد. باید توجه نمود که در اغلب اوقات حل تحلیلی این گونه معادلات و یافتن جواب دقیق، یا دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی است، یا نمی‌توان با روش‌های موجود، آنها را حل نمود. بنابراین حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی در سال‌های اخیر مورد توجه محققین قرار گرفت. تئوری معادلات دیفرانسیل فازی، توسط محققینی چون [۱۰] باکلی و فیورینگ، [۲۵، ۲۶] کالوا، [۳۱] نیتو، [۳۳] اوپانگ و وو، [۳۷] رومن-فلورس و روجاس-مدارا، [۳۹] سیکالا مورد بحث و بررسی قرار گرفت، و اخیراً محققین دیگری از جمله، [۳۰، ۳۱، ۲۱، ۱۷، ۱۶، ۹، ۸] مقالاتی را در این زمینه چاپ نموده‌اند. در ادامه به تعدادی از روش‌های عددی که توسط دیگر محققین پیشنهاد شده نیز اشاره می‌شود. [۱، ۲] عباسبندی و الهوپرنلو با استفاده از روش‌های تیلور و رونگ-کوتا معادلات دیفرانسیل فازی را حل نمودند. [۴، ۵، ۶] الهوپرنلو و همکاران به کمک روش‌های پیشگو-اصلاحگر معادلات دیفرانسیل را حل نمودند. [۷] برخورداری و همکاران از روش پیشگو اصلاحگر گسترش یافته برای حل معادلات دیفرانسیل، استفاده نمودند. [۲۰] غضنفری و شاکرمی از فرمول رانگ-کوتا مرتبه ۴ برای حل معادلات دیفرانسیل فازی استفاده نمودند. [۲۷] روش نیستم، برای حل معادلات دیفرانسیل فازی پیشنهاد شده است. [۲۹] مصلح و اوتادی، شبیه‌سازی و ارزیابی معادلات دیفرانسیل فازی را با استفاده از شبکه‌های عصبی انجام دادند. [۳۸] حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه  $n$  با روش اختلال هموتوپي انجام شده است. [۳۵] پدرسون و سامبانداهام از روش رونگ-کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل فازی

هیبریدی استفاده نمودند. [۳۴] روش رونگ-کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل فازی استفاده شده است. [۲۸] حل معادلات دیفرانسیل فازی هیبریدی به کمک روش پیشگو-اصلاحگر بهبود یافته انجام شده است. قسمت‌های دیگر این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، تعاریف و مفاهیم پایه‌ای صورت می‌گیرد. در بخش سوم، ایده پیشنهادی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه  $n$  توضیح داده شده است. در بخش چهارم، مثال‌هایی برای توضیح بیشتر ذکر شده‌اند. در بخش پنجم، نتایج آورده شده است.

## ۲- مفاهیم پایه ای و تعاریف مورد نیاز

**تعریف ۲-۱:** [۱۸] عدد فازی، نگاشتی است بصورت  $I = [0, 1] : \mathbb{R} \rightarrow u$  که در روابط زیر صادق می‌باشد. الف)  $u$  نیم پیوسته بالا است.

ب) خارج از  $\mathbb{R} \subset [c, d]$  داریم  $u(x) = 0$ .

ج) اعداد حقیقی  $a, b$  وجود دارند بطوری که  $c \leq a \leq b \leq d$  در این صورت،

۱-  $u(x)$  یکنوا افزایشی روی  $[c, a]$  است.

۲-  $u(x)$  یکنوا کاهشی روی  $[b, d]$  است.

۳-  $u(x) = 1$  روی  $a \leq x \leq b$

**تعریف ۲-۲:** [۱۸] فرم پارامتریک عدد فازی به صورت زوج مرتب  $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$  نمایش داده شده که  $0 \leq r \leq 1$  می‌باشد که در شرایط زیر صادق است.

۱- تابع  $\underline{u}(r)$  روی  $[0, 1]$  تابعی کراندار، چپ پیوسته و نازولی است.

۲- تابع  $\bar{u}(r)$  روی  $[0, 1]$  تابعی کراندار، چپ پیوسته و ناصعودی است.

۳- برای  $0 \leq r \leq 1$  رابطه  $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$  برقرار است.

**توجه:** عدد ثابت  $\alpha$  روی بازه  $0 \leq r \leq 1$

بطور ساده بصورت  $\underline{u}(r) = \bar{u}(r) = \alpha$  نمایش داده شده است.

فرض کنید

$$v = (\underline{v}(r), \bar{v}(r)), u = (\underline{u}(r), \bar{u}(r))$$

فرم پارامتریک دو عدد فازی و  $k \in \mathbb{R}$  باشد، در اینصورت تساوی و جمع دو عدد فازی و ضرب عددی حقیقی در یک عدد فازی بصورت زیر بیان شده است.

الف)  $u = v$  اگر و تنها اگر  $\underline{u}(r) = \underline{v}(r)$  و  $\bar{u}(r) = \bar{v}(r)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_0}{dt} = y_1 \\ = f_1(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \\ \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ = f_2(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ = f_n(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}), \\ x(t_0) = y_{0,0}, x'(t_0) \\ = y_{1,0}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = y_{n,0} \end{array} \right. \quad (3.2)$$

ب)  $u + v = (\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \bar{u}(r) + \bar{v}(r))$

ج)  $ku = \begin{cases} (k\underline{u}, k\bar{u}), k > 0, \\ (k\bar{u}, k\underline{u}), k < 0. \end{cases}$

تعریف ۳-۲: [۹] فاصله هاسدرف بین دو عدد فازی که رابطه آن بصورت  $D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  می باشد، بصورت زیر تعریف شده است.

$$D(u, v) = \sup \max \left\{ \left| \underline{u}^r - \underline{v}^r \right|, \left| \bar{u}^r - \bar{v}^r \right| \right\} = \sup \{d_H([\underline{u}]^r, [\underline{v}]^r)\},$$

که  $r \in [0, 1]$  و  $[u]^r = [\underline{u}^r, \bar{u}^r], [v]^r = [\underline{v}^r, \bar{v}^r]$  که  $\| \cdot \| = D(\cdot, 0)$  است.

تعریف ۴-۲: [۳۹] فرض کنید  $I$  بازه ای حقیقی باشد. نگاشت  $x : I \rightarrow E$  و مجموعه  $-r$  برش تعریف شده بصورت زیر، پروسه ای فازی نامیده می شود.

$$[x(t)]_r = [x_1(t; r), x_2(t; r)], t \in I, r \in (0, 1]$$

که پروسه مشتق  $x'(t)$  از عدد فازی  $x(t)$  بصورت زیر تعریف شده است.

$$[x'(t)]_r = [x'_1(t; r), x'_2(t; r)], t \in I, r \in (0, 1].$$

۳- حل معادلات دیفرانسیل فازی با استفاده از روش آدامز- بشفورث

معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه  $n$  به فرم زیر را در نظر می گیریم.

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}, \dots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right),$$

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x'_0, \quad (3.1)$$

$$x''(t_0) = x''_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$$

می باشد که  $t \in [t_0, T]$  اعداد فازی  $y_{n,0}; \dots; y_{2,0}; y_{1,0}$  را در نظر می گیریم. فرض کنید معادلات (۳-۳) و (۴-۳) به ترتیب جواب های دقیق و تقریبی دستگاه معادلات (۳-۳) باشد.

$$\begin{aligned} [y_0(t)]_r &= [y_{0,1}(t; r), y_{0,2}(t; r)], \\ [y_1(t)]_r &= [y_{1,1}(t; r), y_{1,2}(t; r)], \\ &\vdots \\ [y_{n-1}(t)]_r &= [y_{n-1,1}(t; r), y_{n-1,2}(t; r)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} [w_0(t)]_r &= [w_{0,1}(t; r), w_{0,2}(t; r)], \\ [w_1(t)]_r &= [w_{1,1}(t; r), w_{1,2}(t; r)], \\ &\vdots \\ [w_{n-1}(t)]_r &= [w_{n-1,1}(t; r), w_{n-1,2}(t; r)]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

با استفاده از روش آدامز- بشفورث، تقریب جواب بصورت زیر محاسبه می شود.

$$w_{j,1}(t_{i+1}; r) = a_{j,m-1}w_{j,1}(t_i; r) + a_{j,m-2}w_{j,1}(t_{i-1}; r) + \dots + a_{j,0}w_{j,1}(t_{i+1-m}; r), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &+ h \left[ b_{j,m-1} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{c} t_i, w_0(t_i; r), \\ w_1(t_i; r), \dots, w_{n-1}(t_i; r) \end{array} \right) \right. \\ &+ b_{j,m-2} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{c} t_{i-1}, w_0(t_{i-1}; r), \\ w_1(t_{i-1}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i-1}; r) \end{array} \right) \\ &+ \dots \\ &\left. + b_{j,0} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{c} t_{i+1-m}, w_0(t_{i+1-m}; r), \\ w_1(t_{i+1-m}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i+1-m}; r) \end{array} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{j,2}(t_{i+1}; r) &= a_{j,m-1}w_{j,2}(t_i; r) + a_{j,m-2}w_{j,2}(t_{i-1}; r) + \dots + a_{j,0}w_{j,2}(t_{i+1-m}; r) \end{aligned} \quad (3.6)$$

**تعریف ۱-۳:** تابع فاز  $f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  روی  $D$  در شرط لیب شیتس با وجود متغیرهای  $u_{n-1}, \dots, u_1, u_0$  و ثابت  $L > 0$  صدق می‌کند، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد.

$$D = \left\{ (t, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \left| \begin{array}{l} a \leq t \leq b, \\ -\infty \leq u_i \leq \infty, \\ \text{for each } i = 0, 1, \dots, n-1 \end{array} \right. \right\}$$

$$d(f(t, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}), f(t, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})) \leq L \sum_{i=0}^{n-1} d(u_i, v_i),$$

برای هر  $(t, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$  و  $(t, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$  در  $D$

**قضیه ۱-۳:** فرض کنید  $f_i(t, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n-1$  لیب شیتس صادق باشد، در اینصورت دستگاه معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه مرتبه اول (۲-۳) برای  $a \leq t \leq b$  دارای جواب منحصر بفرد  $u_{n-1}(t), \dots, u_1(t), u_0(t)$  می‌باشد. برای اثبات [۱۲] را ببینید.

#### ۴- مثال‌ها

به منظور توضیح در خصوص عملکرد و دقت روش آدامز- بشفورث در خصوص حل عددی معادلات دیفرانسیل فاز مرتبه بالا مثال‌های ارائه شده است.

**مثال ۱-۴:** معادلات دیفرانسیل فاز  $x$  زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x'' - 2x' = 0, & t \in [0, 0.5], \\ x(0) = (r, 2 - r), \quad x'(0) = (3 + r, 4). \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادلات بصورت زیر است.

$$\underline{x}(t; r) = \frac{1}{2}r - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(3 + r)e^{2t},$$

$$\begin{aligned} & + h \left[ b_{j,m-1} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{l} t_i, w_0(t_i; r), \\ w_1(t_i; r), \dots, w_{n-1}(t_i; r) \end{array} \right) \right. \\ & + b_{j,m-2} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{l} t_i, w_0(t_{i-1}; r), \\ w_1(t_{i-1}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i-1}; r) \end{array} \right) \\ & + \dots \\ & \left. + b_{j,0} \tilde{f}_j \left( \begin{array}{l} t_{i+1-m}, w_0(t_{i+1-m}; r), \\ w_1(t_{i+1-m}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i+1-m}; r) \end{array} \right) \right] \\ & \tilde{f}_j(t, w_0(t_{i+}; r), w_1(t_{i+}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i+}; r)) \\ & = \begin{cases} f_{j,1} \left( \begin{array}{l} t, w_0(t_{i+}; r), w_1(t_{i+}; r), \\ \dots, w_{n-1}(t_{i+}; r) \end{array} \right), & b_j > 0 \\ f_{j,2} \left( \begin{array}{l} t, w_0(t_{i+}; r), w_1(t_{i+}; r), \\ \dots, w_{n-1}(t_{i+}; r) \end{array} \right), & b_j < 0 \end{cases} \quad (3.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & f_{j,1} \left( \begin{array}{l} t, w_0(t_{i+}; r), \\ w_1(t_{i+}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i+}; r) \end{array} \right) \quad (3.8) \\ & = \min \{ f_j(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) | u_0 \\ & \in [w_{0,1}(t_{i+}; r), w_{0,2}(t_{i+}; r)], \\ & \quad u_1 \\ & \in [w_{1,1}(t_{i+}; r), w_{1,2}(t_{i+}; r)], \dots, u_{n-1} \\ & \in [w_{n-1,1}(t_{i+}; r), w_{n-1,2}(t_{i+}; r)] \} \\ & f_{j,2} \left( \begin{array}{l} t, w_0(t_{i+}; r), \\ w_1(t_{i+}; r), \dots, w_{n-1}(t_{i+}; r) \end{array} \right) \\ & = \max \{ f_j(t, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) | u_0 \\ & \in [w_{0,1}(t_{i+}; r), w_{0,2}(t_{i+}; r)], \\ & \quad u_1 \\ & \in [w_{1,1}(t_{i+}; r), w_{1,2}(t_{i+}; r)], \dots, u_{n-1} \\ & \in [w_{n-1,1}(t_{i+}; r), w_{n-1,2}(t_{i+}; r)] \} \\ & \quad \forall j = 0, 1, \dots, n-1, \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

به کمک بعضی لم‌ها (لم‌های ۵-۷ و ۵-۸ در [۱۲]) می‌توان نشان داد که جواب تقریبی به جواب واقعی بصورت زیر همگرا است.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} w_{0,1}(t; r) &= y_{0,1}(t; r), \\ \lim_{h \rightarrow 0} w_{0,2}(t; r) &= y_{0,2}(t; r), \\ \lim_{h \rightarrow 0} w_{1,2}(t; r) &= y_{1,2}(t; r), \\ \lim_{h \rightarrow 0} w_{1,2}(t; r) &= y_{1,2}(t; r) \\ & \vdots \\ \lim_{h \rightarrow 0} w_{n-1,1}(t; r) &= y_{n-1,1}(t; r) \\ \lim_{h \rightarrow 0} w_{n-1,2}(t; r) &= y_{n-1,2}(t; r) \\ \lim_{h \rightarrow 0} & \end{aligned}$$

که جواب دقیق بصورت زیر داده شده است.

$$\underline{x}(t) = (2+r)e^{2t} + (1-r)te^{2t},$$

$$\bar{x}(t) = (4-r)e^{2t} + (r-1)te^{2t}$$

در این مثال، جواب دقیق و جواب تقریبی با استفاده از آدامز- بشفورث دوگامی، برای تابع و مشتق آن در  $t = 0.5$  و  $h = 0.01$  به ترتیب در جدول‌های سوم و چهارم نمایش داده شده است.

$$\bar{x}(t; r) = -r + 2e^{2t}.$$

در این مثال، جواب دقیق و جواب تقریبی با استفاده از آدامز- بشفورث چهار گامی، برای تابع و مشتق آن در  $t = 0.1$  و  $h = 0.01$  به ترتیب در جدول‌های اول و دوم نمایش داده شده است.

**مثال ۴-۲:** معادلات دیفرانسیل فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x'' - 4x' + 4x = 0, \\ t \in [0,1], \\ x(0) = (2+r, 4-r), \\ x'(0) = (5+r, 7-r). \end{cases}$$

جدول ۱. مقایسه بین جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۴-۱

| r   | جواب دقیق<br>$\underline{x}(0.1; r)$ | جواب دقیق<br>$\bar{x}(0.1; r)$ | $AB_4$<br>$w_{0,1}(0.1; r)$ | $AB_4$<br>$w_{0,2}(0.1; r)$ | خطای مطلق<br>$ \underline{x} - w_{0,1} $ | خطای مطلق<br>$ \bar{x} - w_{0,2} $ |
|-----|--------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|--|------------------------------------|
| 0.0 | 0.221403                             | 2.44281                        | 0.22140                     | 2.44280                     | $2.758 \times 10^{-6}$                   | $5.516 \times 10^{-6}$             |
| 0.1 | 0.332473                             | 2.33174                        | 0.33247                     | 2.33173                     | $2.896 \times 10^{-6}$                   | $5.378 \times 10^{-6}$             |
| 0.2 | 0.443543                             | 2.22067                        | 0.44354                     | 2.22066                     | $3.034 \times 10^{-6}$                   | $5.241 \times 10^{-6}$             |
| 0.3 | 0.554613                             | 2.10960                        | 0.55461                     | 2.10959                     | $3.172 \times 10^{-6}$                   | $5.103 \times 10^{-6}$             |
| 0.4 | 0.665683                             | 1.99852                        | 0.66568                     | 1.99852                     | $3.310 \times 10^{-6}$                   | $4.965 \times 10^{-6}$             |
| 0.5 | 0.776753                             | 1.88745                        | 0.77675                     | 1.88745                     | $3.448 \times 10^{-6}$                   | $4.827 \times 10^{-6}$             |
| 0.6 | 0.887824                             | 1.77638                        | 0.88782                     | 1.77638                     | $3.586 \times 10^{-6}$                   | $4.689 \times 10^{-6}$             |
| 0.7 | 0.998894                             | 1.66531                        | 0.99889                     | 1.66531                     | $3.724 \times 10^{-6}$                   | $4.551 \times 10^{-6}$             |
| 0.8 | 1.109960                             | 1.55424                        | 1.10996                     | 1.55424                     | $3.861 \times 10^{-6}$                   | $4.413 \times 10^{-6}$             |
| 0.9 | 1.221030                             | 1.44317                        | 1.22103                     | 1.44317                     | $3.999 \times 10^{-6}$                   | $4.275 \times 10^{-6}$             |
| 1.0 | 1.33210                              | 1.33210                        | 1.33210                     | 1.33210                     | $4.137 \times 10^{-6}$                   | $4.137 \times 10^{-6}$             |

جدول ۲. مقایسه بین جواب‌های دقیق و تقریبی مشتق مرتبه اول مثال ۴-۱

| r   | جواب دقیق<br>$\underline{x}'(0.1; r)$ | جواب دقیق<br>$\bar{x}'(0.1; r)$ | $AB_4$<br>$w_{1,1}(0.1; r)$ | $AB_4$<br>$w_{1,2}(0.1; r)$ | خطای مطلق<br>$ \underline{x}' - w_{1,1} $ | خطای مطلق<br>$ \bar{x}' - w_{1,2} $ |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|---|-------------------------------------|
| 0.0 | 2.44281                               | 4.88561                         | 2.44280                     | 4.88560                     | $5.516 \times 10^{-6}$                    | $1.103 \times 10^{-5}$              |
| 0.1 | 2.56495                               | 4.76347                         | 2.56494                     | 4.76346                     | $5.792 \times 10^{-6}$                    | $1.076 \times 10^{-5}$              |
| 0.2 | 2.68709                               | 4.64133                         | 2.68708                     | 4.64132                     | $6.068 \times 10^{-6}$                    | $1.048 \times 10^{-5}$              |
| 0.3 | 2.80923                               | 4.51919                         | 2.80922                     | 4.51918                     | $6.344 \times 10^{-6}$                    | $1.021 \times 10^{-5}$              |
| 0.4 | 2.93137                               | 4.39705                         | 2.93136                     | 4.39704                     | $6.620 \times 10^{-6}$                    | $9.929 \times 10^{-6}$              |
| 0.5 | 3.05351                               | 4.27491                         | 3.05350                     | 4.27490                     | $6.895 \times 10^{-6}$                    | $9.654 \times 10^{-6}$              |
| 0.6 | 3.17565                               | 4.15277                         | 3.17564                     | 4.15276                     | $7.171 \times 10^{-6}$                    | $9.378 \times 10^{-6}$              |
| 0.7 | 3.29779                               | 4.03063                         | 3.29778                     | 4.03062                     | $7.447 \times 10^{-6}$                    | $9.102 \times 10^{-6}$              |
| 0.8 | 3.41993                               | 3.90849                         | 3.41992                     | 3.90848                     | $7.723 \times 10^{-6}$                    | $8.826 \times 10^{-6}$              |
| 0.9 | 3.54207                               | 3.78635                         | 3.54206                     | 3.78634                     | $7.999 \times 10^{-6}$                    | $8.550 \times 10^{-6}$              |
| 1.0 | 3.66421                               | 3.66421                         | 3.664                       | 3.6642                      | $8.274 \times 10^{-6}$                    | $8.274 \times 10^{-6}$              |

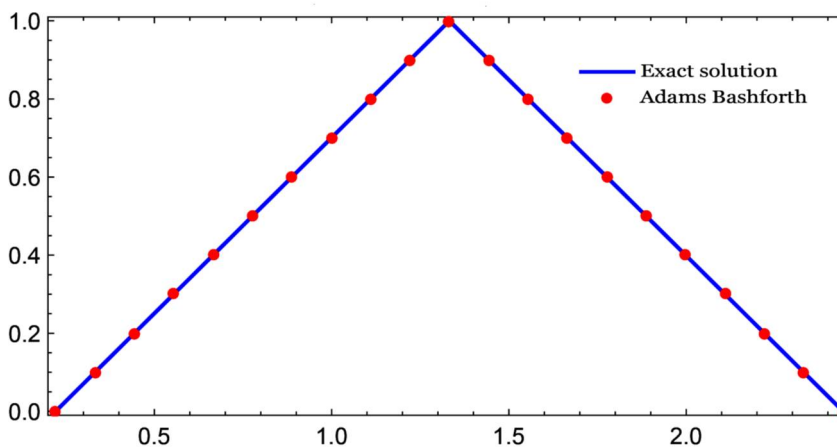
جدول ۳. مقایسه بین جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۲-۴

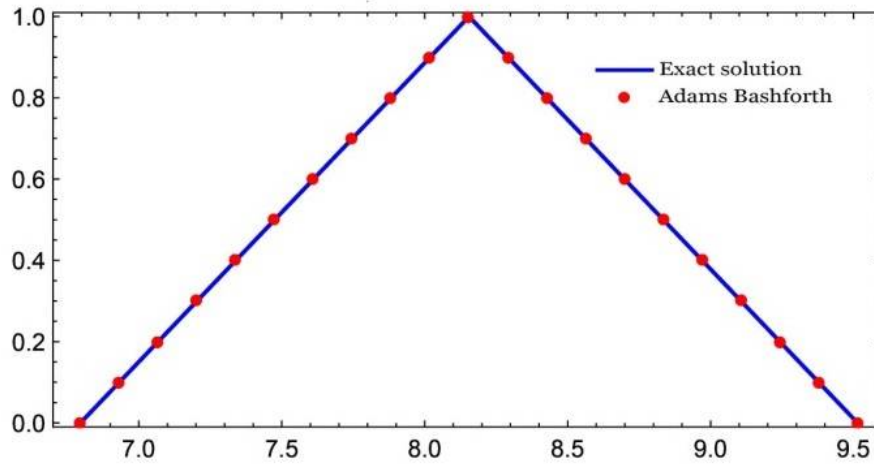
|     | جواب دقیق               | جواب دقیق         | $AB_2$            | $AB_2$            | خطای مطلق                   | خطای مطلق              |
|-----|-------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------------------|------------------------|
| $r$ | $\underline{x}(0.5; r)$ | $\bar{x}(0.5; r)$ | $w_{0,1}(0.5; r)$ | $w_{0,2}(0.5; r)$ | $ \underline{x} - w_{0,1} $ | $ \bar{x} - w_{0,2} $  |
| 0.0 | 6.7957                  | 9.51399           | 6.79395           | 9.51311           | $1.751 \times 10^{-3}$      | $8.797 \times 10^{-4}$ |
| 0.1 | 6.93162                 | 9.37807           | 6.92991           | 9.37715           | $1.707 \times 10^{-3}$      | $9.233 \times 10^{-4}$ |
| 0.2 | 7.06753                 | 9.24216           | 7.06587           | 9.24119           | $1.664 \times 10^{-3}$      | $9.668 \times 10^{-4}$ |
| 0.3 | 7.20345                 | 9.10624           | 7.20183           | 9.10523           | $1.620 \times 10^{-3}$      | $1.01 \times 10^{-3}$  |
| 0.4 | 7.33936                 | 8.97033           | 7.33778           | 8.96928           | $1.577 \times 10^{-3}$      | $1.054 \times 10^{-3}$ |
| 0.5 | 7.47528                 | 8.83442           | 7.47374           | 8.83332           | $1.533 \times 10^{-3}$      | $1.098 \times 10^{-3}$ |
| 0.6 | 7.61119                 | 8.6985            | 7.6097            | 8.69736           | $1.490 \times 10^{-3}$      | $1.141 \times 10^{-3}$ |
| 0.7 | 7.7471                  | 8.56259           | 7.74566           | 8.5614            | $1.446 \times 10^{-3}$      | $1.185 \times 10^{-3}$ |
| 0.8 | 7.88302                 | 8.42667           | 7.88161           | 8.42545           | $1.402 \times 10^{-3}$      | $1.228 \times 10^{-3}$ |
| 0.9 | 8.01893                 | 8.29076           | 8.01757           | 8.28949           | $1.359 \times 10^{-3}$      | $1.272 \times 10^{-3}$ |
| 1.0 | 8.15485                 | 8.15485           | 8.15353           | 8.15353           | $1.315 \times 10^{-3}$      | $1.315 \times 10^{-3}$ |

جدول ۴. مقایسه بین جواب‌های دقیق و تقریبی مشتق مرتبه اول مثال ۲-۴

|     | جواب دقیق                | جواب دقیق          | $AB_2$            | $AB_2$            | خطای مطلق                    | خطای مطلق              |
|-----|--------------------------|--------------------|-------------------|-------------------|------------------------------|------------------------|
| $r$ | $\underline{x}'(0.5; r)$ | $\bar{x}'(0.5; r)$ | $w_{1,1}(0.5; r)$ | $w_{1,2}(0.5; r)$ | $ \underline{x}' - w_{1,1} $ | $ \bar{x}' - w_{1,2} $ |
| 0.0 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3058           | 16.3084           | $3.94 \times 10^{-3}$        | $1.321 \times 10^{-3}$ |
| 0.1 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3059           | 16.3082           | $3.809 \times 10^{-3}$       | $1.452 \times 10^{-3}$ |
| 0.2 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.306            | 16.3081           | $3.678 \times 10^{-3}$       | $1.583 \times 10^{-3}$ |
| 0.3 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3061           | 16.308            | $3.547 \times 10^{-3}$       | $1.714 \times 10^{-3}$ |
| 0.4 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3063           | 16.3078           | $3.416 \times 10^{-3}$       | $1.845 \times 10^{-3}$ |
| 0.5 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3064           | 16.3077           | $3.285 \times 10^{-3}$       | $1.976 \times 10^{-3}$ |
| 0.6 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3065           | 16.3076           | $3.154 \times 10^{-3}$       | $2.107 \times 10^{-3}$ |
| 0.7 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3067           | 16.3075           | $3.023 \times 10^{-3}$       | $2.238 \times 10^{-3}$ |
| 0.8 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3068           | 16.3073           | $2.892 \times 10^{-3}$       | $2.369 \times 10^{-3}$ |
| 0.9 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3069           | 16.3072           | $2.762 \times 10^{-3}$       | $2.5 \times 10^{-3}$   |
| 1.0 | 16.3097                  | 16.3097            | 16.3071           | 16.3071           | $2.631 \times 10^{-3}$       | $2.631 \times 10^{-3}$ |

شکل ۱: نتایج عددی برای مقایسه روش  $AB_4$  و روش دقیق در  $t = 0.1$



شکل ۲: نتایج عددی برای مقایسه روش  $AB_2$  و روش دقیق در  $t = 0.5$ 

### ۵. نتیجه گیری

در این مقاله روش آدامز- بشفورث برای حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه  $n$  استفاده شده است. در این روش معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه بالا به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول تبدیل شده، سپس با استفاده از روش آدامز- بشفورث این معادلات حل می‌شوند. مزیت این روش این است که در تقریب هر نقطه، از چند نقطه قبلی برای تقریب کمک گرفته می‌شود.

**تقدیر و تشکر.** این مقاله نتیجه طرح پژوهشی می‌باشد که به وسیله دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمانشاه پشتیبانی شده است.

## فهرست منابع

- [9] B. Bede and S. G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 151 (2005), 581-599.
- [10] J. J. Buckley and T. Feuring, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 110 (2000), 43-54.
- [11] C.J. Budd, A. Iserles, Geometric integration: numerical solution of differential equations on manifolds, *philosophical transactions: mathematical, Physical and Engineering Sciences: Mathematical* 357 (1999) 945-956.
- [12] J. Behlke, O. Ristau, A new approximate whole boundary solution of the Lamm differential equation for the analysis of sedimentation velocity experiments, *Biophysical Chemistry* 95 (2002) 59-68.
- [13] R.L. Burden, J.D. Faires, *Numerical Analysis*.
- [14] G.A. Bocharov, F.A. Rihan, Numerical modelling in biosciences using delay differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 125 (2000) 183-199.
- [15] R.V. Culshaw, S. Ruan, A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells, *Mathematical Biosciences* 165 (2000) 27-39.
- [16] P. Diamond, Stability and periodicity in fuzzy differential equations, *IEEE Trans, Fuzzy Systems*, 8 (2000), 583-590.
- [17] P. Diamond, Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 129 (2002), 65-71.
- [18] Ming Ma, M. Friedman, and A.
- [1] S. Abbasbandy and T. Allahviranloo, Numerical solution of fuzzy differential equation by Runge-Kutta method, *J. Sci. Teacher Training University*, 1(3), 2002.
- [2] S. Abbasbandy and T. Allahviranloo, Numerical solutions of fuzzy differential equations by Taylor method, *Journal of Computational Methods in Applied Mathematics*, 2 (2002), 113-124.
- [3] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, O. Lopez-Pouso, and J. J. Nieto, Numerical methods for fuzzy differential inclusions, *Journal of Computer and Mathematics with Applications*, 48 (2004), 1633-1641.
- [4] T. Allahviranloo, N. Ahmady, and E. Ahmady, Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor-corrector method, *Information Sciences*, 177 (2007), 1633-1647.
- [5] T. Allahviranloo, E. Ahmady, and N. Ahmady, Nth-order fuzzy linear differential equations, *Information Sciences*, 178 (2008), 1309-1324.
- [6] T. Allahviranloo, N. A. Kiani, and N. Motamedi, Solving fuzzy differential equations by differential transformation method, *Information Sciences*, 179 (2009), 956-966.
- [7] M. Barkhordari Ahmadi, N. A. Kiani, N. Mikaeilvand, Extended predictor-corrector methods for solving fuzzy differential equations under generalized differentiability, *International Journal of Mathematical Modeling and Computations*, 5(2015), 149-171
- [8] B. Bede, A note on two-point boundary value problems associated with non-linear fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 157(2006), 986-989.



- [28] H. Kim and R. Sakthivel, Numerical solution of hybrid fuzzy differential equations using improved predictor-corrector method, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 17 (2012), 3788-3794.
- [29] M. Mosleh and M. Otadi, Simulation and evaluation of fuzzy differential equations by fuzzy neural network, *Applied Soft Computing*, 12 (2012), 2817-2827.
- [30] J. J. Nieto and R. Rodriguez-Lopez, Bounded solutions for fuzzy differential and integral equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 27 (2006), 1376-1386.
- [31] J. J. Nieto, The Cauchy problem for continuous fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 102 (1999), 259-262.
- [32] R. Norberg, Differential equations for moments of present values in life insurance, *Insurance: Mathematics and Economics* 17 (1995) 171-180.
- [33] H. Ouyang and Y. Wu, On fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 32 (1989), 321-325.
- [34] S. Ch. Palligkinis, G. Papageorgiou, and I. Th. Famelis, Runge-Kutta methods for fuzzy differential equations, *Applied Mathematics and Computation*, 209 (2009), 97-105.
- [35] S. Pederson and M. Sambandham, The Runge-Kutta method for hybrid fuzzy differential equations, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2 (2008), 626-634.
- [36] Y.Z. Peng, Exact solutions for some nonlinear partial differential equations, *Physics Letters A* 314 (2003) 401-408.
- [37] H. Roman-Flores and M. Rojas-Medar, Embedding of level-continuous Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 105 (1999), 133-138.
- [19] M. Friedman, M. Ming, and A. Kandel, Numerical solutions of fuzzy differential and integral equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 106 (1999), 35-48.
- [20] B. Ghazanfari and A. Shakerami, Numerical solution of fuzzy differential equations by extended Runge-Kutta-like formulae of order 4, *Fuzzy Sets and Systems*, 189 (2011), 74-91.
- [21] D. N. Georgiou, J. J. Nieto, and R. Rodriguez-Lopez, Initial value problems for higher-order fuzzy differential equations, *Nonlinear Anal.*, 63 (2005), 587-600.
- [22] H. Gang, H. Kaifen, Controlling chaos in systems described by partial differential equations, *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993) 3794-3797.
- [23] A.R. Its, A.G. Izergin, V.E. Korepin, N.A. Slavnov, Differential equations for quantum correlation functions, *International Journal of Modern Physics B* 4 (1990) 1003-1037.
- [24] A.V. Kotikov, Differential equations method: the calculation of vertex-type Feynman diagrams, *Physics Letters B* 259 (1991) 314-322.
- [25] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 24 (1987), 301-317.
- [26] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 35 (1990), 389-396.
- [27] A. Khastan and K. Ivaz, Numerical solution of fuzzy differential equations by Nystrom method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 41 (2009), 859-868.

---

fuzzy sets on Banach spaces, *Information Sciences*, 144 (2002), 227-247.

[38] S. Sekar, A. Sakthivel, Numerical investigation of the n-th order fuzzy differential equations using he's homotopy perturbation method, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 116(2017), 899-911.

[39] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, *Fuzzy Sets and Systems*, 24 (1987), 319-330.

[40] U. Salzner, P. Otto, J. Ladik, Numerical solution of a partial differential equation system describing chemical kinetics and diffusion in a cell with the aid of compartmentalization, *Journal of Computational Chemistry* 11 (1990) 194-204.

[41] J.G. Verwer, J.G. Blom, M. van Loon, E.J. Spee, A comparison of stiff ODE solvers for atmospheric chemistry problems, *Atmospheric Environment* 30 (1996) 49-58.